ASUPRA NOȚIUNII DE FUNCȚIE CONVEXĂ FAȚĂ DE O MULȚIME DE FUNCȚII INTERPOLATOARE

DE

ELENA MOLDOVAN

Prezenta lucrare urmărește să aducă o contribuție la studiul noțiunii de funcție convexă și al unor generalizări ale ei. Ideea clasică de funcție convexă este legată de cîteva ecuații funcționale importante și de interpolarea prin polinoame. În studiul funcțiilor convexe de ordin superior un rol fundamental îl au proprietățile diferențelor divizate. Funcția $f(x)$, definită pe o mulțime liniară E, se zice convexă, neconcavă, polinomială, neconvexă respectiv concavă de ordinul n, dacă $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f] > \geq, =, \leq, < 0$, oricare ar fi punctele distincte $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$ ale mulțimii E. Aici n poate lua valorile $-1, 0, 1, 2, \ldots$, iar mulțimea E conține cel puțin $n+2$ puncte. Această definiție a fost dată de T. Popoviciu [19]. Ea conduce la studiul comportării funcțiilor definite pe E, față de mulțimea polinoamelor de grad cel mult egal cu n (vezi formula (39)). Este firesc deci să ne propunem a da o definiție analoagă, înlocuind mulțimea polinoamelor de grad cel mult egal cu n, cu o altă mulțime de funcții care are proprietăți asemănătoare. În acest scop am considerat mulțimile interpolatoare de un ordin dat n, în sensul definiției 1 din lucrarea de față. Mulțimile de funcții interpolatoare au mai fost studiate de I. S. Pinsker [14], M. I. Morozov [11], S. F. Paskovski [12] și V. N. Burov [4]. O primă extindere a noțiunii de funcție convexă față de o mulțime F depinzînd de doi parametri a fost dată de E. F. Bekenbach [3]. L. Tornheim [29] dă o definiție bazată pe noțiunea de funcție n-valentă. În lucrarea de față, prin introducerea funcționalei $D\,[\mathcal{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f]$, am dat o definiție mai generală a funcțiilor de ordinul n față de mulțimea $\mathcal{F}_n$ de tipul $I_n\,[a, b]$*). În stabilirea proprietăților acestor funcții ne-am bazat pe cîteva teoreme de medie (teoremele 7 și 13). Teoremele 7 și 13 nu sînt cunoscute în literatura matematică. Teorema 9, care de asemenea e nouă, are la bază o proprietate analoagă diferențelor divizate. Pe baza teoremei 14, rezultă ca un caz parti-

*) Vezi definiția 1 din prezenta lucrare.

definiția convexității după L. Tornheim. Asupra mulțimilor de funcții interpolatoare care intervin nu se face ipoteza liniarității.

În capitolul I se dă un criteriu de liniaritate. Capitolul II din lucrare conține și cîteva proprietăți de descompunere ale mulțimii de definiție a unei funcții de ordinul n față de o mulțime de tipul I_n $[a, b]$. Ca o aplicație se dă o generalizare a unei cunoscute teoreme a lui V. A. Markoff [7].

Introducerea noțiunii de spic interpolator al unei mulțimi $\mathcal{F}_n$ permite găsirea mai multor proprietăți noi; unele din acestea au la bază o proprietate importantă pe care o are o mulțime $\mathcal{F}_n$ de tipul I_n $[a, b]$: orice submulțime de funcții egal mărginite pe $[a, b]$ a mulțimii $\mathcal{F}_n$, este compactă *).

Capitolul III din lucrare este consacrat inegalităților diferențiale care caracterizează funcțiile de ordinul n față de mulțimea integralelor unei ecuații diferențiale de tipul $\mathcal{I}_n$ $[a, b]$ (vezi definiția 13). Aceste inegalități se aplică apoi la studiul problemei polilocale, pentru ecuații diferențiale ordinare. Ele explică în același timp cîteva criterii clasice de unicitate pentru problema bilocală pentru ecuații diferențiale de ordinul al doilea, ca spre exemplu cele date de Ch. de la Vallée Poussin [24], Scorza-Dragoni [27], V. N. Babkin [2]. Inegalitățile diferențiale găsite au condus la o generalizare a metodei de integrare numerică a lui Ciaplîghin [28]. Ideea de a lega noțiunea de convexitate de problemele calitative ale teoriei ecuațiilor diferențiale n-am găsit-o la alți autori.

În capitolul IV din lucrare se urmărește găsirea cîtorva rezultate privitoare la cea mai bună aproximație în sensul lui P. L. Cebîșev. Aici se tratează în special cea mai bună aproximație a funcțiilor de ordinul n față de $\mathcal{F}_n$. După cum era de așteptat, aici apar deosebiri esențiale de la o mulțime interpolatoare la alta. După cum rezultă din paragraful 2 al capitolului IV, nici mulțimile liniare de tipul I_n $[a, b]$, nu se comportă toate la fel în privința proprietăților de cea mai bună aproximație. Capitolul IV se încheie cu o aplicație a teoremei lui de la Vallée Poussin, care conduce la găsirea unei noi teoreme de tip Helly.

În capitolul V am dat o nouă teoremă de medie referitoare la funcționale continue definite pe mulțimea funcțiilor continue pe un interval $[a, b]$. Această teoremă de medie conține ca un caz particular o teoremă dată de T. Popoviciu [21], care stă la baza teoriei structurii restului în procedeele de aproximare ale analizei. Noua teoremă conduce la studiul restului în procedeele de integrare numerică a ecuațiilor diferențiale.

CAPITOLUL I

§ 1. INTRODUCERE ÎN STUDIUL MULȚIMILOR INTERPOLATOARE DE FUNCȚII

1. Definiția 1. *Mulțimea $\mathcal{F}_n$ de funcții reale, de o variabilă reală, definite pe o mulțime liniară E, spunem că este interpolatoare de ordinul n pe mulțimea E, dacă sînt îndeplinite următoarele condiții :*

A. *elementele mulțimii $\mathcal{F}_n$ sînt funcții continue pe mulțimea E ;*

*) Din această proprietate rezultă, de exemplu, în cazul cînd funcțiile din $\mathcal{F}_n$ sînt derivabile, existența unui interval de contracție pentru teorema lui Rolle. Această proprietate am studiat-o într-o altă lucrare.

B. *oricare ar fi sistemul de n puncte distincte ale mulțimii E*

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \tag{1}$$

și oricare ar fi numerele

$$y_1, y_2, \ldots, y_n, \tag{2}$$

există în mulțimea $\mathcal{F}_n$ o funcție și una singură $\varphi(x)$, care satisface relațiile de egalitate

$$\varphi(x_i) = y_i, \; i = 1,2,\ldots,n. \tag{3}$$

Pentru simplificarea limbajului, o mulțime interpolatoare de ordinul n pe E, o vom mai numi și mulțime de tipul $I_n\{E\}$. În particular, E poate să fie un interval închis $[a, b]$ sau un interval deschis (a, b), semideschis $(a, b]$ sau $[a, b)$. Tipul corespunzător se va nota $I_n[a, b]$ sau $I_n(a, b)$, $I_n(a, b]$, respectiv $I_n[a, b)$.

Funcția $\varphi(x) \in \mathcal{F}_n$, care satisface condițiile (3) din definiția 1, o notăm prin simbolul

$$L(\mathcal{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n | x),$$

sau, pentru a pune în evidență faptul că numerele (2) sînt valorile unei funcții $f(x)$ definite pe punctele (1), $f(x_i) = y_i$, $i = 1,2,\ldots,n$, vom folosi și notația mai simplă

$$L(\mathcal{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_n; f | x).$$

Acest paragraf conține noțiunile de bază privitoare la mulțimi interpolatoare de funcții, precum și cîteva din proprietățile lor mai importante.

2. Noțiunea de mulțime interpolatoare de ordinul n este o generalizare firească a mulțimii polinoamelor de grad cel mult egal cu $n-1$, care este de tipul $I_n(-\infty, \infty)$.

Mulțimea $\mathcal{T}_{2n+1}$ a polinoamelor trigonometrice*) de ordin cel mult egal cu n este interpolatoare de ordinul $2n+1$ pe orice interval închis de lungime mai mică decît 2π.

Mulțimea integralelor unei ecuații diferențiale liniare de ordinul n, cu coeficienți constanți, este de tipul I_n $(-\infty, \infty)$ dacă toate rădăcinile ecuației caracteristice sînt reale [16]. În cazul cînd rădăcinile ecuației caracteristice nu sînt toate reale, această proprietate nu mai are loc. În acest caz, dacă $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ și diferența $h = x_n - x_1$ este suficient de mică, unicitatea integralei, care pe punctele x_i, $i = 1,2,\ldots,n$, ia respectiv valorile y_i, $i = 1,2,\ldots,n$, este asigurată. Determinarea maximului lui h, în diferite ipoteze precizate făcute asupra rădăcinilor ecuației caracteristice este unul din aspectele pe care le prezintă studiul problemei polilocale pentru ecuații diferențiale ordinare.

*) Elementele mulțimii $\mathcal{T}_{2n+1}$ sînt de forma

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

În toate exemplele de mai sus mulțimile interpolatoare considerate sînt liniare*). Există și mulțimi interpolatoare care nu sînt liniare. De exemplu, dacă în mulțimea polinoamelor de grad cel mult egal cu n, ne fixăm asupra submulțimii formate din polinoamele în care coeficientul lui x^n este un număr fixat α, obținem o mulțime interpolatoare de ordinul n, pe întreaga axă reală, ale cărei elemente sînt polinoame de forma $\alpha\, x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$, unde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt coeficienți variabili. Această mulțime o vom nota întotdeauna cu $\mathcal{L}_{n+1}\,(\alpha)$. Dacă $\alpha \neq 0$, este clar că $\mathcal{L}_{n+1}\,(\alpha)$ nu este o mulțime liniară, deoarece nu conține suma a două elemente ale ei.

În ultimul capitol al acestei lucrări se mai dau și alte exemple de mulțimi interpolatoare care nu sînt liniare. Noțiunea de mulțime interpolatoare de ordinul n — așa cum am definit-o mai sus — o întîlnim la L. T o r n h e i m [29] sub denumirea de mulțime cu n parametri și la M. I. M o r o z o v [11] sub denumirea de clasă de funcții de aproximație. Problemele pe care le studiem în această lucrare sînt în general diferite de cele tratate de L. T o r n h e i m și M. I. M o r o z o v, iar metodele folosite în demonstrații diferă esențial de cele întîlnite la cei doi autori, deoarece în prezenta lucrare aparatul principal de studiu îl oferă teoremele de medie relative la mulțimi interpolatoare de funcții, pe care le-am stabilit în lucrările [8], [9], [10].

3. L e m a 1. *Fie* $\mathcal{F}_1$ *o mulțime de tipul* I_1 $[a, b]$. *Dacă șirurile de numere* $\{y^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ *și* $\{x^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$, $a \leqslant x^{(i)} \leqslant b$, $i = 1,2, \ldots$, *sînt convergente și au respectiv limitele* y_1 și x_1, *atunci șirul de funcții* $\{L\,(\mathcal{F}_1;\, x^{(i)};\, y^{(i)}|\, x)\}_{i=1}^{\infty}$ *converge uniform pe intervalul* $[a, b]$ *către funcția* $L\,(\mathcal{F}_1;\, x_1;\, y_1|\, x)$.

Pentru demonstrația lemei 1 să observăm mai întîi că dacă ipotezele din enunț sînt satisfăcute, atunci șirul de *numere* $\{L\,(\mathcal{F}_1; x^{(i)};\, y^{(i)}\, |x_1)\}_{i=1}^{\infty}$ este convergent și are limita y_1. Pentru a arăta că această proprietate are loc este suficient să arătăm că oricare ar fi numărul $\eta > 0$, pentru N suficient de mare, avem $y_1 - \eta < L\,(\mathcal{F}_1;\, x^{(n)};\, y^{(n)}|\, x_1) < y_1 + \eta$, oricare ar fi $n > N$. Să presupunem că ar exista o infinitate de termeni ai șirului $\{L\,(\mathcal{F}_1;\, x^{(i)};\, y^{(i)}\,|\, x)\}_{i=1}^{\infty}$, astfel ca $y_1 \leqslant L\,(\mathcal{F}_1;\, x^{(i)};\, y^{(i)}|\, x_1)$. Cazul contrar se va studia în mod analog. Să presupunem că există un $\eta > 0$, astfel încît $y_1 + \eta \leqslant L\,(\mathcal{F}_1;\, x^{(k_i)};\, y^{(k_i)}\,|\, x_1)$, pentru un anumit subșir de indici $\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$. Atunci, ținînd seama de faptul că două funcții distincte din mulțimea $\mathcal{F}_1$ uu pot să coincidă în nici un punct al intervalului $[a, b]$, rezultă că au loc inegalitățile

$$L\,(\mathcal{F}_1;\, x_1;\, y_1 + \eta|\, x) \leqslant L\,(\mathcal{F}_1;\, x^{(k_i)};\, y^{(k_i)}|\, x), \quad i = 1,2,\ldots, \tag{4}$$

oricare ar fi $x \in [a, b]$. Atunci din inegalitățile (4) rezultă că șirul de puncte $\{M\,(x^{(k_i)},\, y^{(k_i)})\}_{i=1}^{\infty}$ are un punct de acumulare diferit de punctul $M\,(x_1,\, y_1)$. Or, aceasta contrazice ipoteza făcută în enunț. Raționînd în mod analog asupra cazului cînd există o infinitate de funcții în șirul $\{L\,(\mathcal{F}_1;\, x^{(i)};\, y^{(i)}|\, x)\}_{i=1}^{\infty}$, care iau valori mai mici sau egale cu y_1 în punctul x_1, rezultă că trebuie să aibă loc relația $\lim\limits_{i \to \infty} L\,(\mathcal{F}_1; x^{(i)};\, y^{(i)}|\, x_1) = y_1$. Pe baza acestei observații, pentru demonstrația lemei 1,

*)Aici prin liniaritatea unei mulțimi M de funcții se înțelege următoarea proprietate: dacă f_1 și f_2 sînt elemente oarecare din M, atunci și $\alpha f_1 + \beta f_2$ aparține lui M, oricare ar fi numerele reale α și β.

este suficient să arătăm că are loc următoarea afirmație: dacă x_1 este un punct *fixat* în intervalul $[a, b]$ și șirul de numere $\{\tilde{y}^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ are limita y_1, atunci șirul de funcții $\{L\,(\mathcal{F}_1;\, x_1;\, \tilde{y}^{(i)}|\, x)\}_{i=1}^{\infty}$ converge uniform pe intervalul $[a, b]$ către funcția $L(\mathcal{F}_1;\, x_1;\, y_1|\, x)$. Să ne plasăm în ipotezele *acestei* propoziții. Se observă imediat că șirul de funcții $\{L(\mathcal{F}_1;\, x_1;\, \tilde{y}^{(i)}|\, x)\}_{i=1}^{\infty}$ este egal mărginit pe intervalul $[a, b]$. Prin urmare oricare ar fi punctul $x_0 \in [a, b]$, șirul de numere $\{L\,(\mathcal{F}_1;\, x_1;\, \tilde{y}^{(i)}|\, x_0)\}_{i=1}^{\infty}$ are în totdeauna *cel puțin* un punct de acumulare. Să presupunem că pentru un x_0 oarecare diferit de x_1 acest șir ar putea avea un punct de acumulare y^* diferit de $L(\mathcal{F}_1;\, x_1;\, y_1|\, x_0)$. Fie pentru fixarea ideilor $y^* > L(\mathcal{F}_1;\, x_1; y_1|x_0)$. Atunci pentru o infinitate de termeni ai șirului de funcții $\{L(\mathcal{F}_1;\, x_1;\, \tilde{y}^{(i)}|\, x)\}_{i=1}^{\infty}$, avem $L(\mathcal{F}_1; x_1;\, y_1\,|\, x) < L\,(\mathcal{F}_1;\, x_1;\, \tilde{y}^{(i)}\,|\, x)$ oricare ar fi $x \in [a,\, b]$. Or, aceasta atrage după sine existența unui subșir al șirului de numere $\{\tilde{y}^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$, care are o limită diferită de y_1, contrar ipotezei făcute. Prin urmare nu putem avea $y^* > L(\mathcal{F}_1;\, x_1;\, y_1|\, x_0)$. Analog se arată că nu putem avea nici $y^* < L(\mathcal{F}_1;\, x_1;\, y_1|\, x_0)$. Punctul x_0 fiind arbitrar ales în $[a, b]$, rezultă că șirul de funcții $\{L(\mathcal{F}_1;\, x_1;\, \tilde{y}^{(i)}|\, x)\}_{i=1}^{\infty}$, este convergent pe intervalul $[a, b]$ și are funcția limită $L\,(\mathcal{F}_1;\, x_1;\, y_1|\, x)$. Mai trebuie să arătăm că această convergență este uniformă pe intervalul $[a, b]$. Funcția limită fiind continuă pe intervalul $[a, b]$, orice *subșir monoton**) de funcții $\{L(\mathcal{F}_1;\, x_1;\, \tilde{y}^{(k_i)}|\, x)\}_{i=1}^{\infty}$ al șirului inițial, pe baza teoremei lui Dini [5], este uniform convergent pe $[a, b]$. De aici, pe baza proprietății pe care am mai folosit-o, că două funcții distincte din $\mathcal{F}_1$ nu pot să coincidă în nici un punct din $[a, b]$, rezultă și convergența *uniformă* a șirului inițial $\{L(\mathcal{F}_1; x_1; \tilde{y}^{(i)}|\, x)\}_{i=1}^{\infty}$ de funcții.

Lema 1 este astfel demonstrată. Vom da mai jos cîteva aplicații ale acestei leme.

4. D e f i n i ț i a 2. *Fie date punctele* $M_1\,(x_1,\, y_1)$, $M_2(x_2,\, y_2), \ldots, M_{n-1}\,(x_{n-1},\, y_{n-1})$, $x_1,\, x_2, \ldots x_{n-1}$ *fiind* $n-1$ *puncte distincte din intervalul* $[a, b]$ *și mulțimea* $\mathcal{F}_n$ *de tipul* $I_n\,[a, b]$, $n \geqslant 2$. *Mulțimea funcțiilor din* $\mathcal{F}_n$, *care pe punctele* x_i *iau respectiv valorile* y_i, $i = 1,2,\ldots, n-1$, *o numim spic interpolator de ordinul* $n-1$ *al mulțimii* $\mathcal{F}_n$, *relativ la punctele* $M_i\,(x_i,\, y_i)$, $i = 1,2,\,\ldots,\, n-1$ *și o notăm prin simbolul* $S\left\{\mathcal{F}_n\,;\, \begin{matrix} x_1, & x_2, \ldots, & x_{n-1} \\ y_1, & y_2, \ldots, & y_{n-1} \end{matrix}\right\}$.

Dacă $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1}$, atunci spicul $S\left\{\mathcal{F}_n\,;\, \begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \\ y_1, y_2, \ldots, y_{n-1} \end{matrix}\right\}$ este de tipul $I_1\,(x_{i-1},\, x_i)$, $i = 2,3,\,\ldots,\, n$-1. El este de tipul $I_1\,[a,\, x_1)$, dacă $x_1 \neq a_1$, și de tipul $I_1\,(x_{n-1},\, b]$, dacă $x_{n-1} \neq b$. Pe baza lemei 1 rezultă

T e o r e m a 1. *Fie dată mulțimea* $\mathcal{F}_n$ *de tipul* I $[a, b]$, $n \geqq 2$, *și două funcții distincte* $\varphi_1\,(x)$ și $\varphi_2\,(x)$ *din* $\mathcal{F}_n$. *Dacă există* $n-1$ *puncte* $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1}$ *în* $[a, b]$, *astfel ca* $\varphi_1\,(x_i) = \varphi_2\,(x_i)$, $i = 1,2,\ldots,\, n-1$, *atunci diferența* $\varphi_1\,(x) - \varphi_2\,(x)$ *schimbă semnul în fiecare dintre punctele* x_i *care sînt situate în interiorul intervalului* $[a,\, b]$.

*) Șirul de funcții $\{\, f_k\,(x)\,\}_{k=1}^{\infty}$, $x \in [a, b]$ se zice monoton, dacă pentru orice $x_0 \in [a, b]$, șirul corespunzător de numere $\{\, f_k\,(x_0)\,\}_{k=1}^{\infty}$ este monoton și sensul monotoniei este același oricare ar fi x_0.

Demonstrația teoremei 1 este imediată. Dacă $n = 2$ și $x_1 \neq a$, $x_1 \neq b$, $\varphi_1 (x_1) = \varphi_2 (x_1)$, să facem ipoteza că diferența $\varphi_1 (x) - \varphi_2 (x)$ nu schimbă semnul în x_1. Fie pentru fixarea ideilor $\varphi_1 (x) - \varphi_2 (x) > 0$ cînd $x \neq x_1$. Spicul $S \left\{ \mathfrak{F}_2; \begin{smallmatrix} a \\ \varphi_2 \end{smallmatrix} (a) \right\}$ este de tipul $I_1 [\alpha, \beta]$, oricare ar fi intervalul $[\alpha, \beta]$, astfel ca $a < \alpha$, $\beta \leqq b$. Putem aplica lema 1 șirului de funcții $\{L (\mathfrak{F}_2; a, x_1; \varphi_2 (a), \varphi_2 (x_1) + \eta_k \mid x)\}_{k=1}^{\infty}$, unde $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ este un șir de numere pozitive care tinde către zero. Pentru N suficient de mare, funcția $L(\mathfrak{F}_2; a, x_1; \varphi_2 (a), \varphi_2 (x_1) + \eta_k \mid x)$ coincide cu $\varphi_1 (x)$ în cel puțin două puncte din vecinătatea punctului x_1, dacă $k > N$. Dar două funcții distincte din $\mathfrak{F}_2$ nu pot coincide decît în cel mult un punct din $[a, b]$. Prin urmare ipoteza $\varphi_1 (x) - \varphi_2 (x) > 0$ pentru $x \neq x_1$, nu se poate realiza. Analog se observă că nu putem avea nici $\varphi_1 (x) - \varphi_2 (x) < 0$ pentru $x \neq x_1$. Deci diferența $\varphi_1 (x) - \varphi_2 (x)$ trebuie să schimbe semnul în punctul x_1.

Dacă $n > 2$ și $\varphi_1 (x)$, $\varphi_2 (x)$ satisfac ipotezele din enunțul teoremei, să presupunem că în punctul x_l, diferit de a și de b, diferența $\varphi_1 (x) - \varphi_2 (x)$ nu schimbă semnul. Convenim să notăm $x_0 = a$, $x_n = b$. Considerăm mulțimea funcțiilor din $\mathfrak{F}_n$ care coincid cu $\varphi_2 (x)$ pe punctele $x_1, x_2, \ldots x_{l-1}, x_{l+1}, \ldots, x_{n-1}$. Aceasta este o mulțime de tipul $I_2 (x_{l-1}, x_{l+1})$. Deci raționamentul făcut mai sus pentru cazul $n = 2$ rămîne valabil în orice interval închis situat în (x_{l-1}, x_{l+1}). Rezultă imediat că nu putem avea $\varphi_1 (x) - \varphi_2 (x) > 0$ sau $\varphi_1 (x) - \varphi_2(x) < 0$ pentru $x \in (x_{l-1}, x_i) \cup (x_l, x_{l+1})$. Diferența $\varphi_1 (x) - \varphi_2(x)$ trebuie deci să schimbe semnul în x_l.

T e o r e m a 2. *Dacă* $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1}$ *și* $x^* \neq x_i$, $i = 1,2,\ldots, n-1$, *iar* $\{y^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ *este un șir de numere cu limita* y^*, *atunci șirul de funcții* $\{L (\mathfrak{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x^*; y_i, y_2, \ldots, y_{n-1}, y^{(i)} \mid x)\}_{i=1}^{\infty}$ *converge uniform pe intervalul* $[a, b]$ *către funcția* $L (\mathfrak{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x^*; y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y^* \mid x)$. Aici $n \geqq 2$, *punctele* x_i, $i = 1,2,\ldots, n-1$ *și* x^* *aparțin intervalului* $[a, b]$, *iar* y_i, $i = 1,2,\ldots, n-1$ *sînt numere arbitrare.*

Demonstrația teoremei 2 se bazează pe lema 1, și pe teorema 1. Funcțiile care formează șirul din enunțul teoremei 2 fac parte din spicul $S \left\{ \mathfrak{F}_n; \begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \\ y_1, y_2, \ldots, y_{n-1} \end{matrix} \right\}$. Să presupunem că $x_{k-1} < x^* < x_k$. Convenim să notăm $x_0 = a$, $x_n = b$. Pe baza lemei 1 este clar că pe intervalul $[x_{k-1}, x_k]$ șirul de funcții din enunțul teoremei converge uniform către funcția $L (\mathfrak{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x^*; y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y^* \mid x)$. Să observăm că funcțiile care formează șirul din enunțul teoremei 2 sînt egal mărginite pe intervalul $[a, b]$*). Prin urmare, oricare ar fi punctul $\tilde{x}$ din $[a, b]$, șirul de numere $\{L (\mathfrak{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x^*; y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y^{(i)} \mid \tilde{x}\}_{i=1}^{\infty}$ are cel puțin un punct de acumulare. Pe baza teoremei 1, rezultă că acest punct de acumulare trebuie să coincidă cu $L (\mathfrak{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x^*; y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y^* \mid \tilde{x})$. Dacă n-ar fi așa, am ajunge în contradicție cu ipoteza că șirul de numere $\{y^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ are limita y^*. Caracterul uniform al convergenței pe $[a, b]$ rezultă acum imediat și nu mai insistăm asupra lui.

*) Aceasta se observă ușor pe baza convergenței șirului de numere $\{y^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ și pe baza teoremei 1.

Lema 1 pe care am dat-o mai sus, este un caz particular al unei teoreme care se datorește lui L. T o r n h e i m [29]. Fie $\mathfrak{F}_n$ o mulțime de tipul $I_n [a, b]$.

T e o r e m a 3. *Dacă se dau șirurile de numere* $\{x_1^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}, \ldots, \{x_n^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ *astfel ca* $x_j^{(i)} \neq x_k^{(i)}$, *cînd* $j \neq k$ *și* $a \leqq x_k^{(i)} \leqq b$, $k = 1,2,\ldots, n$, $i = 1,2,\ldots$, *avînd respectiv limitele distincte* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *și șirurile* $\{y_1^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}, \ldots, \{y_n^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$, *avînd respectiv limitele* $y_1, y_2, \ldots, y_n$, *atunci șirul de funcții* $\{L (\mathfrak{F}_n; x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots x_n^{(i)}; y_1^{(i)}, \ldots, y_n^{(i)} \mid x)\}_{i=1}^{\infty}$ *converge uniform pe intervalul* $[a, b]$ *către funcția* $L (\mathfrak{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n \mid x)$.

În lucrarea [29] se dă o demonstrație indirectă a acestei teoreme. O demonstrație directă se poate da pe baza unor considerații analoage cu cele din demonstrația lemei 1.

5. Lema 1 și teoremele 1—3 au o seamă de consecințe importante. Fie $n \geqq 2$ și $\mathfrak{F}_n$ o mulțime de tipul $I_n [a, b]$. Fie $\varphi_1 (x)$ și $\varphi_2 (x)$ două funcții distincte din $\mathfrak{F}_n$. Să notăm cu n_1 numărul de puncte în care $\varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ se anulează schimbînd semnul. Dacă $\varphi_1 (a) - \varphi_2 (a) = 0$ sau $\varphi_1 (b) - \varphi_2 (b) = 0$, atunci a, respectiv b, aparțin acestor n_1 puncte. Fie n_2 numărul punctelor din (a, b) în care $\varphi_1 (x) - \varphi_2 (x)$ se anulează fără să schimbe semnul.

Consecința 1 a *teoremei* 1. Avem întotdeauna $n_1 + 2n_2 \leqq n-1$.

Consecința 2 a *teoremei* 1. Dacă $\varphi_1 (x) - \varphi_2 (x)$ nu se anulează în a și b și dacă $\operatorname{sgn} \{\varphi_1 (a) - \varphi_2 (a)\} = (-1)^n \operatorname{sgn} \{\varphi_1 (b) - \varphi_2 (b)\}$, atunci numărul de puncte din interiorul intervalului $[a, b]$, în care diferența $\varphi_1 (x) - \varphi_2 (x)$ se anulează, este cel mult egal cu $n-2$.

Consecința 1 a *teoremei* 2. Fie $\mathfrak{F}_n$ o mulțime de tipul $I_n [a, b]$, $n \geqq 2$, și $S \left\{ \mathfrak{F}_n; \begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \\ y_1, y_2, \ldots, y_{n-1} \end{matrix} \right\}$ un spic al ei. Dacă $\mathfrak{M}$ este o submulțime a acestui spic, astfel ca într-un punct $x_0 \neq x_i$, $i = 1,2, \ldots, n$, mulțimea valorilor funcțiilor din $\mathfrak{M}$ să fie mărginită, atunci mulțimea $\mathfrak{M}$ este compactă *).

Consecința 1 a *lemei* 1. Dacă $\mathfrak{F}_1$ este o mulțime de tipul $I_1 [a, b]$ și $\mathfrak{M}$ este o mulțime de funcții din $\mathfrak{F}_1$, astfel ca pe un punct $x_0 \in [a, b]$, $|g (x_0)| < K$, oricare ar fi $g (x) \in \mathfrak{M}$, atunci $\mathfrak{M}$ este compactă. Rezultă imediat și un criteriu de compactitudine care este o consecință a teoremei 3.

T e o r e m a 4. *Condiția necesară și suficientă ca o mulțime* $\mathfrak{M}$ *de funcții ale unei mulțimi* $\mathfrak{F}_n$ *de tipul* $I_n [a, b]$ *să fie compactă este ca să existe n puncte distincte* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *în* $[a, b]$ *și un număr* K *astfel ca oricare ar fi* $g (x) \in \mathfrak{M}$, *să avem* $|g (x_i)| < K$, $i = 1,2,\ldots, n$.

Demonstrația fiecăreia din consecințele enunțate, precum și a teoremei 3 este clară și deci nu ne mai oprim asupra lor.

6. În toate raționamentele făcute mai sus, se observă că pe lîngă proprietatea interpolatoare a intervenit în mod esențial proprietatea de continuitate a funcțiilor studiate. În cele ce urmează, vom folosi observațiile făcute pînă acum

*) Orice submulțime infinită a ei conține un șir uniform convergent pe $[a, b]$, către o funcție din $\mathfrak{M}$.

pentru a pune în evidență un prim aspect din studiul comportării funcțiilor definite pe un interval $[a, b]$, față de o mulțime de tipul $I_n[a, b]$.

D e f i n i ț i a 3. *O funcție $f(x)$, definită pe intervalul $[a, b]$, spunem că este n-valentă față de o mulțime $\mathcal{F}_n$ de tipul $I_n[a, b]$, dacă oricare ar fi $\varphi(x) \in \mathcal{F}_n$ diferența $f(x)-\varphi(x)$ nu se anulează decît pe cel mult n puncte din $[a, b]$.*

Noțiunea de n-valență a fost introdusă de T. P o p o v i c i u [22] în cazul cînd mulțimea de tipul $I_n[a, b]$ din definiție este înlocuită cu mulțimea polinoamelor de gradul $n-1$. În cazul polinoamelor de grad zero regăsim noțiunea de univalență binecunoscută.

T e o r e m a 5. *Dacă $f(x)$ este o funcție continuă pe $[a, b]$ și n-valentă față de mulțimea $\mathcal{F}_n$, atunci, dacă $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ sînt puncte din $[a, b]$, diferența $f(x) - L(\mathcal{F}; x_1, x_2, \dots, x_n; f | x)$ schimbă semnul în fiecare din punctele x_i, care sînt situate în interiorul intervalului $[a, b]$.*

Demonstrația teoremei 3 este analoagă cu cea a teoremei 1.

Asupra proprietăților funcțiilor n-valente față de o mulțime de tipul $I_n[a, b]$, vom mai reveni în capitolul II al lucrării.

7. Să considerăm un sistem de $n+1$ puncte distincte din intervalul $[a, b]$

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} \tag{5}$$

și un sistem de $n+1$ numere arbitrare

$$y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}. \tag{6}$$

D e f i n i ț i a 4. *Sistemul de funcții*

$$L(\mathcal{F}_n\; x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}; y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_{n+1} | x), \quad i = 1, 2, \dots, n+1, \tag{7}$$

ale mulțimii $\mathcal{F}_n$ de tipul $I_n[a, b]$, îl numim sistem interpolator relativ la numerele (6) pe punctele (5) și îl notăm prin simbolul

$$S\left\{\mathcal{F}_n; \begin{matrix} x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \\ y_1, y_2, \dots, y_{n+1} \end{matrix}\right\}.$$

Acest sistem se compune sau din $n+1$ funcții distincte sau dintr-o singură funcție. El se compune dintr-o singură funcție atunci cînd în $\mathcal{F}_n$ există o funcție care pe punctele (5) să ia respectiv valorile (6). Funcțiile (7) au cîteva proprietăți importante care decurg din condiția B. În cele ce urmează ne fixăm asupra unei mulțimi $\mathcal{F}_n$ de tipul $I_n[a, b]$ care va rămînea mereu aceeași în cursul raționamentelor afară de cazul cînd se specifică contrariul.

L e m a 2. *Dacă $x_0 \in [a, b]$, $x_0 > x_{n+1}$, atunci*

$$L(\mathcal{F}_n; x_2, x_3, \dots, x_{n+1}; y_2, \dots, y_{n+1} | x_0) \leq$$

$$\leq L(\mathcal{F}_n; x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}; y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_{n+1} | x_0) \tag{8}$$

sau

$$L(\mathcal{F}_n; x_2, x_3, \dots, x_{n+1}; y_2, y_3, \dots, y_{n+1} | x_0) >$$

$$> L(\mathcal{F}_n; x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}; y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_{n+1} | x_0)$$

$$i = 2, 3, \dots, n, \tag{9}$$

după cum

$$L(\mathcal{F}_n; x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n | x_{n+1}) \geq y_{n+1}, \tag{10}$$

sau

$$L(\mathcal{F}_{n+1}; x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n | x_{n+1}) < y_{n+1}. \tag{11}$$

Demonstrația lemei 2. Dacă $L(\mathcal{F}_n; x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n | x_{n+1}) = y_{n+1}$, atunci sistemul $S\left\{\mathcal{F}_n; \begin{matrix} x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \\ y_1, y_2, \dots, y_{n+1} \end{matrix}\right\}$ se compune dintr-o singură funcție și atunci în (8) are loc semnul egalității. Dacă $S\left\{\mathcal{F}_n; \begin{matrix} x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \\ y_1, y_2, \dots, y_{n+1} \end{matrix}\right\}$ nu se reduce la o singură funcție, atunci cele $n+1$ funcții (7), care alcătuiesc acest sistem, coincid două cîte două pe cîte $n-1$ puncte din sistemul (5) de puncte. Prin urmare, conform teoremei 1, au loc inegalitățile

$$L(\mathcal{F}_n; x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}; y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_{n+1} | x_i) > y_i,$$

sau

$$L(\mathcal{F}_n; x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}; y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_{n+1} | x_i) < y_i,$$

după cum i este de aceeași paritate sau de paritate contrară cu $n+1$, cînd

$$L(\mathcal{F}_n; x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n | x_{n+1}) > y_{n+1} \tag{12}$$

și inegalitățile contrare (suprimîndu-se egalitatea) cînd

$$L(\mathcal{F}_n; x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n | x_{n+1}) < y_{n+1}. \tag{13}$$

De aici rezultă că dacă are loc inegalitatea (12), atunci pentru $x_n < x < x_{n+1}$, avem

$$L(\mathcal{F}_n; x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}; y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_{n+1} | x) <$$

$$< L(\mathcal{F}_n; x_2, x_3, \dots, x_{n+1}; y_2, y_3, \dots, y_{n+1} | x), \quad i = 2, 3, \dots, n,$$

și deci pentru $x > x_{n+1}$, trebuie să avem

$$L(\mathcal{F}_n; x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}; y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_{n+1} | x) >$$

$$> L(\mathcal{F}_n; x_2, x_3, \dots, x_{n+1}; y_2, y_3, \dots, y_{n+1} | x), \quad i = 2, 3, \dots, n,$$

deoarece funcțiile $L(\mathcal{F}_n; x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}; y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_{n+1} | x)$ și $L(\mathcal{F}_n; x_2, x_3, \dots, x_{n+1}; y_2, y_3, \dots, y_{n+1} | x)$ coincid pe punctele $x_2, x_3, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}$.

În mod analog se observă că dacă are loc inegalitatea (13), atunci, pentru $x_n < x < x_{n+1}$, avem

$$L(\mathcal{F}_n; x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}; y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_{n+1} | x) >$$

$$> L(\mathcal{F}_n; x_2, x_3, \dots, x_{n+1}; y_2, y_3, \dots, y_{n+1} | x)$$

$$i = 2, 3, \dots, n$$

şi, pentru $x > x_{n+1}$, avem

$$L(\mathcal{F}_n;\ x_2, x_3, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1};\ y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_{n+1} \mid x) <$$
$$< L(\mathcal{F}_n;\ x_2, x_3, \ldots, x_{n+1};\ y_2, \ldots, y_{n+1} \mid x),\quad i = 2,3,\ldots, n.$$

Concluzia din lema 2 are deci loc.

L e m a 3. *Dacă* $x_0 \in [a, b]$, $x_0 > x_{n+1}$, *atunci au loc inegalităţile*

$$L(\mathcal{F}_n;\ x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1};\ y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_{n+1} \mid x_0) >$$
$$> L(\mathcal{F}_n;\ x_1, x_2, \ldots, x_n;\ y_1, \ldots, y_n \mid x_0),\quad i = 2,3,\ldots, n,$$

dacă inegalitatea (13) *are loc, şi inegalităţile contrare (suprimîndu-se egalitatea) dacă este satisfăcută inegalitatea* (12).

Demonstraţia lemei 3 este analoagă cu cea a lemei 2. Lemele 2 şi 3, care decurg din proprietatea elementară exprimată prin teorema 1, sînt totuşi importante pentrucă ele pun în evidenţă comportarea funcţiilor din sistemul $S\left\{\mathcal{F}_n;\ \begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \\ y_1, y_2, \ldots, y_{n+1} \end{matrix}\right\}$, care are un rol mare în întreg studiul mulţimilor interpolatoare.

8. D e f i n i ţ i a 5. *Fiind date punctele* (1) *şi numerele* (2), *sistemul de n funcţii*

$$L(\mathcal{F}_n;\ x_1, x_2, \ldots, x_n;\ \underbrace{0,0,\ldots,0}_{i-1}, y_i, \underbrace{0,0,\ldots,0}_{n-i} \mid x),\quad i = 1,2,\ldots, n, \tag{14}$$

îl numim sistem fundamental relativ la numerele (2) *pe punctele* (1) *şi îl notăm prin simbolul* $\mathcal{L}\left\{\mathcal{F}_n;\ \begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ y_1, y_2, \ldots, y_n \end{matrix}\right\}$.

Funcţiile (14) joacă un rol important în cazul cînd mulţimea $\mathcal{F}_n$ este liniară şi numerele (2) sînt toate egale cu 1. În acest caz o funcţie oarecare $g(x) \in \mathcal{F}_n$ se poate exprima sub forma

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\, L(\mathcal{F}_n;\ x_1, x_2, \ldots, x_n;\ \underbrace{0,0,\ldots,0}_{i-1}, 1, \underbrace{0,0,\ldots,0}_{n-i} \mid x). \tag{15}$$

În mulţimea $\mathcal{P}_n$, funcţiile (14) sînt polinoamele fundamentale ale lui Lagrange. Funcţiile (14) formează, în cazul cînd $\mathcal{F}_n$ este liniară, o bază interpolatoare [10].

În baza proprietăţii B, oricare ar fi sistemul (1) de puncte din $[a, b]$, o funcţie oarecare $g(x) \in \mathcal{F}_n$ este determinată de sistemul de numere $g(x_1), g(x_2), \ldots, g(x_n)$. Este deci firească ideea de a organiza mulţimea $\mathcal{F}_n$ ca spaţiu vectorial, adoptîndu-se o definiţie convenabilă a operaţiei de adunare, a operaţiei de înmulţire cu un număr real şi a normei. Să fixăm punctele (1) şi să notăm operaţia de adunare a două funcţii din $\mathcal{F}_n$ prin simbolul $\oplus$, iar operaţia de înmulţire cu un număr real, cu semnul $\otimes$. Pentru norma unei funcţii $\varphi(x)$ adoptăm notaţia $\|\varphi(x)\|$.

Să adoptăm următoarele definiţii, funcţiile $\varphi_1(x)$ şi $\varphi_2(x)$ aparţinînd mulţimii $\mathcal{F}_n$:

$$\varphi_1(x) \oplus \varphi_2(x) = L(\mathcal{F}_n;\ x_1, x_2, \ldots, x_n;\ \varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_1), \varphi_1(x_2) + \varphi_2(x_2), \ldots, \varphi_1(x_n) + \varphi_2(x_n) \mid x), \tag{16}$$

$$\alpha \otimes \varphi_1(x) = L(\mathcal{F}_n;\ x_1, x_2, \ldots, x_n;\ \alpha\varphi_1(x_1), \alpha\varphi_1(x_2), \ldots, \alpha\varphi_1(x_n) \mid x) \tag{17}$$

(α număr real)

$$\|\varphi(x)\| = \max_i \{|\varphi(x_i)|\},\quad \varphi(x) \in \mathcal{F}_n. \tag{18}$$

Se observă imediat că operaţiile definite prin (16) şi (17) se bucură de toate proprietăţile cerute prin axiomele spaţiului vectorial, funcţia 0, zero, fiind aceea care pe punctele (1) se anulează. În ceea ce priveşte norma introdusă prin (18), avem $\|\varphi(x)\| \geqslant 0$, $\|\varphi(x)\| = 0$, *dacă şi numai dacă* $\varphi(x) = 0$, $\|\alpha\,\varphi(x)\| = |\alpha|\ \|\varphi(x)\|$, $\|\varphi_1(x) \oplus \varphi_2(x)\| \leqslant \|\varphi_1(x)\| + \|\varphi_2(x)\|$.

Spaţiul vectorial obţinut astfel îl notăm cu $V\{\mathcal{F}_n;\ x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Cu ajutorul normei (18) se introduce metrica

$$\rho\,[\varphi_1(x), \varphi_2(x)] = \|\varphi_1(x) \ominus \varphi_2(x)\| = \max_i \{|\varphi_1(x_i) - \varphi_2(x_i)|\}. \tag{19}$$

Spaţiul $V\{\mathcal{F}_n;\ x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ este complet. Pe baza teoremei 3, metrica introdusă prin (19) este echivalentă cu metrica

$$\rho^*\,[\varphi_1(x), \varphi_2(x)] = \max_{x \in [a,b]} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|. \tag{20}$$

Prin urmare spaţiul metric ce se obţine din mulţimea $\mathcal{F}_n$, prin introducerea metricei (20), este de asemenea complet.

Spaţiul $V\{\mathcal{F}_n;\ x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ este izomorf şi izometric cu spaţiul vectorial n-dimensional V_n, în care distanţa între două elemente $v_1 = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $v_2 = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ este dată de formula

$$\rho_n(v_1, v_2) = \max_i \{|a_i - b_i|\},$$

iar operaţiile de adunare şi înmulţire cu un număr real se definesc prin formulele

$$v_1 + v_2 = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n),$$
$$\alpha v_1 = (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n).$$

Dacă notăm cu $A[v]$ operaţia definită în V_n şi cu valorile în $V\{\mathcal{F}_n;\ x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, care face să corespundă vectorului $v = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ funcţia din $\mathcal{F}_n$ care pe punctele (1) ia respectiv valorile $a_1, a_2, \ldots, a_n$, avem

$$A[v] = A[(a_1, a_2, \ldots, a_n)] = L(\mathcal{F}_n;\ x_1, x_2, \ldots, x_n;\ a_1, a_2, \ldots, a_n \mid x).$$

Din cauza proprietăţii B, operaţia $A[v]$ are inversă. Dacă notăm inversa operaţiei $A[v]$ prin $A^{-1}[g]$, $g \in \mathcal{F}_n$, avem

$$A^{-1}[g] = v = (g(x_1), g(x_2), \ldots, g(x_n)).$$

Au loc relaţiile

$$A[v_1 + v_2] = A[v_1] \oplus A[v_2], \tag{21}$$
$$A[\alpha\, v_1] = \alpha \otimes A[v_1]. \tag{22}$$

L e m a 4. *Operaţia* $A[v]$ *este continuă, adică are loc relaţia* *)

$$\lim_{v_i \to v} A[v_i] = A[v]. \tag{23}$$

*) Această proprietate rezultă direct din teorema 3.

În formularea lemei 4, prin $v_i \to v$ se înțelege $\lim\limits_{i=\infty} \rho_n (v_i, v) = 0$, iar prin $\lim\limits_{i \to \infty} A [v_i] = A [v]$ se înțelege $\lim\limits_{i \to \infty} \rho^* [A [v_i], A [v]] = 0$. Are loc

T e o r e m a 6. *Pentru ca mulțimea $\mathfrak{F}_n$ să fie liniară este necesar și suficient să existe un sistem de puncte* (1) *în* $[a, b]$, *astfel ca suma a două funcții oarecare din $\mathfrak{F}_n$, care se anulează cel puțin pe cîte un punct al sistemului* (1), *să aparțină mulțimii $\mathfrak{F}_n$.*

Demonstrație. Necesitatea condițiee din teoremă e evidentă. Să dovedim suficiența ei. Să presupunem că pe punctele (1) condiția din teoremă este indeplinită. Atunci suma a doua funcții oarecare din sistemul $\mathfrak{L} \left\{ \mathfrak{F}_n ; \begin{matrix} x_1, & x_2, \ldots, & x_n \\ y_1, & y_2, \ldots, & y_n \end{matrix} \right\}$, oricare ar fi numerele $y_1, y_2, \ldots, y_n$, aparține mulțimii $\mathfrak{F}_n$ și este o funcție care se anulează*) cel puțin pe unul din punctele (1). De aici rezultă că, oricare ar fi numerele (2), și suma celor n funcții (14) aparține de asemenea mulțimii $\mathfrak{F}_n$. Adică o funcție oarecare $g_1 (x)$ din $\mathfrak{F}_n$, se poate exprima sub forma

$$g_1 (x) = \sum_{i=1}^{n} L \, (\mathfrak{F}_n;\ x_1,\ x_2, \ldots, x_n;\ \underbrace{0,0,\ldots,0}_{i-1},\ g_1\ (x_i),\ \underbrace{0,0,\ldots,0}_{n-i} \mid x). \quad (24)$$

Folosind condiția din teoremă rezultă că dacă $g_2 (x) \in \mathfrak{F}_n$,

$$g_2 (x) = \sum_{i=1}^{n} L (\mathfrak{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_n; \underbrace{0,0,\ldots,0}_{i-1},\ g_2 (x_i),\ \underbrace{0,0,\ldots,0}_{n-i} \mid x), \quad (25)$$

avem și $g_1(x) + g_2 (x) \in \mathfrak{F}_n$ deoarece în (24) și (25) sumele din membrul al doilea se pot aduna termen cu termen și avem de aplicat condiția din teoremă, sistemului fundamental

$$\mathfrak{L} \left\{ \begin{matrix} \mathfrak{F}_n;\ x_1 & x_2 & x_n \\ g_1 (x_1) + g_2 (x_1), & g_1 (x_2) + g_2 (x_2), \ldots, & g_1 (x_n) + g_2 (x_n) \end{matrix} \right\}.$$

Rezultă deci că suma a două funcții oarecare din $\mathfrak{F}_n$ aparține acestei mulțimi. Atunci în (16), (17), (21) semnul $\oplus$ se poate înlocui cu semnul $+$. Operația $A [v]$ fiind aditivă și continuă este și omogenă. De aici rezultă atunci că, în ipotezele din teoremă, mulțimea $\mathfrak{F}_n$ conține, odată cu funcțiile $g_1 (x)$ și $g_2(x)$, orice funcție de forma $\alpha g_1(x) + \beta\ g_2(x)$, α și β fiind numere reale oarecare. Suficiența condiției din teoremă este astfel demonstrată.

§ 2. TEOREME DE MEDIE PENTRU FUNCȚII DEFINITE PE UN NUMĂR FINIT DE PUNCTE ȘI PENTRU FUNCȚII CONTINUE PE UN INTERVAL

1. Fie $\mathfrak{F}_n$ o mulțime de tipul $I_n [a, b]$; să considerăm mulțimea E_m formată din punctele

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_m, \quad m \geqq n + 1, \quad (26)$$

*) dacă $n > 2$.

situate în intervalul $[a, b]$ și numerele

$$y_1, y_2, \ldots, y_m. \quad (27)$$

Pe fiecare grup de cîte n puncte $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}$, ale mulțimii E_m, se poate considera funcția $L (\mathfrak{F}_n;\ x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n};\ y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_n} \mid x)$, pe care, în cele ce urmează (întotdeauna cînd va fi vorba de punctele (1) și numerele corespunzătoate (2), o vom nota mai simplu $L (\mathfrak{F}_n;\ x_1,\ x_2, \ldots, x_n;\ y \mid x)$, deoarece numerele y_{i_k} din șirul (27), care figurează aici, au aceiași indici ca și punctele x_{i_k}. Despre indicii $i_1, i_2, \ldots, i_n$ se va presupune întotdeauna că îndeplinesc inegalitățile

$$1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_n \leqq m. \quad (28)$$

Vom presupune de asemenea că $x_m < b$. Are loc

T e o r e m a 7. *Dacă $x_{i_n} < x_0 \leqq b$, atunci numărul*

$$L (\mathfrak{F}_n;\ x_{i_1},\ x_{i_2}, \ldots, x_{i_n};\ y \mid x_0) \quad (29)$$

este cuprins între cel mai mic și cel mai mare dintre numerele

$$L (\mathfrak{F}_n;\ x_j,\ x_{j+1}, \ldots, x_{j+n-1};\ y \mid x_0),\ j = i_1,\ i_1 + 1, \ldots, i_n - n + 1. \quad (30)$$

Conținutul acestei teoreme se interpretează în felul următor: valoarea în punctul x_0, a funcției $L (\mathfrak{F}_n; x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}; y \mid x)$, care pe n puncte *oarecare* $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}$ din șirul (26) ia respectiv valorile $y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_n}$, este o medie între valorile în același punct x_0, ale funcțiilor din $\mathfrak{F}_n$, care pe cîte n puncte consecutive $x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+n-1}$, ale șirului (26) iau respectiv valorile $y_j, y_{j+1}, \ldots, y_{j+n-1}$.

Adică

$$\begin{aligned} \min_{j=i_1,\ i_1+1, \ldots,\ i_n-n+1} \quad & L (\mathfrak{F}_n;\ x_j,\ x_{j+1}, \ldots, x_{j+n-1};\ y \mid x_0) \leqq \\ & \leqq L (\mathfrak{F}_n;\ x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n};\ y \mid x) \leqq \\ \leqq \max_{j=i_1,\ i_1+1, \ldots,\ i_n-n+1} \quad & L (\mathfrak{F}_n;\ x_j,\ x_{j+1}, \ldots, x_{j+n-1};\ y \mid x_0), \end{aligned} \quad (31)$$

punctul x_0 fiind astfel ales ca să avem $x_{i_n} < x_0 \leqq b$. În (31) semnul egalității are loc atunci și numai atunci cînd toate numerele (30) coincid.

Demonstrația teoremei se bazează pe lema 2 și lema 3, care constituie acel caz particular al teoremei 7 în care $1 = i_1 < i_2 < i_3 < \ldots < i_n = n + 1$. Vom proceda prin inducție completă asupra numărului $i_n - i_1$ de puncte ale mulțimii E_m situate între x_{i_1} și x_{i_n}. Avem $i_n - i_1 \geqq n - 1$. Dacă $i_n - i_1 = n - 1$, atunci punctele $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}$ sînt consecutive și proprietatea exprimată prin teorema 7 revine la a se considera semnul egalității în (31). Dacă $i_n - i_1 = n$, atunci între punctele x_{i_1} și x_{i_n} există un punct din E_m, care nu figurează printre cele n puncte

$$x_{i_1} < x_{i_2} < \ldots < x_{i_n}. \quad (32)$$

Fie acesta punctul x_{i_k+1}, situat între punctele x_{i_k} și $x_{i_{k+1}}$ din șirul (32). Să considerăm acum cele $n + 1$ puncte

$$x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}, x_{i_k+1}, x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n}. \quad (33)$$

Pe baza lemei 2 şi a lemei 3, avem pentru $x_{i_n} < x_0 \leqq b$

$$\begin{aligned} & L(\mathcal{F}_n;\, x_{i_2}, x_{i_3}, \ldots, x_{i_k}, x_{i_k+1}, x_{i_k+1}, \ldots, x_{i_n};\, y \mid x_0) < \\ & < L(\mathcal{F}_n;\, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}, x_{i_k+1}, x_{i_k+2}, \ldots, x_{i_n};\, y \mid x_0) < \\ & < L(\mathcal{F}_n;\, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}, x_{i_k+1}, x_{i_k+1}, \ldots, x_{i_{n-1}};\, y \mid x_0), \end{aligned} \tag{34}$$

dacă

$$L(\mathcal{F}_n;\, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}, x_{i_k+1}, x_{i_k+1}, \ldots, x_{i_{n-1}};\, y \mid x_{i_n}) > y_{i_n} \tag{35}$$

şi egalităţile contrare, dacă în (35) avem inegalitatea contrară. În (34), în locul ambelor inegalităţi, figurează semnul egalităţii, dacă în (35) în loc de inegalitate avem egalitate. Punctele (33) fiind consecutive, am verificat că, în cazul $i_n - i_1 = n$, teorema este adevărată, deoarece funcţiile $L(\mathcal{F}_n;\, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}, x_{i_k+1}, x_{i_k+1}, \ldots, x_{i_{n-1}};\, y \mid x)$ şi $L(\mathcal{F}_n;\, x_{i_2}, x_{i_3}, \ldots, x_{i_n};\, y \mid x)$ sînt singurele funcţii din $\mathcal{F}_n$ construite pe cîte n puncte *consecutive* din şirul (33), cu valorile corespunzătoare în şirul (27).

Să presupunem acum că proprietatea exprimată prin teoremă este adevărată pentru $i_n - i_1 \leqq \nu$, $\nu \geqq n$ şi să arătăm că atunci ea este adevărată şi pentru $i_n - i_1 = \nu + 1$. Fie $i_n - i_1 = \nu + 1$. Atunci există printre indicii punctelor (32) cel puţin unul, i_p, astfel ca $i_{p+1} - i_p > 1$. Să considerăm cele $n + 1$ puncte

$$x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_p}, x_{i_p+1}, x_{i_p+1}, \ldots, x_{i_n}. \tag{36}$$

Aplicînd punctelor (36) acelaşi raţionament ca mai sus şi înlocuind indicele k cu indicele p, avem

$$\begin{aligned} & \min_{j=1,2} L(\mathcal{F}_n;\, x_{i_j}, x_{i_j+1}, \ldots, x_{i_p}, x_{i_p+1}, x_{i_p+1}, \ldots, x_{i_{j+n-2}};\, y \mid x_0) \leqq \\ & \leqq L(\mathcal{F}_n;\, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_p}, x_{i_p+1}, \ldots, x_{i_n};\, y \mid x_0) \leqq \\ & \max_{j=1,2} L(\mathcal{F}_n;\, x_{i_j}, x_{i_j+1}, \ldots, x_{i_p}, x_{i_p+1}, x_{i_p+1}, \ldots, x_{i_{j+n-2}};\, y \mid x_0). \end{aligned} \tag{37}$$

Dar $i_n - i_2 \leqq \nu$, $i_{n-1} - i_1 \leqq \nu$. Rezultă deci că numărul $L(\mathcal{F}_n;\, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_p}, x_{i_p+1}, x_{i_p+1}, \ldots, x_{i_{n-1}};\, y \mid x_0)$ este cuprins între cel mai mic şi cel mai mare dintre numerele

$$L(\mathcal{F}_n;\, x_j;\, x_{j+1}, \ldots, x_{j+n-1};\, y \mid x_0)\ j = i_1, i_1 + 1, \ldots, i_{n-1} - n + 1,$$

iar numărul $L(\mathcal{F}_n;\, x_{i_2}, x_{i_3}, \ldots, x_{i_p} \cdot x_{i_p+1}, x_{i_p+1}, \ldots, x_{i_n};\, y \mid x_0)$ este cuprins între cel mai mic şi cel mai mare dintre numerele

$$L(\mathcal{F}_n;\, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+n-1};\, y \mid x_0),\ j = i_1, i_1 + 1, \ldots, i_n - n + 1.$$

Din (37) rezultă deci (31) şi astfel teorema 7 este demonstrată.

2. Vom da acum o aplicaţie a teoremei 7 la studiul diferenţelor divizate. Să considerăm mulţimea $\mathcal{P}_n$ a polinoamelor de grad cel mult egal cu $n - 1$. Ea este de tipul $I_n(-\infty, \infty)$. Să considerăm n puncte distincte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ şi n numere oarecare $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Se ştie că elementul $\varphi(x)$ al mulţimii $\mathcal{P}_n$ care satisface con-

diţiile $\varphi(x_i) = y_i$, $i = 1,2, \ldots, n$, este polinomul de interpolare al lui Lagrange pe care îl vom nota cu $L(\mathcal{P}_n;\, x_1, x_2, \ldots, x_n;\, y \mid x)$ sau, dacă $f(x)$ este o funcţie care pe punctele x_i ia respectiv valorile y_i, $i = 1,2, \ldots, n$, îl vom nota cu $L(\mathcal{P}_n;\, x_1, x_2, \ldots, x_n;\, f \mid x)$. Avem

$$L(\mathcal{P}_n;\, x_1, x_2, \ldots, x_n;\, f \mid x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, l_i^{(n)}(x), \tag{38}$$

unde

$$l_i^{(n)}(x) = \frac{l(x)}{(x - x_i)\, l'(x_i)},\ i = 1,2, \ldots, n,\ l(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i).$$

În (38) coeficientul lui x^{n-1} este diferenţa divizată $[x_1, x_2, \ldots, x_n; f]$. Avem

$$[x_1, x_2, \ldots, x_n; f] = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \ldots x_1^{n-2} & f(x_1) \\ 1 & x_2 & x_2^2 \ldots x_2^{n-2} & f(x_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \ldots x_n^{n-2} & f(x_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \ldots x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 \ldots x_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \ldots x_n^{n-1} \end{vmatrix}}.$$

Din proprietatea interpolatoare a mulţimii $\mathcal{P}_n$ rezultă că dacă $f(x) \in \mathcal{P}_n$, atunci $L(\mathcal{P}_n;\, x_1, x_2, \ldots, x_n;\, f \mid x)$ este chiar $f(x)$. De aici rezultă că pentru $p(x) = a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}$ diferenţa divizată $[x_1, x_2, \ldots, x_n;\, p] = a_0$, oricare ar fi sistemul de n puncte distincte x_i, $i = 1,2, \ldots, n$. Pe de altă parte, dacă considerăm mulţimea $\mathcal{P}_{n-1}$, $n \geqq 2$, şi construim pe punctele $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ polinomul lui Lagrange de gradul $n - 2$, $L(\mathcal{P}_{n-1};\, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1};\, f \mid x)$, se ştie că dacă $x_n \neq x_i$, $i = 1,2, \ldots, n - 1$, atunci

$$f(x_n) - L(\mathcal{P}_{n-1};\, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1};\, f \mid x_n) = [x_1, x_2, \ldots, x_n; f] \prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i). \tag{39}$$

Prin urmare, dacă $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, atunci semnul diferenţei divizate $[x_1, x_2, \ldots, x_n; f]$ coincide cu semnul diferenţei $f(x_n) - L(\mathcal{P}_{n-1};\, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1};\, f \mid x_n)$. De aici putem trage concluzia: dacă $P(x)$ este un polinom de gradul $n - 1$ care are coeficientul a_0 al lui x^{n-1} diferit de zero şi $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n$, atunci a_0 are semnul diferenţei $P(x_n) - L(\mathcal{P}_{n-1};\, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1};\, P \mid x_n)$.

Să considerăm punctele $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2), \ldots, M_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1})$, unde $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1}$. Spicul

$$S\left\{\mathcal{P}_n;\, \begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \\ y_1, y_2, \ldots, y_{n-1} \end{matrix}\right\} \tag{40}$$

conţine un polinom P_{n-2} de gradul $n-2$. Fie $x_n > x_{n-1}$. Polinoamele din spicul (40), care în punctul x_n iau valori mai mari decît $P_{n-2}(x_n)$, au coeficientul lui x^{n-1} pozitiv, iar cele care iau în x_n valori mai mici decît $P_{n-2}(x_n)$ au coeficientul lui x^{n-1} negativ.

Asupra spicului (40) mai putem face și o altă observație, pe care ne vom baza în cele ce urmează. Am mai observat la începutul lucrării că $\mathfrak{T}_n(\alpha)$, oricare ar fi numărul α, este o mulțime de tipul $I_{n-1}(-\infty, \infty)$. Rezultă că pentru α fixat, spicul (40) conține un element și unul singur din $\mathfrak{T}_n(\alpha)$, oricare ar fi punctele x_i, și numerele y_i, $i = 1,2,\dots,n-1$. Pe de altă parte, dacă $y \in (-\infty, \infty)$ și notăm cu P_y polinomul din spicul (40), care pe punctul x_n ia valoarea y, se observă că diferența divizată $[x_1, x_2,\dots,x_n; P_y]$ este o funcție continuă de y pe orice punct al intervalului $(-\infty, \infty)$. Această proprietate este bine cunoscută. Ea se poate deduce și din teorema 3 dacă se trage din ea concluzia că oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un număr $\eta > 0$ astfel ca să avem

$$| P_1(x) - P_2(x) | < \varepsilon \qquad \text{pentru orice } x \in [a, b], \tag{41}$$

dacă

$$\max_i \{ | P_1(x_i) - P_2(x_i) | \} < \eta$$

pentru n puncte distincte $x_1, x_2,\dots,x_n$ din $[a, b]$.

Aici $P_1(x)$, $P_2(x) \in \mathfrak{T}_n$. Or, dacă (41) are loc pentru $\varepsilon > 0$ suficient de mic, atunci coeficienții lui x^{n-1} din $P_1(x)$ și $P_2(x)$ diferă puțin unul de altul.

Din proprietatea de continuitate mai sus amintită a diferenței divizate $[x_1, x_2,\dots,x_n; P_y]$ și din faptul că pentru P_y, aparținînd spicului (40), diferența divizată $[x_1, x_2,\dots,x_n; P_y]$ ia o singură dată orice valoare α, rezultă că $[x_1, x_2,\dots,x_n; P_y]$ este o funcție monotonă de y pe intervalul $(-\infty, \infty)$.

Să considerăm acum punctele

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n \tag{42}$$

și o funcție $f(x)$, care pe aceste puncte ia respectiv valorile

$$y_1, y_2,\dots,y_n. \tag{43}$$

Să aplicăm teorema 7 mulțimii $\mathfrak{T}_{n-1}$ pe punctele (42), pentru numerele (43). Din relațiile (31), în cazul $m = n$ și $x_0 = x_n$, rezultă, pe baza observațiilor de mai sus, inegalitățile

$$\min_{j = i_1, i_1+1,\dots,i_n-n+1} [x_j, x_{j+1},\dots,x_{j+n-1}; f] \leqq$$

$$\leqq [x_{i_1}, x_{i_2},\dots,x_{i_n}; f] \leqq \max_{j = i_1, i_1+1,\dots,i_n-n+1} [x_j, x_{j+1},\dots,x_{j+n-1}; f],$$

unde $1 \leqq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leqq m$. Aplicînd un raționament analog cu cel făcut la demonstrația teoremei 7, rezultă o teoremă de medie bine cunoscută pentru diferențele divizate [20]: *diferența divizată $[x_{i_1}, x_{i_2},\dots,x_{i_n}; f]$, pe n puncte oarecare din șirul (26) este o medie între diferențele divizate pe cîte n puncte consecutive din acest șir.*

Din teorema 7 mai rezultă și alte teoreme de medie, ca de exemplu pentru diferențele divizate generalizate, relative la un sistem Cebîșev de funcții. Deoarece în acest caz — din cauza liniarității — analogia cu proprietățile polinoamelor este foarte mare, nu mai insistăm asupra lui.

3. Un exemplu important de mulțime interpolatoare ni-l oferă o mulțime de funcții care este generată de o funcție $F(x; \alpha_1, \alpha_2,\dots,\alpha_n)$, de variabila $x \in [a, b]$ și de n parametri reali $\alpha_1, \alpha_2,\dots,\alpha_n$, care satisface următoarele condiții:

1° *$F(x; \alpha_1, \alpha_2,\dots,\alpha_n)$ este o funcție continuă în raport cu ansamblul variabilelor sale, pentru $x \in [a, b]$* și $-\infty < \alpha_i < \infty$, $i = 1, 2,\dots, n$.

2° *oricare ar fi punctele distincte* (1) *din* $[a, b]$ *și oricare ar fi numerele* (2), *sistemul de ecuații*

$$F(x_i; \alpha_1, \alpha_2,\dots,\alpha_n) = y_i, \quad i = 1, 2,\dots,n, \tag{44}$$

cu necunoscutele $\alpha_1, \alpha_2,\dots,\alpha_n$, are o soluție și una singură.

Mulțimea F_n de funcții care se obține dînd parametrilor α_i toate valorile posibile, este o mulțime de tipul $I_n[a, b]$. Trebuie să observăm că parametrii α_i pot fi supuși și la anumite condiții restrictive, ca spre exemplu $\underset{\sim}{\beta}_i \leqq \alpha_i \leqq \widetilde{\beta}_i$, $i = 1,2,\dots,n$, $\underset{\sim}{\beta}_i$ și $\widetilde{\beta}_i$ fiind numere date. În acest caz nu mai rămîn valabile în general toate proprietățile expuse în paragraful 1 al lucrării de față. Ne vom opri asupra cîtorva proprietăți interesante ale mulțimii F_n de mai sus.

T e o r e m a 8. *Dacă $n = 1$ și condițiile 1°, 2° sînt satisfăcute, atunci $F(x; \alpha_1)$ este o funcție monotonă în raport cu α_1 pentru orice $x \in [a, b]$.*

Pentru demonstrație e suficient să observăm că din condiția 2° rezultă că, pentru fiecare valoare a parametrului α_1, corespunde o funcție și una singură din F_1. Cum două funcții distincte din F_1 nu pot să coincidă în nici un punct din $[a, b]$, rezultă că, oricare ar fi $x_0 \in [a, b]$, $F(x_0; \alpha_1)$ este o funcție univalentă în raport cu parametrul α_1. Proprietatea de monotonie din enunțul teoremei rezultă deci din condiția de continuitate impusă prin 1°.

T e o r e m a 8′. *Dacă $n = 1$ și condițiile 1°, 2° sînt îndeplinite, atunci pentru orice x_0 fixat în $[a, b]$, α_1 este o funcție monotonă în raport cu y.*

Fie x_0 un punct arbitrar fixat în $[a, b]$. Să considerăm funcțiile $L(F_1; x_0; y | x)$, unde y descrie un interval J. Atunci α_1 este o anumită funcție $\alpha_1(y)$. Este evident că $\alpha_1(y)$ ia o singură dată fiecare valoare a sa pentru $y \in J$. Pe de altă parte, $\alpha_1(y)$ este o funcție continuă pe intervalul J, fiind inversa unei funcții continue. Concluzia din teorema 8′ rezultă deci.

Să presupunem acum că sînt satisfăcute condițiile 1° și 2° și că printre parametrii $\alpha_1, \alpha_2,\dots,\alpha_n$ există unul α_l, care are proprietatea că, pentru orice valoare $\widetilde{\alpha}_l$ a lui, mulțimea de funcții $F(x; \alpha_1, \alpha_2,\dots, \alpha_{l-1}, \widetilde{\alpha}_l, \alpha_{l+1},\dots,\alpha_n)$, unde $\alpha_1, \alpha_2,\dots, \alpha_{l-1}, \alpha_{l+1},\dots, \alpha_n$ sînt variabili, este de tipul $I_{n-1}[a, b]$. În această ipoteză, parametrul α_l are cîteva proprietăți asupra cărora ne vom opri. Din condiția 2° rezultă că dacă se dau punctele distincte $x_1, x_2, \dots, x_n$ și numerele $y_1, y_2,\dots,y_n$, atunci valoarea lui α_l este bine determinată de relațiile de egalitate (44). Din acest motiv, α_l este o anumită funcție $\alpha_l \left\{ \begin{matrix} x_1, x_2,\dots, x_n \\ y_1, y_2,\dots, y_n \end{matrix} \right\}$ de variabilele x_i și y_i, $i = 1, 2,\dots, n$. Să considerăm spicul $S\left\{ F_n; \begin{matrix} x_1, x_2,\dots, x_{n-1} \\ y_1, y_2,\dots, y_{n-1} \end{matrix} \right\}$, unde presupunem $x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1}$. În baza restricției impuse mai sus asupra parametrului α_l, au loc următoarele proprietăți:

L e m a 4'. *Oricare ar fi numărul* $\tilde{\alpha}_l$, *spicul* $S\left\{F_n; \begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \\ y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}\end{matrix}\right\}$ *conţine o singură funcţie din* F_n *pentru care* $\alpha_l = \tilde{\alpha}_l$.

L e m a 5. *Dacă* $x_{n-1} < x_n \leq b$ *şi* $y \in (-\infty, \infty)$, *atunci* $\alpha_l \left\{\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ y_1, y_2, \ldots, y\end{matrix}\right\}$ *este o funcţie monotonă în raport cu y.*

Afirmaţia din lema 4' rezultă imediat. Într-adevăr, dacă punem $\alpha_l = \tilde{\alpha}_l$, atunci, pentru orice sistem de $n-1$ puncte distincte $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ şi pentru orice numere $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, există o funcţie şi una singură, astfel ca $F(x_i; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{l-1}, \tilde{\alpha}_l, \alpha_{l+1}, \ldots, \alpha_n) = y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Pentru a demonstra că lema 5 este adevărată, observăm, pe baza lemei 4', că α_l este o *funcţie univalentă în raport cu y*. Pe de altă parte, punctele x_i, $i=1,2,\ldots,n$, fiind fixate, dacă şirul de numere $\{y^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ converge către y_0, atunci, pe baza teoremei 3, şirul de funcţii $\{L(F_n; x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y^{(k)} | x)\}_{k=1}^{\infty}$ converge uniform către funcţia $L(F_n; x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_0 | x)$. Dar din condiţiile 1° şi 2° rezultă că, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un număr $\eta > 0$, astfel că dacă

$$|F(x; \alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_n') - F(x; \alpha_1'', \alpha_2'', \ldots, \alpha_n'')| < \eta,$$

oricare ar fi $x \in [a, b]$, atunci au loc şi inegalităţile

$$|\alpha_k' - \alpha_k''| < \varepsilon, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Prin urmare α_l este o *funcţie continuă de y*. În concluzie, afirmaţia din lemă este adevărată.

În cazul cînd caracterul monotoniei parametrului α_l în raport cu y este acelaşi, oricare ar fi sistemul de puncte $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, atunci are loc

T e o r e m a 9. *Dacă se dau punctele* (26) *şi numerele* (27), *atunci*

$$\min_{j=i_1, i_1+1, \ldots, i_n-n+1} \alpha_l \left\{\begin{matrix} x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+n-1} \\ y_j, y_{j+1}, \ldots, y_{j+n-1}\end{matrix}\right\} \leq$$

$$\leq \alpha_l \left\{\begin{matrix} x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n} \\ y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_n}\end{matrix}\right\} \leq$$

$$\leq \max_{j=i_1, i_1+1, \ldots, i_n-n+1} \alpha_l \left\{\begin{matrix} x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+n-1} \\ y_j, y_{j+1}, \ldots, y_{j+n-1}\end{matrix}\right\},$$

$x_{i_1} < x_{i_2} < \ldots < x_{i_n}$ *fiind n puncte oarecare din şirul* (26).

Proprietatea din enunţul teoremei 9 este o consecinţă, după cum se observă uşor, a teoremei 7. Această proprietate este în acelaşi timp şi o extindere a teoremei de medie pentru diferenţe divizate la mulţimi interpolatoare neliniare.

4. Fie $\mathcal{F}_n$ o mulţime de tipul $I_n[a, b]$. Să considerăm punctele (5) şi o funcţie $f(x)$ definită pe aceste puncte. Să introducem notaţia

$$\begin{aligned} D[\mathcal{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}, x_i; f] = \\ = f(x_i) - L(\mathcal{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}; f | x_i), \\ i = 1, 2, \ldots, n+1. \end{aligned} \tag{45}$$

Pentru fiecare valoare a indicelui i, $D[\mathcal{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}, x_i; f]$ este o funcţională definită pe mulţimea funcţiilor definite pe punctele (5). Este esenţială ipoteza făcută asupra ordonării punctelor x_i, adică ipoteza că $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$.

T e o r e m a 10. *Dacă punctele* (5) *sînt fixate şi şirul de funcţii* $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *definite pe intervalul* $[a, b]$ *converge către funcţia limită* $f(x)$, $x \in [a, b]$, *atunci, pentru fiecare valoare a indicelui i, avem*

$$\begin{aligned} \lim_{i\to\infty} D[\mathcal{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}, x_i; f_k] = \\ = D[\mathcal{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}, x_i; f]. \end{aligned} \tag{46}$$

Demonstraţia acestei teoreme rezultă imediat pe baza teoremei 3. Într-adevăr, în ipotezele din enunţul teoremei 10, şirul de funcţii $\{L(\mathcal{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}; f_k | x)\}_{k=1}^{\infty}$ converge *uniform* pe intervalul $[a, b]$ către funcţia $L(\mathcal{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}; f | x)$. Prin urmare şirul de numere $\{L(\mathcal{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}; f_k | x_i)\}_{k=1}^{\infty}$ este de asemenea convergent şi are limita $L(\mathcal{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}; f | x_i)$. Relaţia (46) rezultă deci, pentru $i = 1, 2, \ldots, n+1$, pentru că $\lim_{k\to\infty} f_k(x_i) = f(x_i)$.

Dacă fixăm funcţia $f(x)$ şi facem să varieze punctele $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$ astfel ca ordinea lor să rămînă aceeaşi, atunci pentru fiecare valoare a indicelui i, $D[\mathcal{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}, x_i; f]$ devine o funcţie $\Phi_i(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}, x_i)$ de variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}, x_i$. Are loc

T e o r e m a 11. *Dacă* $f(x)$ *este o funcţie continuă pe intervalul* $[a, b]$, *atunci funcţiile* $\Phi_i(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}, x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, *sînt continue în fiecare punct al domeniului lor de definiţie.*

Demonstraţia teoremei 11 rezultă pe baza teoremei 3. Ea fiind imediată nu insistăm asupra ei.

T e o r e m a 12. *Dacă* $f(x)$ *este continuă pe intervalul* $[a, b]$ *şi dacă pentru două sisteme distincte de puncte* $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1}$ *şi* $x_1' < x_2' < \ldots < x_n' < x_{n+1}'$ *din* $[a, b]$, *avem*

$$D[\mathcal{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}; f] = A,$$

$$D[\mathcal{F}_n; x_1', x_2', \ldots, x_n', x_{n+1}'; f] = B, \quad A \neq B,$$

atunci, oricare ar fi numărul C cuprins între A şi B ($A < C < B$ *sau* $B < C < A$), *există în cel mai mic interval, care conţine punctele* x_i *şi* x_i', $i = 1, 2, \ldots, n+1$, *un sistem de* $n+1$ *puncte* $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{n+1}$, *astfel ca să avem*

$$D[\mathcal{F}_n; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \xi_{n+1}; f] = C.$$

Pentru a demonstra teorema 12, să notăm*)

$$t_i(\lambda) = \lambda x_i + (1 - \lambda) x_i', \quad i = 1, 2, \ldots, n+1,$$

λ fiind un număr real, $0 \leq \lambda \leq 1$. Conform teoremei 10, funcţia $\Psi(\lambda) = D[\mathcal{F}_n; t_1(\lambda), t_2(\lambda), \ldots, t_n(\lambda), t_{n+1}(\lambda); f]$ este o funcţie continuă de variabila λ în intervalul

*) Această demonstraţie este analoagă celei care se dă în [20] pentru teorema de medie a diferenţelor divizate.

[0,1]. Avem $\Psi(1) = A$ şi $\Psi(0) = B$. Există deci un număr $\lambda_0 \in (0,1)$, astfel ca $D[\mathcal{F}_n; t_1(\lambda_0), t_2(\lambda_0), \ldots, t_n(\lambda_0), t_{n+1}(\lambda_0); f] = C$. Punctele $\xi_i = t_i(\lambda_0)$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, sînt situate în intervalul indicat în teorema 12 şi $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_n < \xi_{n+1}$.

T e o r e m a 12'. *Dacă $f(x)$ este o funcţie continuă în intervalul $[a, b]$ şi pentru două sisteme distincte de cîte $n+1$ puncte, $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1}$ şi $x_1' < x_2' < \ldots < x_n' < x_{n+1}'$, avem $D[\mathcal{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}; f] > 0$ şi $D[\mathcal{F}_n; x_1', x_2', \ldots, x_n', x_{n+1}'; f] < 0$, atunci există în cel mai mic interval care conţine punctele x_i, x_i', $i = 1, 2, \ldots, n+1$, un sistem de $n+1$ puncte astfel ca*

$$D[\mathcal{F}_n; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \xi_{n+1}; f] = 0.$$

Această teoremă este un caz particular al teoremei 12. Enunţul ei l-am dat numai pentru că sub această formă intervine în paragraful următor.

T e o r e m a 13. *Dacă $f(x)$ este o funcţie continuă pe intervalul $[a, b]$ şi dacă pentru un sistem de $n+1$ puncte $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1}$ are loc relaţia $D[\mathcal{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}; f] = 0$, atunci există un punct $\xi \in (x_1, x_{n+1})$, care are proprietatea că în orice vecinătate a sa există $n+1$ puncte $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{n+1}$, astfel ca $D[\mathcal{F}_n; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1}; f] = 0$.*

Demonstraţia teoremei 13 se bazează pe următoarele leme:

L e m a 6. *Dacă $f(x)$ este o funcţie continuă pe intervalul $[a, b]$ şi sînt îndeplinite condiţiile:*

1° *$\varphi(x)$ este o funcţie din $\mathcal{F}_n$, $n \geq 2$, astfel că diferenţa $f(x) - \varphi(x)$ se anulează pe punctele $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$ din $[a, b]$;*

2° *în intervalele (x_i, x_{i+1}), $i = 1, 2, \ldots, n$ diferenţa $f(x) - \varphi(x)$ nu se anulează;*

3° *$f(x) - \varphi(x)$ nu schimbă semnul în k dintre punctele x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, $1 \leq k \leq n-1$,*

atunci există o funcţie $\varphi_1(x) \in \mathcal{F}_n$, astfel ca diferenţa $f(x) - \varphi_1(x)$ să se anuleze pe $n+k+1$ puncte din intervalul $[x_1, x_{n+1})$ schimbînd semnul în $n+k$ dintre aceste puncte, situate în (x_1, x_{n+1}).

Pentru demonstraţie să presupunem satisfăcute ipotezele din enunţ şi să presupunem $k = n-1$. Să considerăm mai întîi cazul $n=2$. Fie, pentru fixarea ideilor, $\varphi(x) - f(x) \geq 0$, $x \in (x_1, x_3)$. Atunci, pentru $\varepsilon >$ o suficient de mic, diferenţa $L(\mathcal{F}_2; x_1, x_2; f(x_1), f(x_2) - \varepsilon \mid x) - f(x)$ se anulează pe cel puţin 3 puncte din (x_1, x_3), schimbînd semnul în fiecare dintre ele. În mod analog se tratează cazul $\varphi(x) - f(x) \leq 0$, $x \in (x_1, x_3)$.

Fie acum $n > 2$ şi de asemenea $k = n-1$. Fie $\varphi(x) - f(x) \geq 0$, $x \in (x_1, x_{n+1})$. Spicul $S\left\{\mathcal{F}_n; \begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \\ f(x_1) f(x_2), \ldots, f(x_{n-1}) \end{matrix}\right\}$ este de tipul $I_1(x_{n-1}, x_{n+1}]$. Pentru $\varepsilon > 0$ suficient de mic, funcţia $\varphi_1(x)$ din acest spic, care în x_n ia valoarea $f(x_n) - \varepsilon$, coincide cu $f(x)$ pe cel puţin $n+k+1$ puncte, diferenţa $f(x) - \varphi_1(x)$ schimbînd semnul pe $n+k$ dintre ele. La fel se tratează cazul $\varphi(x) - f(x) \leq 0$, $x \in (x_1\ x_{n+1})$.

Dacă $k = n - j$, $j = 2, 3, \ldots, n-1$, fie $x_{i_1} < x_{i_2} < \ldots < x_{i_{n-1-k}}$ acelea dintre punctele x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, pe care $f(x) - \varphi(x)$ se anulează schimbînd semnul, iar $x_1^* < x_2^* < \ldots < x_k^*$, acelea pe care $f(x) - \varphi(x)$ se anulează fără să

schimbe semnul. Fie x_k^* al p-lea punct dintre punctele x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Considerăm spicul

$$S\left\{\mathcal{F}_n; \begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, x_{p+1}, \ldots, x_n \\ f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{p-1}), f(x_{p+1}), \ldots, f(x_n) \end{matrix}\right\}.$$

Să presupunem $\varphi(x) - f(x) \geq 0$ în vecinătatea lui x_p. Funcţia $\varphi_1(x)$ din spic, care pe x_p ia valoarea $f(x_p) - \varepsilon$, pentru $\varepsilon > 0$ suficient de mic, coincide cu $f(x)$ pe $n+k+1$ puncte din $[x_1, x_{n+1})$, diferenţa $f(x) - \varphi_1(x)$ schimbînd semnul pe $n+k$ dintre ele. La fel se tratează cazul $\varphi(x) - f(x) \leq 0$ în vecinătatea lui x_p.

Concluzia din enunţul lemei 6 are deci loc. Raţionamentul făcut, după cum se observă uşor, pune în evidenţă faptul că, în locul fiecăruia dintre punctele $x_i \in (x_1, x_{n+1})$ în care $\varphi(x) - f(x)$ se anulează fără să schimbe semnul, prin construcţia funcţiei $\varphi_1(x)$, apar două puncte în care $\varphi_1(x) - f(x)$ se anulează schimbînd semnul. Deci în locul celor k puncte din (x_1, x_{n+1}) apar în general cel puţin $2k$ puncte, în care $\varphi_1(x) - f(x)$ se anulează schimbînd semnul.

L e m a 7. *Dacă $f(x)$ este o funcţie continuă pe intervalul $[a, b]$ şi pentru un sistem de $n+1$ puncte $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$, avem $D[\mathcal{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}; f] = 0$, atunci există în intervalul (x_1, x_{n+1}) $n+1$ puncte $x_1', x_2', \ldots, x_{n+1}'$, astfel ca $D[\mathcal{F}_n; x_1', x_2', \ldots, x_n', x_{n+1}'; f] = 0$.*

Pentru demonstraţie vom distinge două cazuri:

α) diferenţa $f(x) - L(\mathcal{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_n; f \mid x)$ nu se anulează în intervalele (x_i, x_{i+1}), $i = 1, 2, \ldots, n$.

β) diferenţa $f(x) - L(\mathcal{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_n; f \mid x)$ se anulează în m puncte din intervalul $(x_1\ x_{n+1})$, diferite de punctele x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, $m \geq 1$.

În cazul α) avem $\varphi(x) = L(\mathcal{F}_n; x_1, x_2, \ldots x_n; f \mid x)$, $\varphi(x_i) = f(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$. Dacă $\varphi(x) - f(x)$ *schimbă semnul pe punctele* x_i, $i = 2, 3, \ldots, n$, atunci considerăm funcţia $\varphi_1(x) \in \mathcal{F}_n$, astfel ca $\varphi_1(x_i') = f(x)$, unde $x_i' = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Numerele $f(x_i') - \varphi(x_i')$, $i = 1, 2, \ldots, n$, sînt alternativ pozitive şi negative. De aici rezultă că diferenţa $\varphi(x) - \varphi_1(x)$ se anulează pe cel puţin cîte un punct din fiecare interval (x_i', x_{i+1}'), $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Avem acum de distins două subcazuri:

α') $\varphi_1(x) - f(x)$ se anulează fără să schimbe semnul cel puţin pe unul din punctele x_i';

α'') $\varphi_1(x) - f(x)$ schimbă semnul pe fiecare din punctele x_i'.

În cazul α'), bazîndu-ne pe un raţionament analog cu cel făcut în demonstraţia lemei 6, putem construi o funcţie din $\mathcal{F}_n$ care coincide cu $f(x)$ pe cel puţin $n+1$ puncte din intervalul (x_1, x_{n+1}). În cazul α''), dacă $\varphi_1(x) - f(x)$ nu schimbă semnul în nici unul din intervalele (x_i', x_{i+1}'), $i = 1, 2, \ldots, n-1$, avem

$$\operatorname{sgn}\{\varphi(x) - f(x)\} = \operatorname{sgn}\{\varphi_1(x) - f(x)\}$$

fie în vecinătatea stîngă a fiecărui punct x_i', $i = 1, 2, \ldots, n$, fie în vecinătatea dreaptă a fiecărui punct x_i', $i = 1, 2, \ldots, n$. Cum funcţiile $\varphi_1(x)$ şi $\varphi(x)$ nu pot coincide în mai mult de $n-1$ puncte, $\varphi_1(x) - f(x)$ trebuie să se anuleze pe un punct diferit de punctele x'_i, $i = 1,2,\ldots, n$, situat în intervalul (x_1, x_{n+1}). Prin urmare $\varphi_1(x) - f(x)$ se anulează pe cel puțin $n+1$ puncte din intervalul (x_1, x_{n+1}).

Dacă $\varphi_1(x) - f(x)$ se anulează în vreunul din intervalele (x'_i, x'_{i+1}), $i = 1,2, \ldots, n-1$, atunci de asemenea diferența $\varphi_1(x) - f(x)$ se anulează pe $n+1$ puncte din intervalul (x_1, x_{n+1}).

Dacă diferența $\varphi(x) - f(x)$ *nu schimbă semnul* în vreunul din punctele x_i, $i = 2,3,\ldots, n$, atunci aplicăm lema 6 și revenim la cazurile α'), α'') de mai sus.

Să trecem acum la cazul β). Să presupunem $m = 1$. Fie x^* un punct situat în (x_j, x_{j+1}), astfel ca $f(x^*) - L(\mathcal{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_n; f \mid x^*) = 0$. Atunci aplicăm raționamentul de la cazul α) fie punctelor $x_1, x_2, \ldots, x_j, x^*, x_{j+1}, \ldots, x_n$, fie punctelor $x_2, x_3, \ldots, x_j, x^*, x_{j+1}, \ldots, x_{n+1}$. Dacă $m > 1$, atunci existența punctelor $x'_1 < x'_2 < \ldots < x'_{n+1}$ din enunțul lemei 7 este evidentă.

În fiecare din cazurile considerate, concluzia din lema 7 are deci loc.

L e m a 8. *Fie $f(x)$ o funcție continuă pe intervalul $[a, b]$ și fie $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$ $n+1$ puncte din $[a, b]$, astfel ca $D[\mathcal{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}; f] = 0$, $n \geqq 3$. Fie $[\alpha, \beta] \subseteq [x_1, x_{n+1}]$* și *$[\alpha_1, \beta_1], [\alpha_2, \beta_2], \ldots, [\alpha_{n-2}, \beta_{n-2}]$, astfel ca* $\alpha < \alpha_1$, $\beta_k < \alpha_{k+1}$, $k = 1,2, \ldots, n-1$ și $\beta_{n-2} < \beta$. *Există $n+1$* puncte $x'_1 < x'_2 < \ldots < x'_{n+1}$ în $[x_1, x_{n+1}]$, *astfel ca $D[\mathcal{F}_n; x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n+1}; f] = 0$* și *ca unul dintre punctele x'_i să coincidă cu x_1 sau cu x_{n+1}, iar $n-2$ dintre punctele x'_i să fie repartizate cîte unul în fiecare din intervalele (α_i, β_i), $i = 1,2 \ldots, n-2$. În ipoteză se presupune că diferența $f(x) - L(\mathcal{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_n; f \mid x)$ schimbă semnul în punctele x_i, $i = 2,3, \ldots, n$.*

Pentru demonstrație fie $n = 3$. Fie $[\alpha_1, \beta_1]$ un interval situat în interiorul intervalului $[x_1, x_{n+1}]$, $x_1 < \alpha_1$, $\beta_1 < x_{n+1}$. Fie pentru precizare $f(x) - L(\mathcal{F}_n; x_1, x_2, x_3; f \mid x) > 0$ pentru $x \in (x_2, x_3)$. Dacă $x_2 \in (\alpha_1, \beta_1)$ sau $x_3 \in (\alpha_1, \beta_1)$, atunci nu avem nimic de demonstrat. Să presupunem deci că sîntem într-unul din cazurile $x_1 < \alpha_1, \beta_1 < x_2$; $x_2 < \alpha_1, \beta_1 < x_3$; $x_3 < \alpha_1$, $\beta_1 < x_4$. Să ne fixăm de exemplu asupra primului caz. Considerăm punctele $x'_1 \in (\alpha_1, \beta_1)$, $x'_2 \in (x_2, x_3)$ și $x'_3 = x_4$; funcția $\varphi(x) = L(\mathcal{F}_3; x'_1, x'_2, x'_3; f \mid x)$ coincide cu $f(x)$ într-un punct diferit de punctele x'_i, $i = 1, 2, 3$, sau într-unul din aceste puncte diferența $f(x) - \varphi(x)$ se anulează fără să schimbe semnul. Pe baza lemei 6, cazul al doilea îl putem elimina. În primul caz, dacă notăm cu x'_4 punctul diferit de x'_i, $i = 1, 2, 3$, în care $f(x) - \varphi(x)$ se anulează, avem $D[\mathcal{F}_3; x'_1, x'_2, x'_3, x'_4; f] = 0$, indiferent de ordinea punctelor. Pentru celelalte cazuri de așezare a intervalului (α_1, β_1), alegerea funcției interpolatoare, care satisface condițiilor din concluzia lemei, e clară.

Dacă $n > 3$, mulțimea funcțiilor din $\mathcal{F}_n$, care coincid cu $f(x)$ pe $n-3$ dintre punctele x_i, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, este interpolatoare de ordinul 3 pe un anumit interval conținut în $[x_1, x_{n+1}]$, care depinde de alegerea celor $n-3$ puncte și care le conține pe celelalte 4. Pentru fiecare mod de alegere a acestor $n-3$ puncte, se aplică raționamentul de la cazul $n = 3$. Rezultă că lema 8 este adevărată.

Trecem acum la demonstrația teoremei 13. Să presupunem că sînt satisfăcute ipotezele din enunț. Putem întotdeauna presupune că punctele $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$, pe care $D[\mathcal{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}; f] = 0$, sînt consecutive *). În caz

*) Adică în intervalele (x_i, x_{i+1}), $i = 1,2, \ldots, n$, diferența $f(x) - L(\mathcal{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_n; f \mid x)$ nu se anulează.

contrar, numărul intervalelor contigue mulțimii *închise*, aparținînd intervalului $[x_1, x_{n+1}]$ și pe care diferența dintre $f(x)$ și o funcție din $\mathcal{F}_n$ se anulează, ar fi mai mic decît n. În acest caz, $f(x)$ ar coincide cu o funcție din $\mathcal{F}_n$ pe un interval întreg și deci existența punctului ξ din teoremă e evidentă. Excludem deci acest caz. Atunci pe baza lemelor 6 și 7 putem pune în evidență un șir infinit de intervale $[x_1, x_{n+1}]$, $[x'_1, x'_{n+1}], \ldots, [x_1^{(k)}, x_{n+1}^{(k)}], \ldots$, astfel ca

1° $x_1 < x'_1 < \ldots < x_1^{(k)} < \ldots$

$x_{n+1} > x'_{n+1} > \ldots > x_{n+1}^{(k)} > \ldots;$

2° în fiecare din intervalele $[x_1^{(k)}, x_{n+1}^{(k)}]$ există $n-1$ puncte $x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}$, astfel ca $D[\mathcal{F}_n; x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}, x_{n+1}^{(k)}; f] = 0$;

3° $\lim\limits_{k\to\infty} (x_{n+1}^{(k)} - x_1^{(k)}) = 0.$

Proprietățile 1° și 2° rezultă din lema 7. Proprietatea 3° trebuie dovedită. Trebuie să arătăm că marginea inferioară exactă a mulțimii lungimilor intervalelor $[x_1^{(k)}, x_{n+1}^{(k)}]$, care se obțin aplicînd în toate modurile posibile construcția indicată în lema 7, este zero. Dacă n-ar fi așa, atunci oricare ar fi șirul de intervale construit, am avea $\lim\limits_{k\to\infty} x_1^{(k)} \neq \lim\limits_{k\to\infty} x_{n+1}^{(k)}$. Fie $\lim\limits_{k\to\infty} x_1^{(k)} = \alpha$ și $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n+1}^{(k)} = \beta$. Putem presupune că $\beta - \alpha$ este marginea inferioară exactă a lungimii tuturor intervalelor construite după procedeul indicat mai sus. Să presupunem deci că $\beta - \alpha \neq 0$. Pentru fiecare k are loc proprietatea 2°, deci pentru fiecare k există o funcție din $\mathcal{F}_n$, care coincide cu $f(x)$ pe $n+1$ puncte din $[x_1^{(k)}, x_{n+1}^{(k)}]$. Din mulțimea acestor funcții putem extrage un șir de funcții $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, $\varphi_k(x_i^{(k)}) = f(x_i^{(k)})$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, $k = 1, 2, \ldots$, care converge uniform pe $[a, b]$ către o funcție $\varphi(x)$ din $\mathcal{F}_n$. Putem alege punctele $x_i^{(k)}$ astfel ca $\lim\limits_{k\to\infty} x_1^{(k)} = \alpha$ și $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n+1}^{(k)} = \beta$ și șirurile $\{x_i^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ $i = 2, 3, \ldots, n$, să fie convergente (pe baza teoremei 3). Pe baza lemei 8, șirul $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ se poate construi în așa fel, ca cel puțin n dintre limitele șirurilor $\{x_i^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, să fie distincte. În cazul $n = 2$ acest lucru e evident. Funcția limită $\varphi(x)$ coincide cu $f(x)$ pe $n+1$ puncte din $[\alpha, \beta]$, printre care cel mult două pot fi confundate. Deci pe baza lemei 6 *) putem găsi $n+1$ puncte distincte în $[\alpha, \beta]$, pe care o funcție din $\mathcal{F}_n$ coincide cu $f(x)$. Aceasta contrazice definiția intervalului $[\alpha, \beta]$. Trebuie deci să avem $\alpha = \beta$.

5. Dăm cîteva aplicații ale teoremelor expuse în acest paragraf.

Teoremele de medie expuse generalizează o seamă de teoreme clasice bine cunoscute și servesc totodată la stabilirea de noi teoreme. Să ilustrăm prin cîteva exemple cele afirmate. Să considerăm mulțimea $\mathcal{T}_{n+1}$. În formula (39) factorul $l(x_{n+1})$ este pozitiv dacă $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$.

*) În lema 6 punctele în care $\varphi(x) - f(x)$ se anulează fără să schimbe semnul sînt totdeauna în interiorul intervalului $[x_1, x_{n+1}]$. Dacă x_1 sau x_{n+1} este un asemenea punct, proprietatea din lemă se extinde cu ușurință.

Din enunțul teoremei 13 rezultă următoarea propoziție valabilă pentru mulțimea $\mathfrak{P}_{n+1}$:

Dacă $f(x)$ *este o funcție continuă pe intervalul* J *și pentru* $n+2$ *puncte* $x_1^* < x_2^* < \ldots < x_{n+2}^*$ din J, avem $[x_1^*, x_2^*, \ldots, x_{n+2}^*; f] = 0$, *atunci există un punct* $\xi^* \in (x_1^*, x_{n+1}^*)$, *astfel ca în orice vecinătate a sa să se găsească* $n+2$ *puncte* $\xi_1^* < \xi_2^* < \ldots < \xi_{n+2}^*$, *pentru care* $[\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots, \xi_{n+2}^*; f] = 0$ [19].

Diferența divizată $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f]$ reprezintă coeficientul lui x^n în polinomul de interpolare (38). Să considerăm mulțimea $\mathfrak{P}_{n+1}(A)$, $A \neq 0$. Ea este de tipul $I_n(-\infty, \infty)$. Dacă există în mulțimea $\mathfrak{P}_{n+1}(A)$ un polinom care pe punctele $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ ia respectiv valorile $f(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, atunci pe aceste puncte avem $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] = A$. În acest caz, din teorema 7 rezultă următoarea propoziție valabilă pentru mulțimea $\mathfrak{P}_{n+1}(A)$:

Dacă $f(x)$ *este continuă în intervalul* J *și pentru punctele* $x_1^* < x_2^* < \ldots < x_{n+1}^*$ *din acest interval* $[x_1^*, x_2^*, \ldots, x_{n+1}^*; f] = A$, *atunci există un punct* $\xi^* \in (x_1^*, x_{n+1}^*)$, *astfel ca în orice vecinătate a sa să se găsească* $n+1$ *puncte* $\xi_1^* < \xi_2^* < \ldots < \xi_{n+1}^*$, *pentru care* $[\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots, \xi_{n+1}^*; f] = A$ [19].

Dacă $n = 1$ și $f(x)$ este și derivabilă în intervalul (x_1^*, x_2^*), se obține formula creșterilor finite. În acest caz $A = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Se observă imediat că dacă în loc de mulțimea $\mathfrak{P}_{n+1}$ considerăm învelitoarea liniară a unui sistem Cebîșev-Markov, format din funcțiile $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{n+1}(x)$, atunci regăsim teoremele de medie pentru diferența divizată generalizată corespunzătoare (a se vedea T. P o p o v i c i u [20], unde este dată această diferență divizată).

Ca o completare, să observăm că în cazul mulțimii $\mathfrak{P}_{n+1}$, dacă fixăm ultimul coeficient al polinoamelor de forma $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$, adică considerăm mulțimea polinoamelor $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + A$, unde a_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, sînt variabili și A este fixat, obținem o mulțime interpolatoare de ordinul n pe orice interval *care nu conține originea.* În acest caz, din teorema 7 rezultă, în cazul $n = 1$, analogul discret al teoremei de medie dată de D. P o m p e i u [17]*) și, evident, în ipoteza derivabilității, însăși teorema lui D. Pompeiu. Cazul $n > 1$ ne dă extinderea acestei teoreme.

Tot în enunțul teoremei 7 sînt conținute și teoremele de medie valabile pentru ceilalți coeficienți ai polinomului de interpolare al lui Lagrange.

6. T e o r e m a 14. *Dacă* $f(x)$ *este o funcție continuă pe intervalul* $[a, b]$ *și* n*- valentă față de mulțimea* $\mathfrak{F}_n$ *de tipul* $I_n[a, b]$, *atunci* $D[\mathfrak{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}; f]$ *păstrează același semn, oricare ar fi punctele* $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1}$ *din* $[a, b]$.

Demonstrația teoremei 14 rezultă ca o aplicație a teoremei 12′. Într-adevăr, să presupunem că — în ipotezele teoremei 14 — există două sisteme de cîte $n+1$

*) Avem: $P_1(x_1, x_2; f) = x \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} + \dfrac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{x_1 - x_2}$. Dacă $f(x)$ e derivabilă în (x_1, x_2), atunci există un punct $\xi \in (x_1, x_2)$, astfel ca $\dfrac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{x_1 - x_2} = f(\xi) - \xi f'(\xi)$ (teorema lui D. Pompeiu).

puncte $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1}$ și $x_1' < x_2' < \ldots < x_n' < x_{n+1}'$ pentru care avem $D[\mathfrak{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] < 0$ și $D[\mathfrak{F}_n; x_1', x_2', \ldots, x_n', x_{n+1}'; f] > 0$. Pe baza teoremei 12′ rezultă existența unui sistem de $n+1$ puncte situate în $[a, b]$, $x_1'' < x_2'' < \ldots < x_{n+1}''$ pentru care $D[\mathfrak{F}_n; x_1'', x_2'', \ldots, x_n'', x_{n+1}''; f] = 0$, ceea ce este în contradicție cu ipoteza de n — valență făcută asupra funcției $f(x)$.

În enunțul teoremei 14 ipoteza continuității funcției $f(x)$ este esențială*).

Importanța studiului proprietăților funcțiilor n- valente față de o mulțime de tipul $I_n[a, b]$ își are originea tocmai în conținutul teoremei 14. În capitolul II revenim asupra acestei afirmații.

CAPITOLUL II

§ 1. NOȚIUNEA DE FUNCȚIE CONVEXĂ FAȚĂ DE O MULȚIME DE TIPUL $I_n[a, b]$

1. Presupunem date: mulțimea $\mathfrak{F}_n$ de tipul $I_n[a, b]$, punctele

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1}, \tag{47}$$

situate în intervalul $[a, b]$, și funcția $f(x)$, definită pe punctele (47).

D e f i n i ț i a 6. *Funcția* $f(x)$ *o numim convexă, polinomială, sau concavă față de mulțimea* $\mathfrak{F}_n$, *pe punctele* (47), *după cum*

$$D[\mathfrak{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}; f] >, = \text{ sau } < 0. \tag{48}$$

Avem de considerat sistemul interpolator $S\left\{\mathfrak{F}_n; \begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \\ f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{n+1}) \end{matrix}\right\}$.

Dacă el nu se reduce la o singură funcție, atunci cele $n+1$ funcții care-l formează coincid două cîte două pe cîte $n-1$ puncte din șirul (47). Pe baza teoremei 1, diferența

$$L(\mathfrak{F}_n; x_1, x_2, \ldots x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}; f \mid x) -$$
$$- L(\mathfrak{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_{n+1}; f \mid x), \; i \neq k,$$

schimbă semnul în cele $n-1$ puncte pe care se anulează. Avem deci următoarele inegalități:

dacă

$$f(x_{n+1}) > L(\mathfrak{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_n; f \mid x_{n+1}),$$

atunci

$$f(x_i) > \text{sau} < L(\mathfrak{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}; f \mid x_i),$$

după cum i este de aceeași paritate sau de paritate contrară cu $n+1$. Dacă

$$f(x_{n+1}) < L(\mathfrak{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_n; f \mid x_{n+1}),$$

atunci

$$f(x_i) < \text{sau} > L(\mathfrak{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}; f \mid x_i),$$

după cum i este de paritate contrară sau de aceeași paritate cu $n+1$.

*) A se vedea exemplul din [22] dat în cazul mulțimii $\mathfrak{P}_n$.

Din enunţul teoremei 13 rezultă următoarea propoziţie valabilă pentru mulţimea $\mathcal{P}_{n+1}$:

Dacă $f(x)$ este o funcţie continuă pe intervalul J şi pentru $n+2$ puncte $x_1^* < x_2^* < \ldots < x_{n+2}^*$ din J, avem $[x_1^*, x_2^*, \ldots, x_{n+2}^*; f] = 0$, atunci există un punct $\xi^* \in (x_1^*, x_{n+1}^*)$, astfel ca în orice vecinătate a sa să se găsească $n+2$ puncte $\xi_1^* < \xi_2^* < \ldots < \xi_{n+2}^*$, pentru care $[\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots, \xi_{n+2}^*; f] = 0$ [19].

Diferenţa divizată $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f]$ reprezintă coeficientul lui x^n în polinomul de interpolare (38). Să considerăm mulţimea $\mathcal{P}_{n+1}(A)$, $A \neq 0$. Ea este de tipul $I_n(-\infty, \infty)$. Dacă există în mulţimea $\mathcal{P}_{n+1}(A)$ un polinom care pe punctele $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ ia respectiv valorile $f(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, atunci pe aceste puncte avem $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] = A$. În acest caz, din teorema 7 rezultă următoarea propoziţie valabilă pentru mulţimea $\mathcal{P}_{n+1}(A)$:

Dacă $f(x)$ este continuă în intervalul J şi pentru punctele $x_1^* < x_2^* < \ldots < x_{n+1}^*$ din acest interval $[x_1^*, x_2^*, \ldots, x_{n+1}^*; f] = A$, atunci există un punct $\xi^* \in (x_1^*, x_{n+1}^*)$, astfel ca în orice vecinătate a sa să se găsească $n+1$ puncte $\xi_1^* < \xi_2^* < \ldots < \xi_{n+1}^*$, pentru care $[\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots, \xi_{n+1}^*; f] = A$ [19].

Dacă $n = 1$ şi $f(x)$ este şi derivabilă în intervalul (x_1^*, x_2^*), se obţine formula creşterilor finite. În acest caz $A = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Se observă imediat că dacă în loc de mulţimea $\mathcal{P}_{n+1}$ considerăm învelitoarea liniară a unui sistem Cebîşev-Markov, format din funcţiile $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{n+1}(x)$, atunci regăsim teoremele de medie pentru diferenţa divizată generalizată corespunzătoare (a se vedea T. P o p o v i c i u [20], unde este dată această diferenţă divizată).

Ca o completare, să observăm că în cazul mulţimii $\mathcal{P}_{n+1}$, dacă fixăm ultimul coeficient al polinoamelor de forma $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$, adică considerăm mulţimea polinoamelor $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + A$, unde a_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, sînt variabili şi A este fixat, obţinem o mulţime interpolatoare de ordinul n pe orice interval *care nu conţine originea*. În acest caz, din teorema 7 rezultă, în cazul $n = 1$, analogul discret al teoremei de medie dată de D. P o m p e i u [17]*) şi, evident, în ipoteza derivabilităţii, însăşi teorema lui D. Pompeiu. Cazul $n > 1$ ne dă extinderea acestei teoreme.

Tot în enunţul teoremei 7 sînt conţinute şi teoremele de medie valabile pentru ceilalţi coeficienţi ai polinomului de interpolare al lui Lagrange.

6. T e o r e m a 14. *Dacă $f(x)$ este o funcţie continuă pe intervalul $[a, b]$ şi n- valentă faţă de mulţimea $\mathcal{F}_n$ de tipul $I_n[a, b]$, atunci $D[\mathcal{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}; f]$ păstrează acelaşi semn, oricare ar fi punctele $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1}$ din $[a, b]$.*

Demonstraţia teoremei 14 rezultă ca o aplicaţie a teoremei 12′. Într-adevăr, să presupunem că — în ipotezele teoremei 14 — există două sisteme de cîte $n+1$

*) Avem: $P_1(x_1, x_2; f) = x\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} + \dfrac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{x_1 - x_2}$. Dacă $f(x)$ e derivabilă în (x_1, x_2), atunci există un punct $\xi \in (x_1, x_2)$, astfel ca $\dfrac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{x_1 - x_2} = f(\xi) - \xi f'(\xi)$ (teorema lui D. Pompeiu).

puncte $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1}$ şi $x_1' < x_2' < \ldots < x_n' < x_{n+1}'$ pentru care avem $D[\mathcal{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] < 0$ şi $D[\mathcal{F}_n; x_1', x_2', \ldots, x_n', x_{n+1}'; f] > 0$. Pe baza teoremei 12′ rezultă existenţa unui sistem de $n+1$ puncte situate în $[a, b]$, $x_1'' < x_2'' < \ldots < x_{n+1}''$ pentru care $D[\mathcal{F}_n; x_1'', x_2'', \ldots, x_n'', x_{n+1}''; f] = 0$, ceea ce este în contradicţie cu ipoteza de n — valenţă făcută asupra funcţiei $f(x)$.

În enunţul teoremei 14 ipoteza continuităţii funcţiei $f(x)$ este esenţială*).

Importanţa studiului proprietăţilor funcţiilor n- valente faţă de o mulţime de tipul $I_n[a, b]$ îşi are originea tocmai în conţinutul teoremei 14. În capitolul II revenim asupra acestei afirmaţii.

CAPITOLUL II

§ 1. NOŢIUNEA DE FUNCŢIE CONVEXĂ FAŢĂ DE O MULŢIME DE TIPUL $I_n[a, b]$

1. Presupunem date: mulţimea $\mathcal{F}_n$ de tipul $I_n[a, b]$, punctele

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1}, \tag{47}$$

situate în intervalul $[a, b]$, şi funcţia $f(x)$, definită pe punctele (47).

D e f i n i ţ i a 6. *Funcţia $f(x)$ o numim convexă, polinomială, sau concavă faţă de mulţimea $\mathcal{F}_n$, pe punctele* (47), *după cum*

$$D[\mathcal{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}; f] >, = \text{sau} < 0. \tag{48}$$

Avem de considerat sistemul interpolator $S\left\{\mathcal{F}_n; \begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \\ f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{n+1}) \end{matrix}\right\}$.

Dacă el nu se reduce la o singură funcţie, atunci cele $n+1$ funcţii care-l formează coincid două cîte două pe cîte $n-1$ puncte din şirul (47). Pe baza teoremei 1, diferenţa

$$L(\mathcal{F}_n; x_1, x_2, \ldots x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}; f \mid x) -$$
$$- L(\mathcal{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_{n+1}; f \mid x), \; i \neq k,$$

schimbă semnul în cele $n-1$ puncte pe care se anulează. Avem deci următoarele inegalităţi:

dacă

$$f(x_{n+1}) > L(\mathcal{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_n; f \mid x_{n+1}),$$

atunci

$$f(x_i) > \text{sau} < L(\mathcal{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}; f \mid x_i),$$

după cum i este de aceeaşi paritate sau de paritate contrară cu $n+1$. Dacă

$$f(x_{n+1}) < L(\mathcal{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_n; f \mid x_{n+1}),$$

atunci

$$f(x_i) < \text{sau} > L(\mathcal{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1}; f \mid x_i),$$

după cum i este de paritate contrară sau de aceeaşi paritate cu $n+1$.

*) A se vedea exemplul din [22] dat în cazul mulţimii $\mathcal{P}_n$.

Se observă deci imediat că, dacă funcţia $f(x)$ este convexă pe punctele (47) faţă de $\mathcal{F}_n$, atunci au loc inegalităţile

$$(-1)^{n+1-i}\{f(x_i) - L(\mathcal{F}_n;\ x_1,\ x_2,\dots, x_{i-1},\ x_{i+1},\dots, x_{n+1};\ f \mid x_i)\} > 0,$$
$$i = 1, 2,\dots, n+1.$$

Dacă $f(x)$ este concavă faţă de $\mathcal{F}_n$ pe punctele (47), atunci

$$(-1)^{n+1-i}\{f(x_i) - L(\mathcal{F}_n;\ x_1,\ x_2,\dots, x_{i-1},\ x_{i+1},\dots, x_{n+1}; f \mid x_i)\} < 0,$$
$$i = 1, 2,\dots, n+1.$$

Să considerăm acum o mulţime E de puncte ale intervalului $[a, b]$ şi funcţia $f(x)$, definită pe mulţimea E, despre care presupunem că conţine cel puţin $n+1$ puncte.

D e f i n i ţ i a 7. *Funcţia $f(x)$ o numim convexă, neconcavă, polinomială, neconvexă sau concavă faţă de mulţimea $\mathcal{F}_n$, pe mulţimea E, după cum pe fiecare sistem de $n+1$ puncte $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}$ din E avem*

$$D[\mathcal{F}_n; x_1,\ x_2,\dots, x_n,\ x_{n+1}; f] >, \geqq, =, \leqq \text{ sau } < 0. \tag{49}$$

Funcţiile care aparţin vreuneia din categoriile ce figurează în definiţia 7 le numim funcţii de ordinul n pe mulţimea E, faţă de mulţimea $\mathcal{F}_n$. Pentru simplificarea limbajului, vom utiliza pentru o funcţie convexă, neconcavă, polinomială, neconvexă sau concavă faţă de mulţimea $\mathcal{F}_n$ denumirea: funcţie $\mathcal{F}_n$-convexă, $\mathcal{F}_n$-neconcavă, $\mathcal{F}_n$-polinomială, $\mathcal{F}_n$-neconvexă sau $\mathcal{F}_n$-concavă.

Funcţiile de ordinul n faţă de mulţimea $\mathcal{F}_n$ au fost studiate de T. P o p o v i c i u [19] *). Cazul $n = 2$, $\mathcal{F}_2$ fiind oarecare, a fost considerat de B e c k e n b a c h [3]. În cursul acestui paragraf vom mai aminti şi o definiţie dată de L. T o r n h e i m [29].

2. T e o r e m a 15. *Pentru ca funcţia $f(x)$ să fie $\mathcal{F}_n$-convexă pe punctele*

$$x_1 < x_2 < \dots < x_m, \qquad m \geqq n+1, \tag{50}$$

este necesar şi suficient ca ea să fie $\mathcal{F}_n$-convexă pe fiecare sistem de cîte $n+1$ puncte consecutive $x_j, x_{j+1},\dots, x_{j+n}$, $j = 1, 2,\dots, m-n$, din şirul (50).

Demonstraţia teoremei 15 se bazează pe teorema 7. Necesitatea condiţiei din teorema 15 este evidentă, din cauza definiţiei 7. Suficienţa condiţiei rezultă în felul următor. Fie $n \geqq 2$. Să presupunem că sînt îndeplinite inegalităţile

$$D[\mathcal{F}_n;\ x_j, x_{j+1},\dots, x_{j+n}; f] > 0, \qquad j = 1, 2,\dots, m-n. \tag{51}$$

Atunci avem şi

$$\begin{gathered} L(\mathcal{F}_n;\ x_j,\ x_{j+1},\dots, x_{j+n-1}; f \mid x_{j+n}) < \\ < L(\mathcal{F}_n;\ x_{j+1},\ x_{j+2},\dots, x_{j+n}; f \mid x_{j+n}), \\ j = 1, 2,\dots, m-n-1. \end{gathered} \tag{52}$$

Conform teoremei 7, trebuie deci să avem

$$L(\mathcal{F}_n;\ x_{i_1},\ x_{i_2},\dots, x_{i_n};\ f \mid x_{i_{n+1}}) < f(x_{i_{n+1}}), \tag{53}$$

*) În [19] definiţia funcţiilor de ordinul n este legată de proprietăţile diferenţelor divizate.

oricare ar fi sistemul de $n+1$ puncte $x_{i_1} < x_{i_2} < \dots < x_{i_{n+1}}$ din şirul (50). Din inegalităţile (53) rezultă concluzia din teoremă. Dacă $n = 1$, ţinem seama de faptul că două funcţii distincte din $\mathcal{F}_1$ nu pot să coincidă în nici un punct din $[a, b]$. În acest caz, din $D[\mathcal{F}_1;\ x_j, x_{j+1}; f] > 0$, $i = 1, 2, \dots, m-1$, rezultă

$$L(\mathcal{F}_1;\ x_1;\ f \mid x_i) < f(x_i),\ i = 2, 3,\dots, m,\ L(\mathcal{F}_1; x_2;\ f \mid x_i) < f(x_i),$$
$$i = 3, 4, \dots, m, \dots, L(\mathcal{F}_1; x_{m-2}; f \mid x_i) < f(x_i),\ i = m-1, i = m.$$

Se poate enunţa o teoremă analoagă teoremei 15, înlocuind condiţia de $\mathcal{F}_n$-convexitate cu $\mathcal{F}_n$-concavitate, $\mathcal{F}_n$-neconvexitate, $\mathcal{F}_n$-neconcavitate.

3. T e o r e m a 16. *Dacă funcţia $f(x)$, definită pe intervalul $[a, b]$, este de ordinul n faţă de $\mathcal{F}_n$, $n \geqq 2$, atunci $f(x)$ este continuă pe intervalul deschis (a, b).*

Pentru demonstraţie, să considerăm un punct arbitrar x_0 din interiorul intervalului $[a, b]$, şi să presupunem că $f(x)$ este $\mathcal{F}_n$-convexă pe intervalul $[a, b]$. Să considerăm de asemenea un sistem de $n+1$ puncte

$$x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_0 < x_{i+1} < \dots < x_n. \tag{54}$$

Funcţiile

$$\begin{gathered} L(\mathcal{F}_n; x_1, x_2,\dots, x_i,\ x_0,\ x_{i+1},\dots, x_{n-1}; f \mid x), \\ L(\mathcal{F}_n; x_2, x_3,\dots, x_i,\ x_0,\ x_{i+1},\dots, x_n; f \mid x) \end{gathered} \tag{55}$$

au aceeaşi valoare în punctul x_0. Pentru $h > 0$, suficient de mic, avem

$$\begin{gathered} L(\mathcal{F}_n; x_2,\ x_3,\dots, x_i,\ x_0,\ x_{i+1},\dots, x_n; f \mid x_0 + h) < f(x_0 + h) < \\ < L(\mathcal{F}_n; x_1,\ x_2,\dots, x_i,\ x_0,\ x_{i+1},\dots, x_{n-1}; f \mid x_0 + h) \end{gathered} \tag{56}$$

şi

$$\begin{gathered} L(\mathcal{F}_n; x_2, x_3,\dots, x_i, x_0, x_{i+1},\dots, x_n; f \mid x_0 - h) > f(x_0 - h) > \\ > L(\mathcal{F}_n; x_1,\ x_2,\dots, x_i,\ x_0,\ x_{i+1},\dots, x_{n-1}; f \mid x_0 - h), \end{gathered} \tag{57}$$

sau inegalităţile contrare (omiţîndu-se semnul $=$), după cum $i+1$ este de aceeaşi paritate sau de paritate contrară cu n. Dacă $h \to 0$, funcţiile (55) fiind continue, rezultă că $f(x_0 + h) \to f(x_0)$ şi $f(x_0 - h) \to f(x_0)$. Raţionamentul este analog dacă asupra funcţiei $f(x)$ facem ipoteza de $\mathcal{F}_n$ — concavitate. Dacă $f(x)$ este neconcavă sau neconvexă faţă de $\mathcal{F}_n$, atunci în inegalităţile (56) şi (57) se poate întîmpla să apară semnele $\leqq$ sau $\geqq$. Concluzia din teoremă rămîne şi atunci valabilă.

T e o r e m a 17. *Dacă funcţia $f(x)$ este de ordinul 1 în $[a, b]$ faţă de mulţimea $\mathcal{F}_1$, atunci ea nu poate avea decît discontinuităţi de speţa întîia.*

În demonstraţia acestei teoreme ne bazăm pe faptul că două funcţii distincte din mulţimea $\mathcal{F}_1$ nu pot să coincidă în nici un punct al intervalului $[a, b]$. Să presupunem, pentru fixarea ideilor, că $f(x)$ este neconcavă faţă de $\mathcal{F}_1$ în $[a, b]$. Avem deci $D[\mathcal{F}_1; x_1, x_2; f] \geqq 0$, oricare ar fi perechea de puncte $x_1 < x_2$. Fie x_0 un punct din interiorul intervalului $[a, b]$ şi $\{x_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$, $x_\nu > x_0$, $\nu = 1, 2,\dots$, un şir de puncte cu limita x_0. Să arătăm că există limita la dreapta a funcţiei $f(x)$ în x_0. Din cauza observaţiei făcute mai sus cu privire la funcţiile din $\mathcal{F}_1$, putem face ipoteza că şirul $\{x_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ este monoton. Şirul de funcţii $\{L(_1; x\mathcal{F}_\nu;\ f \mid x)\}_{\nu=1}^{\infty}$ este deci un şir monoton, necrescător, de funcţii, care este mărginit inferior de funcţia $L(\mathcal{F}_1;$

$x_0; f \mid x)$. Acest şir de funcţii, pe baza teoremei 1, este uniform convergent în $[a, b]$. De aici rezultă şi convergenţa şirului de numere $\{f(x_\nu)\}_{\nu=1}^{\infty}$. Limita $f(x_0 + 0)$ există deci. În mod analog, rezultă şi existenţa limitei $f(x_0 - 0)$. Pentru extremităţile a şi b avem, evident, de considerat numai limitele $f(a + 0)$ şi $f(b - 0)$. În mod analog se tratează celelalte categorii de funcţii de ordinul 1 faţă de $\mathfrak{F}_1$.

T e o r e m a 18. *Dacă $f(x)$ este o funcţie de ordinul n pe intervalul $[a, b]$ faţă de mulţimea $\mathfrak{F}_n$ şi dacă ea este $\mathfrak{F}_n$-polinomială pe punctele (47), atunci ea este de asemenea $\mathfrak{F}_n$-polinomială pe intervalul $[x_1, x_{n+1}]$.*

Pentru a demonstra teorema 18 este suficient să arătăm că — în ipotezele făcute asupra funcţiei $f(x)$ — în fiecare punct al intervalului (x_1, x_{n+1}), valoarea funcţiei $f(x)$ coincide cu cea a funcţiei $L(\mathfrak{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_n; f \mid x)$. Să presupunem că ar exista un punct $x_0 \in (x_1, x_{n+1})$, astfel ca $f(x_0) \neq L(\mathfrak{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_n; f \mid x_0)$. Fie $x_k < x_0 < x_{k+1}$. Să considerăm funcţiile

$$
\begin{aligned}
&L(\mathfrak{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_k, x_0, x_{k+1}, \ldots, x_{n-1}; f \mid x),\\
&L(\mathfrak{F}_n; x_2, x_3, \ldots, x_k, x_0, x_{k+1}, \ldots, x_n; f \mid x).
\end{aligned} \tag{58}
$$

Dacă $x_0 < x_n$, atunci diferenţele

$$L(\mathfrak{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_n; f \mid x) - L(\mathfrak{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_k, x_0, x_{k+1}, \ldots, x_{n-1}; f \mid x)$$

$$L(\mathfrak{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_n; f \mid x) - L(\mathfrak{F}_n; x_2, x_3, \ldots, x_k, x_0, x_{k+1}, \ldots, x_n; f \mid x),$$

au semne contrare pentru $x > x_n$. În acest caz, numărul $f(x_{n+1})$ este cuprins între valorile în punctul x_{n+1} ale funcţiilor (58). Aceasta este în contradicţie cu ipoteza că $f(x)$ este de ordinul n faţă de $\mathfrak{F}_n$ pe intervalul $[a, b]$. Dacă avem $x_n < x_0 < x_{n+1}$, atunci, din cauza ipotezei $f(x_0) \neq L(\mathfrak{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_n; f \mid x_0)$, numerele $D[\mathfrak{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}; f]$ şi $D[\mathfrak{F}_n; x_2, x_3, \ldots, x_n, x_0, x_{n+1}; f]$ au semne contrare. Aceasta este de asemenea în contradicţie cu ipoteza făcută asupra funcţiei $f(x)$. Oricare ar fi deci punctul $x_0 \in (x_1, x_{n+1})$, trebuie să avem $f(x_0) = L(\mathfrak{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_n; f \mid x_0)$. Teorema 18 este astfel demonstrată. Trebuie să observăm că în demonstraţie este cuprins şi cazul $n = 1$.

4. D e f i n i ţ i a 8. *Fie $\mathfrak{S}$ o mulţime de puncte din intervalul $[a, b]$, pe care e definită funcţia $f(x)$. Să presupunem că pentru orice sistem de $n + 1$ puncte $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$ ale lui $\mathfrak{S}$, avem $D[\mathfrak{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}; f] = 0$. Mulţimea $\mathfrak{S}$ o numim mulţime de $\mathfrak{F}_n$ — polinomialitate a funcţiei $f(x)$.*

Pe baza teoremei 18 se poate face un studiu amănunţit al mulţimilor de $\mathfrak{F}_n$-polinomialitate ale unei funcţii de ordinul n faţă de $\mathfrak{F}_n$ pe intervalul $[a, b]$. Dacă $n \geqq 2$, $f(x)$ e continuă în (a, b). În acest caz, dacă $\mathfrak{S} \subset (a, b)$ este o mulţime de $\mathfrak{F}_n$-polinomialitate a lui $f(x)$ ea îşi conţine toate punctele de acumulare care sînt diferite de a şi de b. Dacă $\underline{\lim}\, \mathfrak{S} \neq b$ şi $\overline{\lim}\, \mathfrak{S} \neq a$, atunci $\mathfrak{S}$ este o mulţime închisă. Dacă $a \in \mathfrak{S}'$ şi $a \in \mathfrak{S}$, atunci $f(x)$ trebuie să fie continuă pe a. Aceeaşi observaţie este valabilă şi pentru extremitatea b. Mulţimea conţine o dată cu două puncte $x_0 < x_0'$, orice punct $x \in (x_0, x_0')$, din cauza teoremei 18. Rezultă deci că ea este un interval deschis sau închis (care nu se poate evident reduce la un punct).

Să presupunem că $\mathfrak{S}_1$ şi $\mathfrak{S}_2$ sînt două mulţimi de $\mathfrak{F}_n$-polinomialitate. Dacă intersecţia $\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2$ nu se reduce la un singur punct, atunci reunirea $\mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2$ este o mulţime de $\mathfrak{F}_n$-polinomialitate. În caz contrar, $\mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2$ poate să nu fie o mulţime de $\mathfrak{F}_n$-polinomialitate. În acest caz $\mathfrak{S}_1$ şi $\mathfrak{S}_2$ sînt două intervale cu o extremitate comună. Reunirea F a tuturor mulţimilor de $\mathfrak{F}_n$-polinomialitate ale funcţiei $f(x)$ este o mulţime de intervale, două cîte două avînd cel mult cîte un punct comun şi dintre care cel mult două sînt deschise. F conţine un număr finit sau numărabil de intervale.

Dacă $n = 1$, $f(x)$ poate avea puncte de discontinuitate în interiorul intervalului $[a, b]$. Dacă $\mathfrak{S}$ este o mulţime de $\mathfrak{F}_1$-polinomialitate, ea este în orice caz un interval. Spre deosebire de cazul $n \geqq 2$, reunirea F a tuturor mulţimilor de $\mathfrak{F}_1$-polinomialitate poate conţine mai mult de două intervale deschise.

5. T e o r e m a 19. *Dacă $f(x)$ este o funcţie continuă pe intervalul $[a, b]$, condiţia necesară şi suficientă ca ea să fie $\mathfrak{F}_n$-convexă sau $\mathfrak{F}_n$-concavă pe intervalul $[a, b]$ este ca ea să fie n-valentă faţă de $\mathfrak{F}_n$, pe intervalul $[a, b]$.*

Pentru demonstraţie ne bazăm pe teorema 14. Să presupunem satisfăcută ipoteza din teoremă. Atunci, conform teoremei 14, $D[\mathfrak{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}; f]$ păstrează un semn constant, pentru orice sistem de puncte (47) din $[a, b]$. Deci $f(x)$ este $\mathfrak{F}_n$-convexă sau $\mathfrak{F}_n$-concavă, după cum acest semn e pozitiv sau negativ. Condiţia din teoremă este deci suficientă. Necesitatea condiţiei este evidentă, pe baza definiţiei 7. Această teoremă a fost dată pentru mulţimea $\mathfrak{T}_n$ de T. P o p o v i c i u [22].

Din teorema 19 rezultă importanţa noţiunii de funcţie n-valentă faţă de o mulţime de tipul I_n $[a, b]$. În lucrarea sa, L. T o r n h e i m [29] numeşte funcţie convexă faţă de o mulţime de tipul I_n $[a, b]$, o funcţie continuă pe intervalul închis $[a, b]$ şi n - valentă faţă de mulţimea interpolatoare considerată*). Definiţia 6 dată de noi este mai generală.

§ 2. FUNCŢII DE ORDINUL n FAŢĂ DE O MULŢIME DE TIPUL I_n [a, b] CARE CONŢINE UN LANŢ INTERPOLATOR DE ORDINUL (1, 2, . . ., n—1).

1. D e f i n i ţ i a 9. *$\mathfrak{F}_n$ fiind o mulţime de tipul I_n $[a, b]$, spunem că ea conţine un lanţ interpolator de ordinul $(1, 2, \ldots, n - 1)$, dacă există $n - 1$ submulţimi $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{F}_{n-1}$ ale lui $\mathfrak{F}_n$, astfel ca $\mathfrak{F}_k$ să fie de tipul I_k $[a, b]$, $k = 1, 2, \ldots, n - 1$. Submulţimile $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{F}_{n-1}$ spunem că formează un lanţ interpolator de ordinul $(1, 2, \ldots, n - 1)$ în $[a, b]$.*

În acest paragraf vom presupune întotdeauna că $\mathfrak{F}_n$ conţine un lanţ interpolator de ordinul $(1, 2, \ldots, n - 1)$. Urmărim să punem în evidenţă cîteva proprietăţi care exprimă o legătură între funcţiile de ordinul n faţă de $\mathfrak{F}_n$ şi funcţiile de un ordin $k < n$ faţă de $\mathfrak{F}_k$. Unele din aceste proprietăţi au fost studiate de T. P o p o v i c i u [19], în cazul cînd $\mathfrak{F}_n$ este mulţimea polinoamelor de grad cel mult egal cu $n - 1$. Rezultatele pe care le expunem mai jos se bazează în mod esenţial pe proprietăţile punctului ξ, care figurează în enunţul teoremei. Motivul care ne-a condus la acest studiu este lipsa, în general, a proprietăţii de liniaritate a mulţimii $\mathfrak{F}_n$. În cazul particular al mulţimii $\mathfrak{T}_n$, toate raţionamentele decurg din proprietăţile diferenţelor divizate.

D e f i n i ţ i a 10. *Punctul $\xi \in (a, b)$ se numeşte punct de ordinul k faţă de mulţimea $\mathfrak{F}_k$ de tipul I_k $[a, b]$,* al funcţiei $f(x)$, *definită pe intervalul* $[a, b]$, *dacă*

---

*) Denumirile sînt altele la L. T o r n h e i m.

în orice vecinătate a lui ξ *există* $k+1$ *puncte distincte,* $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}$, *astfel ca să avem* $D[\mathcal{F}_k; x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}; f] = 0$.

L e m a 9. *Fie* $f(x)$ o *funcție* $\mathcal{F}_n$ - *convexă pe intervalul* $[a, b]$. *Fie de asemenea* $D[\mathcal{F}_{n-1}; x_1, x_2, \ldots, x_n; f] = 0$, *unde* $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b$. *Dacă* $x_k < x_0 < x_{k+1}$, $3 \leqq k < n-1$ și $n \geqq 4$, *atunci pentru* $x > x_k$, $f(x) - L(\mathcal{F}_{n-1}; x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}, x_0, x_{k+1}, \ldots, x_n; f|x) < 0$, *iar dacă* $x_2 < x_0 < x_3$, și $n \geqq 2$, *avem* $f(x) - L(\mathcal{F}_{n-1}; x_0, x_3, \ldots, x_n; f|x) > 0$ *pentru* $x > x_n$.

Proprietatea analoagă are loc pentru funcția $f(x)$, $\mathcal{F}_n$ - concavă pe intervalul $[a, b]$, schimbîndu-se corespunzător semnele de inegalitate.

Demonstrația lemei 9 e imediată. Dacă $x_2 < x_0 < x_3$, funcțiile $L(\mathcal{F}_{n-1}; x_2, x_3, \ldots, x_n; f|x)$ și $L(\mathcal{F}_{n-1}; x_0, x_3, \ldots, x_n; f|x)$ coincid în $n-2$ puncte și deci diferența lor trebuie să schimbe semnul în aceste puncte. Dacă am avea $f(x) - L(\mathcal{F}_{n-1}; x_0, x_3, \ldots, x_n; f|x) < 0$ pentru $x > x_n$, atunci, în intervalul (x_2, x_3), această diferență ar trebui să se anuleze de două ori (altfel $L(\mathcal{F}_{n-1}; x_2, \ldots, x_n; f|x)$ și $L(\mathcal{F}_{n-1}; x_0, x_3, \ldots, x_n; f|x)$ ar coincide în $n-1$ puncte, ceea ce nu se poate, și am ajunge în contradicție cu ipoteza de $\mathcal{F}_n$-convexitate *)). Din același motiv nu putem avea nici $f(x) - L(\mathcal{F}_{n-1}; x_0, x_3, \ldots, x_n; f|x) = 0$ pentru un punct $x > x_n$.

Dacă $3 \leqslant k \leqslant n-1$, funcțiile $L(\mathcal{F}_{n-1}; x_2, x_3, \ldots, x_n; f|x)$ și $L(\mathcal{F}_{n-1}; x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}, x_0, x_{k+1}, \ldots, x_n; f|x)$ coincid în $n-2$ puncte. La fel ca mai sus se observă că nu putem avea $f(x) - L(\mathcal{F}_{n-1}; x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}, x_0, x_{k+1}, \ldots, x_n; f|x) \leqq 0$.

L e m a 10. *Dacă* $f(x)$ *este o funcție* $\mathcal{F}_n$*-convexă* ($\mathcal{F}_n$*-concavă*), *pe intervalul* $[a, b]$, $n \geqq 2$ *și* ξ *este un punct al său de ordinul* $n-1$ *față de mulțimea* $\mathcal{F}_{n-1}$, *atunci există* $n-1$ *puncte* $x_1' < x_2' < \ldots < x_{n-1}'$, $\xi \leqq x_1'$, *astfel ca pentru* $x_0 > x_{n-1}'$ *să avem* $D[\mathcal{F}_{n-1}; x_1', x_2', \ldots, x_{n-1}', x_0; f] > 0$ (< 0). *În aceleași ipoteze există* $n-1$ *puncte* $x_1'' < x_2'' < \ldots < x_{n-1}''$, $x_{n-1}' < \xi$, *astfel ca* $D[\mathcal{F}_{n-1}; x_1'', x_2'', \ldots, x_{n-1}'', \xi; f] < 0$ (> 0).

Pentru a demonstra lema 10 ne bazăm pe lema 9. Totdeauna putem face ipoteza că punctele x_i pentru care $D[\mathcal{F}_{n-1}; x_1, x_2, \ldots, x_n; f] = 0$, satisfac inegalitățile $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b$ (pe baza definiției lui ξ). Să presupunem $x_k < \xi < x_{k+1}$, $2 \leqq k \leqq n-1$ (în cazul $k = 1$ nu avem nimic de studiat), construim, pe baza lemei 9, funcția $L(\mathcal{F}_{n-1}; x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}, \xi, x_{k+1}, \ldots, x_n; f|x)$ și punctele ξ, $x_{k+1}, \ldots, x_n$ vor juca rolul a $n-k+1$ dintre punctele căutate $x_1', x_2', \ldots, x_{n-1}'$. Construim pe rînd funcțiile

$$L(\mathcal{F}_{n-1}; x_3, x_4, \ldots, x_{k-1}, \xi, x_2', x_{k+1}, \ldots, x_n; f|x), \ldots,$$
$$L(\mathcal{F}_{n-1}; x_{k-1}, \xi, x_2', x_3', \ldots, x_{k-2}', x_{k+1}, \ldots, x_n; f|x),$$
$$L(\mathcal{F}_{n-1}; \xi, x_2', x_3', \ldots, x_{k-1}', x_{k+1}, \ldots, x_n; f|x).$$

Punctele $x_1' = \xi$, $x_2, x_3', \ldots, x_{k-1}'$, $x_k' = x_{k+1}, \ldots, x_{n-1}' = x_n$ satisfac condițiile din prima parte a concluziei din enunțul lemei 10 ($x_2', x_3', \ldots x_{k-2}'$ sînt alese arbitrar în (ξ, x_{k+1})).

Se poate formula o lemă analoagă cu lema 9, făcînd să intervină punctul x_1 în locul punctului x_n, și punctul x_k în locul punctului x_{k+1}. Rolul punctului $x > x_n$ îl va putea avea orice punct din intervalul (x_{n-1}, x_n). Nu mai insistăm deci asupra părții a doua din concluzia lemei 10.

*) $\mathcal{F}_{n-1}$ fiind o submulțime a mulțimii $\mathcal{F}_n$.

T e o r e m a 20. *Dacă* $f(x)$ *este o funcție* $\mathcal{F}_n$*-convexă sau* $\mathcal{F}_n$*-concavă în intervalul* $[a, b]$, $n \geqq 2$, *atunci ea are cel mult un punct de ordinul* $n-1$ *față de* $\mathcal{F}_{n-1}$ *în* (a, b).

Pe baza lemei 10, dacă $\xi_1 < \xi_2$ ar fi puncte de ordinul $n-1$ față de $\mathcal{F}_{n-1}$, ale funcției $f(x)$, ar exista două sisteme de cîte n puncte $x_1' < x_2' < \ldots < x_n'$, $x_1'' < x_2'' < \ldots < x_n''$, unde $x_1' \geqq \xi_1$, și $x_n'' \leqq \xi_2$, astfel ca $D[\mathcal{F}_{n-1}; x_1', x_2', \ldots, x_n'; f]$ și $D[\mathcal{F}_{n-1}; x_1'', x_2'', \ldots, x_n''; f]$ să fie de semne contrare.

Pe baza teoremei 12', aplicată mulțimii $\mathcal{F}_{n-1}$, există n puncte $\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_n'$, situate în intervalul (ξ_1, ξ_2) astfel ca $D[\mathcal{F}_{n-1}, \xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_n', f] = 0$.

Fie M_{n-1} mulțimea tuturor punctelor de ordinul $n-1$ față de $\mathcal{F}_{n-1}$, ale funcției $f(x)$. Să notăm $\xi' = \inf M_{n-1}$, $\xi'' = \sup M_{n-1}$. Mulțimea M_{n-1}, este peste tot densă în intervalul $[\xi', \xi'']$ *). Deci $f(x)$ trebuie să coincidă pe acest interval cu o funcție din $\mathcal{F}_{n-1}$, ceea ce contrazice faptul că $f(x)$ este n- valentă față de $\mathcal{F}_n$ pe intervalul $[a, b]$. M_{n-1} nu poate deci conține decît cel mult un punct.

Din teorema 20 rezultă cîteva observații interesante. Dacă $f(x)$ nu are punct de ordinul $n-1$ față de $\mathcal{F}_{n-1}$, ea este $(n-1)$ - valentă față de $\mathcal{F}_{n-1}$, și deci e $\mathcal{F}_{n-1}$ -convexă sau $\mathcal{F}_{n-1}$-concavă pe intervalul (a, b). In baza teoremei 20, în acest caz $f(x)$ nu poate avea mai mult decît *un* punct de ordinul $n-2$ față de $\mathcal{F}_{n-2}$.

Dacă $f(x)$ are un punct de ordinul $n-1$ față de $\mathcal{F}_{n-1}$ să-l notăm cu ξ. Punctul ξ împarte intervalul $[a, b]$ în subintervalele $[a, \xi]$ și $[\xi, b]$, pe fiecare dintre ele $f(x)$ fiind $(n-1)$-valentă față de $\mathcal{F}_{n-1}$. Dacă $f(x)$ e $\mathcal{F}_n$-convexă, atunci pe intervalul $[a, \xi]$ ea este $\mathcal{F}_{n-1}$-concavă iar pe intervalul $[\xi, b]$ este $\mathcal{F}_{n-1}$-convexă. Dacă $f(x)$ e $\mathcal{F}_n$-concavă, atunci pe primul subinterval e $\mathcal{F}_{n-1}$-convexă și pe al doilea $\mathcal{F}_{n-1}$-concavă. Rezultă că punctele de ordinul $(n-1)$ față de $\mathcal{F}_{n-1}$, ale funcțiilor n-valente față de $\mathcal{F}_n$, se împart în două categorii.

D e f i n i ț i a 11. *În ipotezele teoremei* 20, *punctul* ξ *de ordinul* $n-1$ *față de* $\mathcal{F}_{n-1}$, *al funcției* $f(x)$, *îl numim de clasa* 1-a *dacă la stînga lui,* $f(x)$ *este* $\mathcal{F}_{n-1}$*-concavă, iarl a dreapta lui este* $\mathcal{F}_{n-1}$*-convexă. În celălalt caz, punctul se numește de clasa a 2-a* **).

Din demonstrația teoremei 13 rezultă că punctul ξ care figurează în enunț, separă punctele $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{n+1}$. Fie $f(x)$ o funcție n-valentă față de $\mathcal{F}_n$ și ξ un punct al său de ordinul $n-1$ față de $\mathcal{F}_{n-1}$. Are loc

T e o r e m a 21. *Dacă* $n \geqq 2$, *există în vecinătatea lui* ξ, *n puncte* $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_n$ *astfel ca* $D[\mathcal{F}_{n-1}; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n; f] = 0$ și $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{n-1} < \xi < \xi_n$. *De asemenea, există n puncte* $\xi_1' < \xi_2' < \ldots < \xi_n'$, *astfel ca* $\xi_1' < \xi < \xi_2' < \ldots < \xi_n'$ *și* $D[\mathcal{F}_{n-1}; \xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_n'; f] = 0$.

Pentru demonstrația teoremei 21 e suficient să studiem cazul $n = 3$. Să presupunem că $f(x)$ este $\mathcal{F}_3$-convexă în $[a, b]$. Fie $\xi_1 < \xi < \xi_2 < \xi_3$ și $D[\mathcal{F}_2; \xi_1, \xi_2, \xi_3; f] = 0$. Avem $L(\mathcal{F}_2; \xi_2, \xi_3; f|x) < f(x)$ pentru $x > \xi_3$ și $L(\mathcal{F}_2; \xi_1, \xi_2; f|x) > f(x)$ pentru $\xi_2 < x < \xi_3$. Printre funcțiile din $\mathcal{F}_2$ de forma $L(\mathcal{F}_2; x_0, \xi_3; f|x)$, unde $\xi_1 < x_0 < \xi$, există una care coincide cu $f(x)$ într-un punct ξ_2' situat între x_0 și ξ. Dacă o asemenea funcție n-ar exista, atunci pentru $x_0 = \xi$, diferența $f(x) - L[\mathcal{F}_2; x_0, \xi_3; f|x]$ s-ar anula într-un punct cuprins între ξ și ξ_2, sau s-ar anula în x_0, fără să schimbe semnul. În ambele cazuri, $f(x)$ ar trebui să mai aibă un punct

*) ξ', ξ'' sînt conținute în M_{n-1}, ea fiind o mulțime închisă.

**) Se clasifică punctele de orice ordin $n-k$ față de $\mathcal{F}_{n-k}$ în mod analog.

de ordinul $n-1$ față de $\mathfrak{F}_{n-1}$, diferit de ξ, ceea ce, conform teoremei 20, nu se poate. Avem deci $\xi_1 < \xi_2' < \xi < \xi_3$ și $D\,[\mathfrak{F}_2;\ \xi_1,\ \xi_2',\ \xi_3;\ f] = 0$. Dacă $n > 3$ și avem $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_k < \xi < \xi_{k+1} < \ldots < \xi_n$, $2 < k < n-2$, aplicăm raționamentul de mai sus funcțiilor din $\mathfrak{F}_{n-1}$ care în punctele $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k-1}, \xi_{k+2}, \ldots, \xi_n$ coincid cu $f(x)$. În cazul $k=1$, se omite punctul ξ_1. Această mulțime este de tipul $I_2[\xi_{k-1}, \xi_{k+2}]$. Putem deci găsi un punct ξ'_{k+1} astfel ca $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_k < \xi'_{k+1} < \xi < \xi_{k+2} < \ldots < \xi_n$ și $D\,[\mathfrak{F}_{n-1};\ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \xi'_{k+1}, \xi_{k+2}, \ldots, \xi_n; f] = 0$. De aici rezultă prin repetarea construcției că are loc prima parte a concluziei din teoremă. La fel se stabilește și a doua afirmație din concluzie.

T e o r e m a 22. *Dacă $f(x)$ este o funcție $\mathfrak{F}_n$-convexă sau $\mathfrak{F}_n$-concavă pe intervalul $[a, b]$, $n > 2$, atunci intervalul $[a, b]$ se poate descompune în cel mult $n+1$ subintervale consecutive *), în care $f(x)$ să fie alternativ convexă și concavă față de $\mathfrak{F}_{n-k}$ (se presupune $1 \leq k \leq n-1$).*

Pentru demonstrație să considerăm mai întîi cazul $k=1$ și să presupunem că $f(x)$ este $\mathfrak{F}_n$-convexă în $[a, b]$. Două cazuri se pot întîmpla: sau există în $\mathfrak{F}_{n-1}$ o funcție care ia în n puncte din $[a, b]$ valori egale cu ale lui $f(x)$, sau o asemenea funcție nu există în $\mathfrak{F}_{n-1}$. In cazul al doilea, $f(x)$ este $(n-1)$-valentă față de $\mathfrak{F}_n$ pe $[a, b]$. În primul caz, $f(x)$ are un punct $\xi^{(n-1)}$ de ordin $n-1$ față de $\mathfrak{F}_{n-1}$. Punctul $\xi^{(n-1)}$ împarte intervalul $[a, b]$ în două subintervale consecutive*) $[a, \xi^{(n-1)}]$ și $[\xi^{(n-1)}, b]$, în fiecare din ele $f(x)$ fiind $(n-1)$-valentă față de $\mathfrak{F}_{n-1}$. Prin urmare $f(x)$ este $\mathfrak{F}_{n-1}$-concavă în primul interval și $\mathfrak{F}_{n-1}$-convexă în al doilea, după cum rezultă din lema 9. În mod analog se examinează cazul cînd $f(x)$ este $\mathfrak{F}_n$-concavă în $[a, b]$.

Pentru cazul $k=1$ proprietatea cuprinsă în enunțul teoremei 22 are deci loc, pentru că, pe baza definiției punctului $\xi^{(n-1)}$, descompunerea indicată este unică.

În ipoteza că punctul $\xi^{(n-1)}$ există, să notăm cu $f_1^{(n-1)}(x)$ restrîngerea funcției $f(x)$ pe intervalul $[a, \xi^{(n-1)}]$ și cu $f_2^{(n-1)}(x)$ restrîngerea ei pe intervalul $[\xi^{(n-1)}, b]$. Observăm că $f_1^{(n-1)}(x)$ poate avea cel mult un punct de ordinul $n-2$ față de $\mathfrak{F}_{n-2}$. Aceeași observație este valabilă și pentru $f_2^{(n-1)}(x)$. Prin urmare $f(x)$ poate avea în (a, b) cel mult două puncte $\xi_1^{(n-2)} < \xi_2^{(n-2)}$ de ordinul $n-2$ față de $\mathfrak{F}_{n-2}$. Într-adevăr, dacă punctul $\xi^{(n-1)}$ ar fi în același timp și punct de ordinul $n-2$ față de $\mathfrak{F}_{n-2}$, atunci unul din punctele de ordinul $n-2$ față de $\mathfrak{F}_{n-2}$ situate în $(a, \xi^{(n-1)})$ și $(\xi^{(n-1)}, b)$, trebuie să lipsească. În caz contrar, ele ar fi de clase diferite iar $\xi^{(n-1)}$ ar fi deci de aceeași clasă cu unul dintre ele, ceea ce nu se poate, deoarece atunci s-ar pune în evidență un interval pe care $f(x)$ ar coincide cu o funcție din $\mathfrak{F}_n$. Fie deci $\xi_1^{(n-2)} < \xi_2^{(n-2)}$ punctele de ordinul $n-2$ față de $\mathfrak{F}_{n-2}$ ale funcției $f(x)$. În intervalele $[a, \xi_1^{(n-2)}]$, $[\xi_1^{(n-2)}, \xi_2^{(n-2)}]$ și $[\xi_2^{(n-2)}, b]$ are loc proprietatea cerută în teoremă, pentru $k=2$. În ipoteza că $\xi^{(n-1)}$ nu există, $f(x)$ fiind convexă sau concavă față de $\mathfrak{F}_{n-1}$, în întregul interval $[a, b]$ are cel mult un punct de ordinul $n-2$ față de $\mathfrak{F}_{n-2}$.

---

*) Subintervalele $[\alpha_1, \beta_1]$, $[\alpha_2, \beta_2], \ldots, [\alpha_k, \beta_k]$ ale intervalului $[a, b]$ le numim consecutive dacă $a < \alpha_1$, $\beta_1 = \alpha_2, \ldots, \beta_{k-1} = \alpha_k$, $\beta_k \leqq b$.

Pentru cazul $k > 2$, se observă, în mod analog, că numărul punctelor de ordin $n-k$ față de $\mathfrak{F}_{n-k}$ este în orice caz finit. Să presupunem că acest număr m ar putea să fie cel puțin $k+2$. Observăm că între două puncte consecutive $\xi_i^{(n-k)} < \xi_{i+1}^{(n-k)}$ de ordinul $n-k$ față de $\mathfrak{F}_{n-k}$, există un punct de ordinul $n-k+1$ față de $\mathfrak{F}_{n-k+1}$. Dacă n-ar fi așa, atunci punctele $\xi_i^{(n-k)}$ și $\xi_{i+1}^{(n-k)}$ ar aparține unui interval în care $f(x)$ este convexă sau concavă față de $\mathfrak{F}_{n-k+1}$ și deci n-ar putea avea pe acest interval *două* puncte de ordinul $n-k$ față de $\mathfrak{F}_{n-k}$. Ipoteza $m \geqq k+1$ ne conduce deci la existența a cel puțin două puncte de ordinul $n-1$ față de $\mathfrak{F}_{n-1}$ ale funcției $f(x)$, ceea ce am văzut deja că nu poate avea loc. La fel se studiază cazul cînd $\mathfrak{F}_n$ — convexitatea se înlocuiește cu $\mathfrak{F}_n$ — concavitatea.

Concluzia din teorema 22 este deci adevărată, pentru că în intervalele determinate de punctele de diferite ordine e asigurată și alternanța caracterului de convexitate cerută în enunț. Descompunerea indicată e unică.

Această proprietate mai poate fi enunțată și în felul următor.

T e o r e m a 23. *O funcție $\mathfrak{F}_n$-convexă sau $\mathfrak{F}_n$-concavă în $[a, b]$, are cel mult k puncte de ordinul $n-k$, față de $\mathfrak{F}_{n-k}$ $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Punctele de același ordin, aparțin alternativ la clase diferite.*

Prima parte a enunțului e clară. A doua rezultă imediat dacă observăm că între două puncte de un același ordin, care aparțin la aceeași clasă, există încă un punct de același ordin. Deci două puncte *consecutive* de un același ordin trebuie să fie de clase diferite.

Dacă există toate cele k puncte de ordinul $n-k$ față de $\mathfrak{F}_{n-k}$, în ipotezele din teorema precedentă, atunci avem.

T e o r e m a 24. *Punctele de ordinul $n-k$ față de $\mathfrak{F}_{n-k}$ și cele de ordin $n-k+1$ față de $\mathfrak{F}_{n-k+1}$ se separă $(2 \leqslant k \leqslant n-1)$.*

2. Din teoremele enunțate în acest paragraf rezultă cîteva concluzii, dacă se particularizează mulțimea $\mathfrak{F}_n$.

O funcție convexă sau concavă față de mulțimea $\mathfrak{T}_n$, are cel mult $n-1$ puncte de ordinul 1 față de mulțimea $\mathfrak{T}_1$. Acestea sînt puncte în care $f(x)$ are maxime și minime relative.

Conținutul teoremelor 22 și 23 se poate extinde și la funcții neconcave sau neconvexe față de mulțimea $\mathfrak{F}_n$. În acest caz descompunerea intervalului $[a, b]$ așa cum se cere în enunț nu mai e unică.

Teoremele expuse în acest paragraf se referă mai mult la proprietățile mulțimii de definiție a unei funcții de ordinul n față de o mulțime interpolatoare de ordinul n.

În cazul cînd mulțimea $\mathfrak{F}_n$ este liniară, aceste proprietăți sînt strîns legate de diferite aspecte ale extinderii teoremei lui Jordan, privitoare la funcții cu variație mărginită. Aceasta se observă cu ușurință de exemplu în lucrarea lui G. A s c o l i [1].

3. Înainte de a încheia acest paragraf, vom da o teoremă care conține o proprietate interesantă a funcțiilor aparținînd mulțimii $\mathfrak{F}_n$, în ipoteza că această mulțime conține un lanț interpolator $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{F}_{n-1}$ de ordinul $(1, 2, \ldots, n-1)$. Existența unui lanț interpolator de ordinul $(1, 2, \ldots, n-1)$ este asigurată, de exemplu, în cazul mulțimii $\mathfrak{T}_n$. În acest caz $\mathfrak{T}_1 \subset \mathfrak{T}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{T}_{n-1}$ formează un lanț interpolator de ordinul $(1, 2, \ldots, n-1)$ pe intervalul $(-\infty, \infty)$. Dar acesta nu este unicul lanț interpolator de ordinul $(1, 2, \ldots, n-1)$ pe care-l conține $\mathfrak{T}_n$. Aceasta se observă uşor dacă reamintim că mulţimea $\mathcal{T}_n(\alpha) \in \mathcal{T}_n$ este de tipul $I_{n-1}(-\infty, \infty)$, oricare ar fi numărul real α. Mulţimea $\mathcal{T}_{n-1}$ coincide cu $\mathcal{T}_n(0)$. Un alt exemplu ni-l oferă un sistem Cebîşev-Markoff format din funcţiile $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$. Funcţiile $\varphi_i(x), i = 1, 2, \ldots, n$ se presupun continue pe un interval $[a, b]$, iar

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \ldots & \varphi_k(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \ldots & \varphi_k(x_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1(x_k) & \varphi_2(x_k) & \ldots & \varphi_k(x_n) \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$k = 1, 2, \ldots, n,$$

oricare ar fi punctele distincte $x_1, x_2, \ldots, x_k, k = 1, 2, \ldots, n$, din intervalul $[a, b]$. Să notăm cu T_k mulţimea polinoamelor generalizate de forma $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \varphi_j(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Este evident că $T_1 \subset T_2 \subset \ldots \subset T_{n-1}$ formează un lanţ interpolator de ordinul $(1, 2, \ldots, n-1)$ al mulţimii T_n. Vom vedea în ultimul capitol al acestei lucrări că mai există şi alte exemple în acest sens, al căror studiu prezintă interes.

Conform definiţiei mulţimii $\mathcal{F}_n$, diferenţa a două funcţii distincte ale acestei mulţimi nu se poate anula decît în cel mult $n-1$ puncte din $[a, b]$. De aici rezultă că orice funcţie $\varphi(x) \in \mathcal{F}_n$, care nu aparţine mulţimii $\mathcal{F}_{n-1}$, este $(n-1)$ — valentă faţă de $\mathcal{F}_{n-1}$ şi deci, ea fiind continuă pe intervalul $[a, b]$, este $\mathcal{F}_{n-1}$-convexă sau $\mathcal{F}_{n-1}$-concavă pe acest interval. În ambele cazuri, $\varphi(x)$ are cel mult $n-2$ puncte de ordinul 1 faţă de $\mathcal{F}_1$ în (a, b), conform teoremei 20.

L e m a 11. *Dacă $\varphi(x) \in \mathcal{F}_n$ şi $\varphi(x) \bar{\in} \mathcal{F}_{n-1}$, iar $g(x)$ este o funcţie oarecare din $\mathcal{F}_1$, astfel ca $g(x) - \varphi(x)$ să se anuleze pe $n-1$ puncte distincte din $[a, b]$, $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1}$, atunci $\varphi(x)$ are $n-2$ puncte de ordinul 1 faţă de $\mathcal{F}_1$. Se presupune aici că $n \geqslant 3$.*

Demonstraţia acestei leme este imediată pe baza teoremei 13. În fiecare din intervalele (x_i, x_{i+1}), $i = 1, 2, \ldots, n-2$, $\varphi(x)$ are cîte un punct ξ_i de ordinul 1 faţă de $\mathcal{F}_1$.

L e m a 12. *Dacă ipotezele din lema 11 sînt satisfăcute şi se notează ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n-2$ punctul de ordinul 1 faţă de $\mathcal{F}_1$ al funcţiei $\varphi(x)$, care este situat în intervalul (x_i, x_{i+1}), atunci diferenţa $\varphi(x) - L(\mathcal{F}_1; \xi_i; \varphi \mid x)$ se anulează fără să schimbe semnul, pe punctul ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n-2$.*

Demonstraţia lemei 12 rezultă dacă ţinem seama de faptul că diferenţa $g(x) - L(\mathcal{F}_1; \xi_1; \varphi \mid x)$, $i = 1, 2, \ldots, n-2$, nu se poate anula nicăieri în $[a, b]$. Or, dacă $\varphi(x) - L(\mathcal{F}_1; \xi_i; \varphi \mid x)$ n-ar schimba semnul în punctul ξ_i, atunci diferenţa $g(x) - L(\mathcal{F}_1; \xi_i; \varphi \mid x)$ ar trebui să se anuleze undeva în (x_i, x_{i+1}), pentru că, în caz contrar, $\varphi(x) - L(\mathcal{F}_1; \xi_i; \varphi \mid x)$ s-ar anula pe un punct din (x_i, x_{i+2}), diferit de ξ_i, ceea ce, pe baza teoremei 13, ar atrage după sine existenţa unui punct de ordinul 1 faţă de $\mathcal{F}_1$, al funcţiei $\varphi(x)$, diferit de ξ_i, situat în intervalul (x_i, x_{i+1}) ceea ce, pe baza lemei 11, nu e posibil. Raţionamentul este valabil pentru $i = 1, 2, \ldots, n-2$.

L e m a 13. *Dacă funcţiile mulţimii $\mathcal{F}_n$ sînt derivabile, atunci în ipotezele lemei 12 avem* $\left[\frac{dL(\mathcal{F}_1; \xi_i; \varphi \mid x)}{dx}\right]_{x=\xi_i} = \left[\frac{d\varphi(x)}{dx}\right]_{x=\xi_i}$ $i = 1, 2, \ldots, n-2$.

Demonstraţia lemei 13 rezultă pe baza lemei 12 şi nu mai insistăm asupra ei. Fie $g(x)$, o funcţie oarecare din $\mathcal{F}_1$ şi $n \geqslant 3$. Să considerăm spicul

$$S\left\{\mathcal{F}_n; \begin{matrix} x_1, & x_2, \ldots, x_{n-1} \\ g(x_1), & g(x_2), \ldots, g(x_{n-1}) \end{matrix}\right\}, \text{ unde } x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1}$$

aparţin intervalului $[a, b]$. Este evident că acest spic conţine o infinitate de funcţii. Fiecare funcţie a spicului considerat, diferită de funcţia $g(x)$, are cîte un punct de ordinul 1 faţă de $\mathcal{F}_1$, în fiecare din intervalele (x_i, x_{i+1}), $i = 1, 2, \ldots, n-2$.

D e f i n i ţ i a 12. *Spicul* $S\left\{\mathcal{F}_n; \begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \\ g(x_1), g(x_2), \ldots, g(x_{n-1}) \end{matrix}\right\}$ *îl numim normal, dacă toate funcţiile diferite de $g(x)$, care îi aparţin, au aceleaşi puncte de ordinul 1 faţă de $\mathcal{F}_1$.*

În cele ce urmează vom presupune că funcţiile mulţimii sînt derivabile în (a, b) şi $n \geqslant 3$. Fie $g(x) \in \mathcal{F}_1$ şi $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ două funcţii distincte din $\mathcal{F}_n$, care nu aparţin mulţimii $\mathcal{F}_{n-1}$ şi care sînt ambele $\mathcal{F}_n$-convexe sau ambele $\mathcal{F}_n$-concave. Are loc:

T e o r e m a 25. *Să presupunem că $\varphi_1(x) - g(x)$ se anulează pe punctele $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1}$ din $[a, b]$, iar $\varphi_2(x) - g(x)$ se anulează pe punctele $x'_1 < x'_2 < \ldots < x'_{n-1}$ din $[a, b]$. Dacă punctele x'_i şi x_i se separă, iar spicele* $S\left\{\mathcal{F}_n; \begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \\ g(x_1), g(x_2), \ldots, g(x_{n-1}) \end{matrix}\right\}$ *şi* $S\left\{\mathcal{F}_n; \begin{matrix} x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n-1} \\ g(x'_1), g(x'_2), \ldots, g(x'_{n-1}) \end{matrix}\right\}$ *sînt normale, atunci cele $n-2$ puncte $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{n-2}$ de ordinul 1 faţă de $\mathcal{F}_1$, ale funcţiei $\varphi_2(x)$, separă cele $n-2$ puncte $\xi'_1 < \xi'_2 < \ldots < \xi'_{n-2}$ de ordinul 1 faţă de $\mathcal{F}_1$, ale funcţiei $\varphi_2(x)$.*

Această teoremă conţine ca un caz particular cunoscuta teoremă a lui V. A. Markov [7], relativă la separarea extremelor a două polinoame de acelaşi grad, care au toate rădăcinile reale şi ale căror rădăcini se separă. Teorema 25, mai sus enunţată, conţine toate teoremele de tipul V. A. Markov, care se pot formula pentru integralele unei ecuaţii diferenţiale, în condiţii care se vor preciza în capitolul III din lucrare. Aceste teoreme după cum se va vedea, sînt strîns legate şi de teoremele de tip Sturm.

Demonstraţia teoremei 25 se bazează pe lemele 11, 12 şi 13. Să presupunem că

$$x_1 < x'_1 < x_2 < x'_2 < \ldots < x_{n-2} < x'_{n-2} < x_{n-1} < x'_{n-1}. \tag{59}$$

Să arătăm că între două puncte consecutive din şirul

$$\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{n-2} \tag{60}$$

există întotdeauna un punct, şi unul singur, din şirul

$$\xi'_1 < \xi'_2 < \ldots < \xi'_{n-2}. \tag{61}$$

Conform ipotezelor făcute asupra funcţiilor $\varphi_1(x)$ şi $\varphi_2(x)$, diferenţa $\varphi_1(x) - g(x)$ este de semn alternativ pozitiv şi negativ în intervalele (x_i, x_{i+1}), $i = 1, 2, \ldots, n-2$.

Prin urmare, din cauza continuităţii funcţiilor care intervin, diferenţa $\varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ se anulează în cîte un punct din fiecare interval (x_i, x_{i+1}), $i = 1, 2, \ldots, n-2$. Să notăm cu x_i'' punctul din intervalul (x_i, x_{i+1}) în care $\varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ se anulează. Să ne fixăm asupra unui indice i, pentru care $\varphi_1(x_i'') = \varphi_2(x_i'') > g(x_i'')$. Cazul contrar (omiţînd evident egalitatea) se studiază în mod analog. Să presupunem că $\xi_i' < \xi_i$. Vom arăta că această inegalitate nu poate avea loc. Se observă imediat că nu putem avea $\xi_i' < x_i'' < \xi_i$, pentru că atunci am avea $\varphi_2(\xi_i') < \varphi_1(\xi_i')$ şi $\varphi_1(\xi_i) < \varphi_2(\xi_i)$. De aici ar rezulta că diferenţa $\varphi_2(x) - L(\mathcal{F}_1; \xi_i'; \varphi_2 | x)$ trebuie să se anuleze pe două puncte din intervalul (x_i, x_{i+1}'') şi deci $\varphi_2(x)$ ar avea în intervalul (x_i, x_{i+1}), două puncte de ordinul 1 faţă de $\mathcal{F}_1$, ceea ce e în contradicţie cu lema 11. În mod analog, se observă că în ipoteza făcută $\varphi_2(x) - L(\mathcal{F}_1; \xi_i; \varphi_1 | x)$ ar trebui să se anuleze pe două puncte din intervalul (x_i'', x_{i+1}) şi iarăşi am ajunge în contradicţie cu lema 11. Inegalitatea $\xi_i' < x_i'' < \xi_i$ nu poate avea deci loc. Trebuie să avem sau $\xi_i' < \xi_i < x_i''$ sau $x_i'' < \xi_i' < \xi_i$. Să admitem primul caz.

Spicul $S\left\{\mathcal{F}_n; \begin{matrix} x_1', & x_2', \ldots, x_{n-1}' \\ g(x_1'), & g(x_2'), \ldots, g(x_{n-1}') \end{matrix}\right\}$ conţine o funcţie, care pe punctul ξ_i' ia valoarea $\varphi_1(\xi_i)$. Punctul ξ_i' este punct de ordinul 1 faţă de $\mathcal{F}_1$ al acestei funcţii. Rezultă deci din inegalitatea $\xi_i' < \xi_i < x_i''$ că $\varphi_2(x)$ ar avea un punct de ordinul 1 faţă de $\mathcal{F}_1$ la stînga punctului ξ_i ceea ce nu se poate. De asemenea, se arată că nu putem avea nici $x_i'' < \xi_i' < \xi_i$. Ipoteza $\xi_i' < \xi_i$ trebuie deci înlocuită cu $\xi_i \leqslant \xi_i'$. Bazîndu-ne pe ipoteza că funcţiile din $\mathcal{F}_n$ sînt derivabile în (a, b), cazul $\xi_i = \xi_i'$ se exclude imediat, pentru că această egalitate atrage după sine existenţa unei funcţii $\varphi_2^*(x)$ în spicul $S\left\{\mathcal{F}_n; \begin{matrix} x_1', & x_2', \ldots, x_{n-1}' \\ g(x_1'), & g(x_2'), \ldots, g(x_{n-1}') \end{matrix}\right\}$, care coincide în ξ_i' cu $\varphi_1(x)$ iar diferenţa $\varphi_1(x) - \varphi_2^*(x)$ nu poate să schimbe semnul în ξ_i'. În acest caz $\varphi_1(x) - \varphi_2^*(x)$ se anulează pe $n-1$ puncte fără să schimbe semnul într-unul din ele, ceea ce nu se poate, pe baza teoremei 1.

Avem deci $\xi_i < \xi_i'$. În mod analog se observă că avem şi $\xi_i' < \xi_{i+1}$. Avem în definitiv

$$\xi_1 < \xi_1' < \xi_2 < \ldots < \xi_{n-1} < \xi_{n-2}' \tag{62}$$

ceea ce trebuia demonstrat. Ipoteza că $\varphi_1(x)$ şi $\varphi_2(x)$ sînt ambele de acelaşi caracter de convexitate faţă de $\mathcal{F}_{n-1}$, a intervenit în mod esenţial. Într-adevăr, din cauza acestei ipoteze, numerele $g(\xi_i) - \varphi_1(\xi_1)$ şi $g(\xi_i') - \varphi_2(\xi_i')$ au acelaşi semn pentru i fixat. Din acest motiv raţionamentul făcut este valabil pentru $i = 1, 2, \ldots, n-2$.

Proprietatea cuprinsă în enunţul teoremei 25 conduce şi la cîteva interpretări noi în cazul mulţimii $\mathcal{P}_n$ şi a altor mulţimi interpolatoare care conţin funcţii derivabile. Deşi teorema pare a fi foarte elementară, ea a jucat un rol important în studiul problemelor de cea mai bună aproximaţie prin polinoame. Definiţia 12 conduce la o clasificare a mulţimilor interpolatoare, pe baza proprietăţilor pe care le posedă spicul lor de ordin $n-1$. Asupra acestei clasificări nu insistăm aici.

4. În acest paragraf a intervenit în mod esenţial faptul că $\mathcal{F}_n$ conţine un lanţ interpolator de ordinul $(1, 2, \ldots, n-1)$. Se pune deci problema de a se găsi criterii care asigură existenţa unui asemenea lanţ interpolator. Problema se poate pune sub o formă mai simplă; a se găsi criterii care asigură existenţa unei submulţimi $\mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{F}_n$, care e de tipul I_{n-1} $[a, b]$. Un asemenea criteriu vom da în ultimul capitol al lucrării. Aici ne oprim puţin asupra mulţimii $\mathcal{F}_n$ cu care ne-am ocupat în capitolul 1. Am văzut că parametrul α_l, unul dintre parametri de care depindea funcţia $F(x; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, se bucură de proprietatea exprimată prin lema 5, dacă pentru orice valoare $\widetilde{\alpha}_l$, mulţimea funcţiilor $F(x; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{l-1}, \widetilde{\alpha}_l, \alpha_{l+1}, \ldots, \alpha_n)$ unde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{l-1}, \alpha_{l+1}, \ldots, \alpha_n$ sînt variabili, e de tipul I_{n-1} $[a, b]$. Are loc:

T e o r e m a 26. *Dacă parametrul α_l, posedă proprietatea de monotonie din enunţul lemei 5, oricare ar fi punctele $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, atunci mulţimea funcţiilor $F(x; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{l-1}, \widetilde{\alpha}_l, \alpha_{l+1}, \ldots, \alpha_n)$, unde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{l-1}, \alpha_{l+1}, \ldots, \alpha$, sînt variabili, este de tipul I_{n-1} $[a, b]$ oricare ar fi $\widetilde{\alpha}_l$.*

Demonstraţia, pe baza celor expuse la punctul 3 din paragraful 2 capitolul I este clară, deci nu mai insistăm asupra ei.

CAPITOLUL III

§ 1. PROPRIETĂŢI DIFERENŢIALE ALE FUNCŢIILOR DE ORDINUL n FAŢĂ DE O MULŢIME DE TIPUL I_n $[a, b]$

În acest paragraf dăm cîteva teoreme care conţin indicaţii asupra inegalităţilor diferenţiale pe care le satisfac funcţiile de ordinul n faţă de mulţimea integralelor unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n. Să considerăm ecuaţia diferenţială

$$y^n - G(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0, \tag{63}$$

asupra căreia facem următoarele ipoteze:

1° funcţia $G(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ este continuă în raport cu ansamblul variabilelor sale $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, pe domeniul definit de inegalităţile

$$a \leqq x \leqq b, \ -\infty < y < \infty, \ -\infty < y^{(i)} < \infty, \ i = 1, 2, \ldots, n+1; \ \text{(D)}$$

2° oricare ar fi punctul $x_0 \in [a, b]$, există o integrală şi una singură $y(x)$ a ecuaţiei (63), astfel ca

$$y(x_0) = y_0, \ y^{(i)}(x_0) = y_0^{(i)}, \ i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

numerele y_0, $y_0^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, fiind date arbitrar.

D e f i n i ţ i a 13. *Ecuaţia* (63) *spunem că este de tipul $\mathcal{J}_n[a, b]$ dacă sînt îndeplinite condiţiile* 1°, 2° *de mai sus şi mulţimea integralelor ei este o mulţime de tipul* I_n $[a, b]$.

În cele ce urmează vom nota cu G_n mulţimea integralelor ecuaţiei (63). Este clar că dacă ecuaţia (63) este de tipul $\mathcal{J}_n$ $[a, b]$, atunci mulţimea G_n este de tipul I_n $[a, b]$.

T e o r e m a 27. *Fie $f(x)$ o funcţie continuă pe intervalul $[a, b]$ şi cu a n-a derivată continuă în (a, b). Dacă ecuaţia* (63) *este de tipul $\mathcal{J}_n$ $[a, b]$ şi are o integrală* *care pe* $n+1$ *puncte* $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$ *din* $[a, b]$ *coincide cu* $f(x)$, *atunci există un punct* $\xi \in (x_1, x_{n+1})$, *astfel ca*

$$f^{(n)}(\xi) - G(\xi, f(\xi), f'(\xi), \ldots, f^{(n-1)}(\xi)) = 0. \tag{64}$$

Demonstrația teoremei 27 rezultă din teorema 13. În ipotezele din enunțul teoremei 27, pe baza teoremei 13, există un punct $\xi \in (x_1, x_{n+1})$, astfel ca în orice vecinătate a sa să existe $n+1$ puncte $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{n+1}$ pe care o funcție $\varphi(x)$ din G_n să coincidă cu $f(x)$, adică $D\,[G_n; \xi_1, \xi_2 \ldots, \xi_{n+1}; f] = 0$. Dar atunci, diferența $f(x) - \varphi(x)$ anulîndu-se pe punctele ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, derivata $f'(x) - \varphi(x)$ se anulează cel puțin pe cîte un punct $\xi'_i \in (\xi_i, \xi_{i+1})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $f''(x) - \varphi''(x)$ se anulează cel puțin pe cîte un punct $\xi''_i \in (\xi'_i, \xi'_{i+1})$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, și, continuînd acest raționament, derivata a n – a, $f^{(n)}(x) - \varphi^{(n)}(x)$ se anulează cel puțin pe un punct $\xi_1^{(n)} \in (\xi_1^{(n-1)}, \xi_2^{(n-1)})$. Dar punctul ξ, care figurează în concluzia teoremei 13, este punct de acumulare al mulțimii tuturor punctelor $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{n+1}$, pe care $D\,[G_n; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1}; f] = 0$, și al mulțimii tuturor punctelor $\xi_i^{(k)}$, $i = 1, 2, \ldots, n+1-k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, care se atașază, ca și mai sus, fiecărui sistem $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{n+1}$ de puncte pe care $D\,[G_n; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1}; f] = 0$. Pe baza ipotezelor de continuitate făcute în enunțul teoremei 27, rezultă că, în punctul ξ, avem $f^{(n)}(\xi) - G(\xi, f(\xi), f'(\xi), \ldots, f^{(n-1)}(\xi)) = 0$.

Această teoremă conține pe lîngă cazuri particulare multe teoreme de medie bine cunoscute, pe care nu le mai reamintim aici. De asemenea, prin particularizarea ecuației diferențiale (63) se obțin noi teoreme de medie.

L e m a 14. *Dacă ecuația* (63) *este de tipul* $\mathfrak{I}_n$ $[a, b]$, *iar funcția* $f(x)$, *de n ori derivabilă, este* G_n*-convexă pe intervalul* $[a, b]$, *atunci din*

$$\varphi(x_0) = f(x_0),\ \varphi^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x),\ i = 1, 2, \ldots, n-1,\ x_0 \in [a, b],$$

$\varphi(x)$ *aparținînd mulțimii* G_n, *rezultă*

$$\varphi(x) < f(x), \tag{65}$$

pentru $x > x_0$, *x fiind suficient de aproape de* x_0.

Pentru demonstrația lemei 14 este suficient să observăm că funcția $\varphi(x)$ din enunț, care prin definiție este unică, este limita unui șir uniform convergent de funcții din G_n, $\{L(G_n; x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}; f \mid x)\}_{i=1}^{\infty}$ punctele $x_k^{(i)}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $i = 1, 2, \ldots$, avînd ca limită punctul x_0. Funcția $f(x)$ fiind G_n-convexă, avem $D\,[G_n; x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}, x; f] > 0$ dacă $x_1^{(i)} < x_2^{(i)} < \ldots < x_n^{(i)} < x$, $i = 1, 2, \ldots$ E suficient să alegem punctele $x_k^{(i)}$ astfel: $x_1^{(i)} = x_0$, $i = 1, 2, \ldots$, $x_0 < x_2^{(1)} < x_3^{(1)} < \ldots < x_n^{(1)}$;

$$x_k^{(i)} = \frac{x_{k-1}^{(i-1)} + x_k^{(i-1)}}{2^{i-1}},\quad i = 1, 2, \ldots,\ k = 2, 3, \ldots, n,$$ pentru ca funcția limită $\varphi(x)$ să satisfacă inegalitatea (65). Are loc, de asemenea,

L e m a 15. *Dacă ecuația* (63) *este de tipul* $\mathfrak{I}_n$ $[a,b]$, *iar funcția* $f(x)$ *de n ori derivabilă este* G_n*-concavă pe intervalul* $[a, b]$ *atunci din*

$$\varphi(x_0) = f(x_0),\ \varphi^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0),\ i = 1, 2, \ldots, n-1,\ x_0 \in [a, b],$$

$\varphi(x)$ *aparținînd mulțimii* G_n, *rezultă*

$$\varphi(x) > f(x) \tag{66}$$

pentru $x > x_0$, *x fiind suficient de aproape de* x_0.

În aceleași ipoteze, în lema 14 dacă se înlocuiește G_n-convexitatea cu G_n-neconcavitate avem în loc de (65) inegalitatea $\varphi(x) \leqq f(x)$ iar în lema 15 dacă se înlocuiește G_n-concavitatea cu G_n-neconvexitate, avem în loc de (66) inegalitatea $\varphi(x) \geqq f(x)$.

T e o r e m a 28. *Dacă* $f(x)$ *este de n ori continuu derivabilă pe intervalul* $[a, b]$ *și ecuația* (63) *este de tipul* $\mathfrak{I}_n$ $[a, b]$, *atunci inegalitatea*

$$f^{(n)}(x) - G(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)) > 0,\ x \in [a, b] \tag{67}$$

este suficientă pentru ca $f(x)$ *să fie* G_n*-convexă.*

Pentru demonstrație să observăm, de la început, că inegalitatea (67) atrage după sine n-valența funcției $f(x)$ față de mulțimea G_n pe intervalul $[a, b]$. Într-adevăr, dacă $f(x)$ n-ar fi n-valentă față de G_n pe intervalul $[a, b]$, atunci ar exista $n+1$ puncte $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$ în $[a, b]$, astfel ca $D\,[G_n; x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] = 0$. Dar atunci, pe baza teoremei 27, ar exista un punct $\xi \in (x_1, x_{n+1})$ astfel ca relația (64) să aibă loc, ceea ce contrazice condiția (67) din enunț. Deci, funcția $f(x)$ este sau G_n-convexă sau G_n-concavă, dacă ipotezele din teorema 28 sînt satisfăcute. Să admitem că $f(x)$ ar fi G_n-concavă. Fie $x_0 \in (a, b)$ și $\varphi(x) \in G_n$ astfel ca $\varphi(x_0) = f(x_0)$ și $\varphi^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. În vecinătatea lui x_0 avem

$$\begin{aligned} f(x) - \varphi(x) &= f[x_0 + (x - x_0)] - \varphi[x_0 + (x - x_0)] = \\ &= \frac{(x - x_0)^n}{n!}\,[f^{(n)}(x_0) - \varphi^{(n)}(x_0) + R(x)], \end{aligned} \tag{68}$$

unde $R(x) \to 0$ cînd $|x - x_0|^n \to 0$.

Prin ipoteză $f^{(n)}(x_0) > \varphi^{(n)}(x_0)$, iar pentru $x > x_0$ avem, pe baza lemei 15, $\varphi(x) > f(x)$. Deci, dacă $x > x_0$ și x e suficient de aproape de x_0, egalitatea (68) nu poate avea loc. Prin urmare $f(x)$ nu poate fi G_n-concavă. Teorema 28 este astfel demonstrată.

În mod analog se stabilește:

T e o r e m a 29. *Dacă* $f(x)$ *este de n ori continuu derivabilă pe intervalul* $[a, b]$ *și ecuația* (63) *este de tipul* $\mathfrak{I}_n$ $[a, b]$, *atunci inegalitatea*

$$f^{(n)}(x) - G(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{n-1}(x)) < 0,\ x \in [a, b] \tag{69}$$

este suficientă pentru ca $f(x)$ *să fie* G_n*-concavă pe intervalul* $[a, b]$.

Teoremele 28 și 29 conțin condiții suficiente pentru G_n-convexitate și G_n-concavitate. Acest rezultat este completat de:

T e o r e m a 30. *Fie ecuația* (63) *de tipul* $\mathfrak{I}_n$ $[a, b]$. *Pentru ca funcția* $f(x)$, *de n ori continu derivabilă pe intervalul* $[a, b]$ *să fie* G_n*-neconcavă sau* G_n*-neconvexă pe intervalul* $[a, b]$, *este necesar și suficient să fie îndeplinită inegalitatea*

$$f^{(n)}(x) - G(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)) \geqq 0,\ x \in [a, b], \tag{70}$$

sau

$$f^{(n)}(x) - G(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)) \leqq 0,\ x \in [a, b]. \tag{71}$$

Să presupunem în ipotezele din enunț, că $f(x)$ este G_n-neconcavă pe intervalul $[a, b]$. Să arătăm că nu putem avea în nici un punct din $[a, b]$ inegalitatea

$$f^{(n)}(x) - G(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)) < 0. \qquad (72)$$

Să admitem contrariul acestei afirmații: inegalitatea (72) are loc într-un punct $x_0 \in [a, b]$. În ipoteza de G_n-neconcavitate făcută asupra funcției $f(x)$, are loc o lemă analoagă cu lema 14 semnul $<$ din (65) fiind înlocuit cu semnul $\leq$. Aplicînd în vecinătatea lui x_0 formula (68) ajungem în contradicție cu ipoteza de G_n-neconcavitate făcută asupra funcției $f(x)$. Raționamentul rămîne valabil și pentru extremitatea b a intervalului, din cauza ipotezei de continuitate făcută asupra derivatei $f^{(n)}(x)$. Necesitatea inegalității (71) pentru neconvexitate se stabilește în mod analog.

Pentru a demonstra suficiența condiției din teoremă, ne vom folosi de următoarea observație: *dacă pe un sistem de $n+1$ puncte $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$ din* $[a, b]$, avem $D[\mathfrak{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] \neq 0$, *$\mathfrak{F}_n$ fiind o mulțime de tipul I_n* $[a, b]$ *și $f(x)$ continuă pe* $[a, b]$, *atunci există un punct $\xi \in (x_1, x_{n+1})$, astfel ca în orice vecinătate a lui să existe $n+1$ puncte $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{n+1}$ pentru care sgn $D[\mathfrak{F}_n;$ $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1}; f]$* $= \operatorname{sgn} D[\mathfrak{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f]$.

Să presupunem că — în ipotezele din enunțul teoremei — inegalitatea (70) are loc și funcția $f(x)$ nu este G_n-neconcavă pe intervalul $[a, b]$. Atunci există $n+1$ puncte $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$ în $[a, b]$, pe care $D[G_n; x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] < 0$. În punctul ξ, care figurează în observația de mai sus, are loc și inegalitatea (65). Aplicînd formula (68), ajungem în contradicție cu inegalitatea (70). La fel se studiază inegalitatea (71). Inegalitățile diferențiale expuse în acest paragraf sînt analoage cu cele cunoscute pentru funcțiile convexe obișnuite. Ele prezintă un interes nu numai pentru faptul că generalizează niște proprietăți cunoscute, ci mai ales pentru aplicațiile lor la studiul ecuațiilor diferențiale ordinare.

§ 2. ASUPRA PROBLEMEI POLILOCALE PENTRU ECUAȚII DIFERENȚIALE ORDINARE

1. Ideea de a utiliza inegalitățile diferențiale în studiul anumitor probleme privitoare la ecuații diferențiale ordinare, se întîlnește la mai mulți autori [6], [28], [27]. Însăși metoda de integrare numerică a lui Ciaplîghin se bazează pe o prealabilă studiere a inegalităților diferențiale. Inegalitățile diferențiale ale lui Ciaplîghin sînt legate de problema lui Cauchy pentru ecuații diferențiale. Inegalitățile diferențiale pe care le-am dat în primul paragraf al acestui capitol sînt legate de problema polilocală pentru ecuații diferențiale.

Fiind dată ecuația diferențială

$$G(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \qquad (73)$$

problema n-locală revine la existența și unicitatea integralei $y(x)$, care pe n puncte distincte date să ia valori date. Problema n locală pentru ecuația (73) implică deci mai multe aspecte de studiu; caracterizarea ecuațiilor de forma (73) pentru care pe un interval dat I, mulțimea G_n a integralelor este de tipul $I_n\{I\}$; determinarea maximului distanței $x_n - x_1 = h$, astfel ca, dacă $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ și $y_1, y_2, \ldots, y_n$

sînt numere arbitrare, să fie asigurată existența și unicitatea integralei $y(x)$, care satisface relațiile $y(x_i) = y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Problema lui Cauchy apare ca și caz limită al problemei n-locale, cînd punctele x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, tind către un punct x_0.

Problema polilocală, în toată generalitatea ei, mai conține și alte aspecte cu care nu ne ocupăm aici *). Scopul pe care-l urmărim în acest paragraf este de a expune cîteva rezultate privitoare la problema n- locală, care se stabilesc cu ajutorul noțiunii de convexitate definită în capitolul II.

2. Dacă ecuația (73) este de forma

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = 0, \qquad (74)$$

$a_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, fiind funcții continue pe un interval dat I, iar $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ fiind un sistem fundamental de integrale ale ecuației (74), existența și unicitatea integralei y (x), astfel ca $y(x_i) = y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, x_i fiind puncte distincte ale intervalului I, iar y_i, numere oarecare, este echivalentă cu proprietatea ca determinantul

$$V\begin{pmatrix} \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \ldots & \varphi_n(x_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \ldots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix} \qquad (*)$$

să fie diferit de zero. Dacă notăm cu L_n mulțimea integralelor ecuației (74) are loc propoziția: *pentru ca mulțimea L_n să fie de tipul $I_n\{I\}$, este necesar și suficient ca oricare ar fi punctele distincte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ din intervalul I, determinantul $V\begin{pmatrix} \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix}$ să fie diferit de zero.* Această proprietate a determinantului (*) este echivalentă cu: funcțiile $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ formează un sistem Cebîșev, pe intervalul I, adică nici o integrală a ecuației (74) nu se poate anula decît pe cel mult $n-1$ puncte ale intervalului I.

Dacă ecuația (74) *are coeficienți constanți, atunci condiția necesară și suficientă ca L_n să fie de tipul I_n* $(-\infty, \infty)$ este ca toate rădăcinile ecuației caracteristice să fie reale [16].

3. Definiția 14. *Fie $\mathfrak{F}_n^*$ o mulțime oarecare de funcții definite pe un interval I. Funcția $f(x)$, definită pe intervalul I, o numim pozitiv n-valentă (negativ n-valentă)*

*) Fiind date m puncte $x_1, x_2, \ldots, x_m$, $m \leq n$ și numerele $y_1, y_1', \ldots, y_1^{(k_1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(k_2)}$ $\ldots, y_m, y_m', \ldots, y_m^{(k_m)}$, să se studieze existența și unicitatea integralei $y(x)$ astfel ca să avem

$$y(x_i) = y_i, \; i = 1, 2, \ldots, m,$$
$$y'(x_1) = y_1', \; y''(x_1) = y_1'', \ldots, y^{(k_1)}(x_1) = y_1^{(k_1)},$$
$$y'(x_2) = y_2', \; y''(x_2) = y_2'', \ldots, y^{(k_2)}(x_2) = y_2^{(k_2)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y'(x_m) = y_m', \; y''(x_m) = y_m'', \ldots, y^{(k_m)}(x_m) = y_m^{(k_m)},$$

în ipoteza că $(k_1 + 1) + (k_2 + 1) + \ldots + (k_m + 1) = n$.

față de mulțimea $\mathcal{F}_n^*$, *dacă pentru orice funcție* $\varphi(x) \in \mathcal{F}_n^*$ *diferența* $\varphi(x) - f(x)$ *nu se anulează decît pe cel mult n puncte din intervalul I, iar dacă* $\varphi(x_i) - f(x_i) = 0$ *pentru n puncte* $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, *astfel ca* x_n *să fie în interiorul intervalului I, atunci* $f(x) - \varphi(x) > 0$ *pentru* $x > x_n$ $(f(x) - \varphi(x) < 0$ *pentru* $x > x_n)$.

Se observă imediat că dacă $\mathcal{F}_n^*$ este de tipul I_n $\{I\}$, atunci pozitiv n-valența funcției $f(x)$ este echivalentă cu convexitatea față de mulțimea $\mathcal{F}_n^*$ pe intervalul I, iar negativ n-valența cu concavitatea față de $\mathcal{F}_n^*$ pe intervalul I. Desigur, se pune problema dacă are sens să vorbim de pozitiv n-valență sau negativ n-valență față de o mulțime $\mathcal{F}_n^*$ despre care nu știm dacă este interpolatoare de ordinul n. Pentru a da un răspuns acestei probleme, este suficient să considerăm două ecuații diferențiale

$$y^{(n)} - G_1(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0, \tag{75}$$

$$y^{(n)} - G_2(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0, \tag{76}$$

unde funcțiile $G_1(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ și $G_2(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ sînt ambele definite pe același domeniu

$$D^*;\ a \leqslant x \leqslant b,\ -\infty < y < \infty,\ -\infty < y^{(i)} < \infty,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

și avem în orice punct al domeniului D^* inegalitatea

$$G_2(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) > G_1(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}).$$

În aceste ipoteze, dacă ecuația (76) este de tipul $\mathcal{I}_n$ $[a, b]$, atunci orice integrală a ei este negativ n-valentă față de mulțimea *) integralelor ecuației (75).

D e f i n i ț i a 15. *O mulțime* M_n *de funcții continue pe un interval I, o numim de tipul* K_n $\{I\}$ *dacă:* 1° *pentru orice sistem de n puncte distincte* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *din I și pentru orice sistem de numere* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *există în* M_n *o funcție* $\psi(x)$, astfel ca $\psi(x_i) = y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$; 2° *două funcții distincte din* M_n *nu pot să coincidă pe un subinterval al intervalului I.*

Fie de exemplu $n = 1$, iar M_1 mulțimea formată din polinoamele de gradul întîi de forma αx, unde α parcurge mulțimea numerelor reale și mulțimea constantelor. Oricare ar fi intervalul I, conținînd și originea, această mulțime este de tipul $K_1(I)$ fără să fie de tipul I_1 $\{I\}$.

T e o r e m a 31. *Dacă* $\mathcal{L}_2$ *este o mulțime liniară de tipul* K_2 $[a, b]$ *și există o funcție* $\varphi(x)$, *continuă pe intervalul* $[a, b]$, *pozitivă pentru* $x \in (a, b)$, *negativ bivalentă față de* $\mathcal{L}_2$, *atunci mulțimea* $\mathcal{L}_2$ *este de tipul* I_2 $[a, b)$.

Pentru demonstrație să presupunem — în ipotezele din enunț — contrariul concluziei. Fie $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ două puncte cu abscisele $x_1 < x_2$, situate în intervalul $[a, b]$. Să presupunem că există două funcții distincte $g_1(x)$, $g_2(x)$ în mulțimea $\mathcal{L}_2$, astfel ca $g_1(x_1) = g_2(x_1) = y_1$, $g_1(x_2) = g_2(x_2) = y_2$. Avem de considerat două cazuri; cel puțin unul din numerele y_1, y_2, este diferit de zero; numerele y_1, y_2 sînt ambele egale cu zero. În primul caz, diferența $g(x) = g_1(x) - g_2(x)$ este o funcție din $\mathcal{L}_2$ care se anulează pe punctele x_1, x_2. Există întotdeauna

*) Evident în ipoteza că această mulțime nu e vidă.

un interval $[\alpha, \beta] \subseteq [x_1, x_2]$, astfel ca $g(x) \neq 0$ pentru $x \in (\alpha, \beta)$ și $g(\alpha) = g(\beta) = 0$*). Putem presupune $g(x) > 0$ în (α, β). În caz contrar, considerăm funcția $c_1 g(x)$ unde c_1 este un număr < 0. Dacă c este o constantă convenabil aleasă, funcția $cg(x) \in \mathcal{L}_2$ coincide cu $\varphi(x)$ pe două puncte $x_1' < x_2'$, astfel ca $x_2' < \beta$ și $\varphi(x) > cg(x)$ pentru $x > x_2'$, x fiind suficient de aproape de x_2'. Aceasta este în contradicție cu ipoteza făcută asupra funcției $\varphi(x)$.

În cazul al doilea, $y_1 = y_2 = 0$, mulțimea $\mathcal{L}_2$ conține funcțiile $g_1(x)$, $g_2(x)$, care se anulează pe două puncte distincte din $[a, b)$. Asupra oricăreia din ele putem face raționamentul făcut mai sus asupra funcției $g(x)$. Concluzia din teoremă are deci loc.

T e o r e m a 32. *Dacă* $\mathcal{L}_n$ *este o mulțime de tipul* K_n $[a, b]$, $n > 2$, *și există o funcție* $\varphi(x)$, *continuă pe intervalul* $[a, b]$, *negativ n-valentă față de mulțimea* $\mathcal{L}_n$, *astfel ca* $\varphi(a) = 0$ *și* $\varphi(x) > 0$ *pentru* $x \in (a, b)$, *atunci mulțimea* $\mathcal{L}_n$ *este de tipul* I_n $[a, b]$.

Pentru demonstrație să presupunem îndeplinite ipotezele din enunț și fie $g_1(x)$ și $g_2(x)$ două funcții distincte din mulțimea $\mathcal{L}_n$, care coincide pe punctele $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, unde $a \leqq x_1$ și $x_n < b$. Avem de considerat două cazuri; cel puțin unul dintre numerele $g_1(x_i) = g_2(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots n$, este diferit de zero; toate numerele $g_1(x_i) = g_2(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, sînt egale cu zero. Din cauza liniarității mulțimii $\mathcal{L}_n$, este suficient să considerăm funcția $g(x) = g_1(x) - g_2(x)$, care aparține mulțimii $\mathcal{L}_n$ și care se anulează pe punctele x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Ca și în cazul $n = 2$, se observă și aici că, dacă c este o constantă convenabil aleasă, atunci funcția $cg(x) \in \mathcal{L}_n$, coincide**) cu $\varphi(x)$ pe n puncte $x_1' < x_2' < \ldots < x_n'$ din intervalul $[a, b)$ și $\varphi(x) - cg(x) > 0$ pentru $x > x_n$, x fiind suficient de aproape de x_n'. Aceasta fiind în contradicție cu ipoteza făcută asupra funcției $\varphi(x)$, concluzia din teoremă are loc.

În enunțul teoremelor 31 și 32 a fost omis cazul $n = 1$. Acest caz prezintă o particularitate. Are loc:

L e m a 16. *Dacă mulțimea* $\mathcal{L}_1$ *este de tipul* K_1 $[a, b]$ *și există o funcție* $\varphi(x)$, *continuă pe intervalul* $[a, b]$, *pozitivă pentru* $x \in (a, b)$ *și negativ univalentă față de* $\mathcal{L}_1$ *pe intervalul* $[a, b]$, *atunci mulțimea* $\mathcal{L}_1$ *este de tipul* I_1 (a, b).

Pentru demonstrația lemei 16 este suficient să presupunem — în ipozetele din enunț — că ar exista un punct $x_1 \in (a, b)$, astfel ca două funcții $g_1(x)$, $g_2(x)$, distincte din $\mathcal{L}_1$, să coincidă pe punctul x_1. Diferența $g(x) = g_1(x) - g_2(x)$ aparține mulțimii și se anulează pentru $x = x_1$. Există o constantă c astfel ca funcția $cg(x) \in \mathcal{L}_1$ să coincidă cu funcția $\varphi(x)$ pe un punct $x_1 \in [a, b]$ și astfel ca $\varphi(x) > cg(x)$, pentru $x > x_1$, x fiind suficient de aproape de x_1. Aceasta fiind în contradicție cu ipoteza făcută asupra funcției $\varphi(x)$, lema 16 e demonstrată. Se observă că, în concluzia lemei, figurează proprietatea $I_1(a, b)$ și nu I_1 $[a, b]$. Într-adevăr, dacă $x_1 = a$, raționamentul nu mai rămîne valabil.

*) Aceasta rezultă din proprietățile mulțimii de puncte pe care funcția continuă $g(x)$ neidentic nulă se anulează.

**) Existența punctelor x_i', $i = 1, 2, \ldots, n$, este asigurată întotdeauna, pentru că există cel puțin $p = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$ puncte $x_1^* < x_2^* < \ldots < x_p^*$ care sînt separate de un grup de $p + 1$ dintre punctele x_i și astfel ca numerele $g(x_i^*)$, $i = 1, 2, \ldots, p$, să aibă același semn.

Observație. Restricția făcută în definiția 15, ca două funcții distincte din mulțimea M_n să nu poată coincide pe un subinterval al intervalului I se observă că este esențială, dar ea nu va restrînge generalitatea problemelor pe care urmează să le tratăm, pentru că atunci, cînd M_n este mulțimea integralelor unei ecuații diferențiale liniare și omogene, ne interesează numai cazul cînd este asigurată existența și unicitatea în problema lui Cauchy.

4. D e f i n i ț i a 16. *Fiind dată mulțimea liniară L de funcții definite pe un interval I, spunem că funcțiile liniar independente $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ ale mulțimii* L *formează o bază a mulțimii L, dacă :*

1° *pentru orice funcție $g(x)$ din L există n numere reale* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ astfel ca $g(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(x)$;

2° *nici una din funcțiile $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, nu se poate anula pe un subinterval al intervalului I.*

D e f i n i ț i a 17. *Fiind dată mulțimea liniară L de funcții continue pe un interval I, spunem că funcțiile* $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$, din *mulțimea L, formează o bază interpolatoare a mulțimii L, pe intervalul I, dacă :*

1° *oricare ar fi numerele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, nu toate nule, funcția $g(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(x)$ nu se poate anula decît pe cel mult $n-1$ puncte ale intervalului I;*

2° *pentru orice funcție $g(x)$ din L, există n numere reale $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ astfel ca $g(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(x)$.*

T e o r e m a 33. *Pentru ca mulțimea liniară L de funcții continue pe un interval I să fie de tipul I_n $[I]$, este necesar și suficient ca L să posede o bază interpolatoare pe intervalul I, format din n funcții $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$.*

Demonstrația acestei teoreme am dat-o în lucrarea [10]. Aici ne interesează aplicațiile ei.

T e o r e m a 34. *Dacă $\mathcal{L}_2$ este o mulțime liniară de funcții continue pe intervalul $[a, b]$ și ea conține o bază formată din funcțiile $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$, atunci din existența unei funcții $\varphi(x)$ continue pe intervalul $[a, b]$ care este pozitivă pentru $x \in (a, b)$ și negativ bivalentă față de $\mathcal{L}_2$* pe $[a, b]$ *rezultă proprietatea I_n $[a, b)$ a mulțimii $\mathcal{L}_2$.*

Demonstrația teoremei 34 rezultă imediat pe baza teoremelor 31 și 32. Deci nu mai insistăm asupra ei.

T e o r e m a 35. *Dacă $\mathcal{L}_n$ este o mulțime liniară de funcții continue pe intervalul $[a, b]$ și ea conține o bază formată din funcțiile $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$, $n > 2$, atunci din existența unei funcții $\varphi(x)$, continue pe intervalul $[a, b]$, care e pozitivă pentru $x \in (a, b)$ și negativ n-valentă față de $\mathcal{L}_n$ pe $[a, b]$* și *$\varphi(a) = 0$, rezultă proprietatea I_n $[a, b]$ a mulțimii $\mathcal{L}_n$.*

Demonstrația teoremei 35 rezultă pe baza teoremei 32.

5. Fie dată ecuația diferențială

$$L_2(y) = y'' + p(x) y' + q(x) y = 0, \tag{77}$$

unde $p(x)$ și $q(x)$ sînt funcții continue pe intervalul finit și închis $[a, b]$. Spunem că o integrală $y(x)$ a ecuației (77) este neoscilatoare pe intervalul $[a, b]$, dacă

ea nu se anulează decît pe cel mult un punct al acestui interval. În caz contrar, $y(x)$ este oscilatoare pe intervalul $[a, b]$. Fie L_2 mulțimea integralelor ecuației (77). Dacă toate integralele ecuației (77) sînt neoscilatoare pe intervalul $[a, b]$, atunci L_2 este o mulțime de tipul I_2 $[a, b]$. Are loc:

T e o r e m a 36. *Pentru ca mulțimea L_2 să fie de tipul I_2 $[a, b]$ este necesar și suficient să existe o funcție $u(x)$, de două ori derivabilă pe intervalul $[a, b]$, care satisface condițiile :*

1° $u(x) > 0$ *pentru* $x \in (a, b)$; 2° $L(u) \leq 0$.

Această teoremă se datorește lui P. K o n d r a t i e v [6]. Suficiența condiției din teoremă a fost semnalată încă de către C h . d e l a V a l l e e P o u s s i n [24]. Dăm aici o demonstrație bazată pe noțiunea de funcție convexă.

Pentru demonstrația necesității condiției din teoremă, este suficient să observăm că dacă L_2 este de tipul I_2 $[a, b]$, atunci există o integrală $y(x)$ a ecuației (77), care este pozitivă pe întreg intervalul $[a, b]$. Într-adevăr, în acest caz funcția $L(L_2; a, b; y_1, y_2 \mid x)$, unde $y_1 > 0$, $y_2 > 0$ sînt oarecare, nu se poate anula nicăieri în (a, b), pentru că, dacă am avea $L(L_2; a, b; y_1, y_2 \mid x_0) = 0$ pentru $x_0 \in (a, b)$, atunci, deoarece funcția constant egală cu zero pe $[a, b]$ aparține lui L_2, funcția $L(L_2; a, b; y_1, y_2 \mid x)$ ar trebui să schimbe semnul în x_0 și aceasta ar atrage după sine existența a încă unui punct $x_1 \neq x_0$ în care ea să se anuleze, ceea ce nu se poate.

Pentru demonstrația suficienței condiției din teoremă, să presupunem condiția satisfăcută și să admitem că ar exista o integrală $y(x)$, astfel ca $y(x_1) = y(x_2) = 0$, x_1, x_2, fiind puncte din intervalul $[a, b]$. Întotdeauna putem face ipoteza că $y(x) \neq 0$ în intervalul (x_1, x_2), pentru că punctele din $[a, b]$ pe care o integrală a ecuației (77) se anulează sînt izolate.

Fie $y(x) > 0$ pentru $x \in (x_1, x_2)$. Pe baza teoremei lui S t u r m [26], mulțimea L_2 este de tipul I_2 (x_1, x_2). În caz contrar ar exista o integrală care s-ar anula pe două puncte din (x_1, x_2) și deci $y(x)$ ar trebui, de asemenea, să se anuleze pe cel puțin un punct din (x_1, x_2), ceea ce contrazice ipoteza făcută asupra lui $y(x)$. Dacă L_2 este de tipul I_2 (x_1, x_2), atunci în orice interval închis din interiorul intervalului (x_1, x_2) putem aplica funcției $u(x)$ teorema 30, deci $u(x)$ este o funcție L_2 — neconvexă pe orice interval $[\alpha, \beta] \subset (x_1, x_2)$. Pentru o constantă c convenabil aleasă, integrala $cy(x)$ coincide cu $u(x)$ pe două puncte $x_1' < x_2'$ din (x_1, x_2) și $u(x) - L(L_2; x_1', x_2'; u \mid x) > 0$ pentru un punct $x \in (x_1', x_2')$, ceea ce e în contradicție cu ipoteza de L_2 — neconvexitate. Un asemenea punct x este clar că există.

Punctele x_1, x_2 au fost arbitrar alese în intervalul $[a, b]$ deci proprietatea din enunțul teoremei are loc.

Din teorema 36 rezultă mai multe criterii, care permit studiul proprietății interpolatoare a mulțimii L_2. Vom înșira cîteva dintre ele.

1° dacă ecuația (77) are o integrală pozitivă în $[a, b]$, atunci mulțimea L_2 este de tipul I_2 $[a, b]$;

2° dacă $-q(x)\, x^2 + [q(x)\,(a + b) - 2p(x) - 2]\, x + p(x)\,(a + b) - q(x)\, ab \leq 0$, atunci L_2 este de tipul I_2 $[a, b]$;

3° dacă $q(x) \leq 0$ pentru $x \in [a, b]$, atunci L_2 este de tipul I_2 $[a, b]$;

4° dacă $u(x)$ este o funcție care se anulează pe punctele $x_1 < x_2$ din $[a, b]$ astfel ca $u(x) > 0$ pentru $x \in (x_1, x_2)$ și $L(u) > 0$, atunci L_2 nu poate fi de tipul I_2 $[x_1, x_2]$.

Această ultimă proprietate o vom explica. Dacă L_2 ar fi de tipul $I_2\ [x_1, x_2]$, atunci $u(x)$ ar fi o funcție L_2 — convexă pe intervalul $[x_1, x_2]$, pe baza inegalității $L(u) > 0$. Dar, în acest caz, inegalitatea $u(x) > 0$ nu poate avea loc în (x_1, x_2).

6. Fie dată ecuația

$$L_n(y) = y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = 0, \tag{78}$$

unde coeficienții $a_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, sînt funcții continue pe intervalul $[a, b]$ și $n \geqq 2$. Să notăm cu L_n mulțimea integralelor ecuației (78). Are loc

T e o r e m a 37. *Pentru ca mulțimea L_n să fie de tipul $I_n\ [a, b]$ este necesar și suficient să existe o ecuație diferențială $y^n - G(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0$ de tipul $\mathcal{J}_n\ [a, b]$ care să satisfacă următoarele condiții:*

1° $y^n - \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, y^{(n-i)} \leqq y^{(n)} - G(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, *oricare ar fi integrala $y(x)$ a ecuației (78);*

2° *ecuația $y^{(n)} - G(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0$ să posede o integrală $u(x)$, pozitivă în intervalul (a, b) și astfel ca pentru $n > 2$ să avem $u(a) = 0$.*

Demonstrația necesității condiției din teoremă se bazează pe următoarea lemă.

L e m a 17. *Dacă mulțimea L_2 este de tipul $I_n\ [a, b]$, $n > 2$, atunci există o integrală $y(x)$ a ecuației (78), astfel ca $y(a) = 0$ și $y(x) > 0$ pentru $x \in (a, b)$.*

Să indicăm mai întîi demonstrația lemei 17. Să presupunem ipotezele din enunț satisfăcute. Oricare ar fi punctele $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1}$, integrala $L(L_n;\ x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b;\ \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, 1 \mid x)$ nu se mai anulează în nici un punct diferit de x_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Pentru a construi o integrală $y(x)$ care să satisfacă condiția din enunț este suficient să considerăm un șir de integrale

$$\left\{ L\left(L_n;\ x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_{n-1}^{(i)}, b;\ \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, 1 \mid x\right) \right\}_{i=1}^{\infty}, \tag{79}$$

astfel ca șirurile de puncte $a = x_1^{(i)} < x_2^{(i)} < \ldots < x_{n-1}^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots$, să aibă limita comună a. Atunci șirul de funcții (79) converge uniform către o integrală $y(x)$, care satisface condițiile din enunțul lemei 17.

Pentru a demonstra teorema 37 observăm că necesitatea condiției din enunț rezultă pentru $n > 2$ din lema 17, iar pentru $n = 2$ pe baza demonstrației pe care am dat-o teoremei 36.

Pentru a demonstra suficiența condiției din teoremă, observăm că, dacă ipotezele din enunț sînt satisfăcute, atunci integralele ecuației $y^n - G(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ sînt toate negativ n-valente față de mulțimea L_n, dacă în condiția 1° din enunț are loc semnul $<$. În acest caz, demonstrația e clară pe baza teoremelor 29 și 30 *). Dacă în condiția 1° din enunț avem chiar semnul $\leqq$, atunci demonstrația este de asemenea imediată, pentru că n-avem decît să presupunem că în mulțimea L_n ar exista o funcție care s-ar anula pe n puncte $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ din intervalul $[a, b]$.

*) Trebuie să observăm aici că proprietatea interpolatoare are loc chiar pe intervalul închis $[a, b]$, pentru că putem aplica proprietățile funcțiilor convexe și concave din capitolul II.

Această funcție fiind neconcavă față de mulțimea integralelor ecuației $y_n - G(x, y, \ldots, y^{(n-1)}) = 0$, condiția 2° din enunț, ne conduce la contradicție cu această proprietate de neconcavitate (ca și în demonstrația teoremei 35). Rezultă că mulțimea L_n trebuie să fie de tipul $I_n\ [a, b]$.

7. Din teorema 37 rezultă cîteva criterii pe baza cărora se poate studia proprietatea interpolatoare a unei ecuații de forma (78). În cele ce urmează enunțăm cîteva din aceste criterii, sub formă de leme.

L e m a 18. *Dacă există o funcție $u(x)$, care se anulează pe punctele $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ din $[a, b]$, schimbînd semnul pe punctele x_i interioare intervalului $[a, b]$ și astfel ca $u(x) > 0$ pentru $x \in (x_{n-1}, x_n)$, atunci din inegalitatea $L(u) < 0$ rezultă că mulțimea L_n nu poate să fie de tipul $I_n\ [a, b]$.*

L e m a 19. *Dacă există funcția $u(x)$, care se anulează pe punctele $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ din intervalul $[a, b]$, schimbînd semnul pe punctele x_i din interiorul intervalului $[a, b]$ și astfel ca $u(x) < 0$ pentru $x \in (x_{n-1}, x_n)$, atunci din inegalitatea $L(u) < 0$ rezultă că mulțimea L_n nu poate să fie de tipul $I_n\ [a, b]$.*

L e m a 20. *Dacă $y^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, y^{(n-1)} < y^{(n)} - G(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, pentru orice punct al domeniului*

$$D:\ a \leqq x \leqq b\ ,\quad -\infty < y < \infty\ ,\quad -\infty < y^{(i)} < \infty\ ,\quad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

atunci dacă ecuația $y^{(n)} - G(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ este de tipul $\mathcal{J}_n\ [a, b]$ și are integrală $u(x)$ care satisface condiția 2° din enunțul teoremei 37, mulțimea L_n este de tipul $I_n\ [a, b]$.

Observație. În enunțul teoremei 37 inegalitatea din condiția 1° se referă la integralele ecuației (78), în timp ce în lema 20 inegalitatea din enunț se referă la domeniul D, de definiție a funcțiilor de $n + 2$ variabile $\mathcal{G}_1(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = y^{(n)} + \sum_{i=1}^{\infty}{}' a_i(x)\, y^{(n-i)}$ și $\mathcal{G}_2(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = y^{(n)} - G(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$.

CAPITOLUL IV

§ 1. PROBLEMA CELEI MAI BUNE APROXIMAȚII ÎN SENSUL LUI P. L. CEBÎȘEV PRIN FUNCȚII DINTR-O MULȚIME DE TIPUL $I_n\ [a, b]$

1. Fie $\mathcal{F}_n$ o mulțime de tipul $I_n\ [a, b]$. Fie E o mulțime închisă de puncte ale intervalului $[a, b]$. Funcția $f(x)$ fiind definită pe mulțimea E, introducem notația

$$\mathcal{E}\{f; \mathcal{F}_n; E\} = \inf_{\varphi(x) \in \mathcal{F}_n} \{\sup_{x \in E} |\varphi(x) - f(x)|\}. \tag{80}$$

În cele ce urmează presupunem că mulțimea E, dacă e finită, conține cel puțin $n + 1$ puncte, iar funcția $f(x)$ nu se reduce la o funcție din $\mathcal{F}_n$ pe mulțimea E. Numărul $\mathcal{E}\{f; \mathcal{F}_n; E\}$ se numește *cea mai bună aproximație a funcției $f(x)$*, pe mulțimea E, prin funcții din mulțimea $\mathcal{F}_n$. Cu studiul celei mai bune aproximații prin funcții aparținînd mulțimii $\mathcal{F}_n$, s-au ocupat I. S. P i n s k e r și N o v o d v o r s k i [14], M. I. M o r o z o v [11], S. F. P o s z k o w s k i [12], V. N. B u r o v [4], L. T o r n h e i m [29]. În lucrarea [10] am dat cîteva proprietăți referitoare la cea mai bună aproximaţie prin funcţii din $\mathcal{F}_n$, a funcţiilor de ordinul n faţă de $\mathcal{F}_n$. Studiul celei mai bune aproximaţii prin funcţii aparţinînd unei mulţimi interpolatoare neliniare, prezintă interes, pentru că în multe probleme de aproximaţie, pînă la apariţia maşinilor rapide de calcul, aspectul neliniar, din cauza complicaţiei calculului, a fost evitat. Nu sînt studiate, de exemplu, proprietăţile celei mai bune aproximaţii prin integrale ale unei ecuaţii diferenţiale neliniare.

Studiul celei mai bune aproximaţii prin funcţii aparţinînd unei mulţimi de tipul $I_n\,[a, b]$ ridică următoarele probleme: 1° existenţa unei funcţii $\varphi\,(x) \in \mathcal{F}_n$, pentru care cea mai bună aproximaţie este atinsă, adică

$$\sup_{x \in E} \,|\, \varphi\,(x) - f(x)\,| = \mathcal{E}\,\{\,f; \mathcal{F}_n\,;\, E\,\}\,; \tag{81}$$

2° punerea în evidenţă a claselor de funcţii $f(x)$ pentru care funcţia $\varphi\,(x)$, care satisface relaţia (81) este *unică* şi 3° caracterizarea funcţiei $\varphi\,(x)$ în condiţii date pentru funcţia $f(x)$ şi pentru mulţimea E.

La aceste 3 probleme, care, în cazul cînd $\mathcal{F}_n$ se înlocuieşte cu $\mathcal{P}_n$, au devenit clasice, se mai adaugă *studiul celei mai bune aproximaţii a funcţiilor de ordinul n faţă de* $\mathcal{F}_n$.

În acest paragraf vom enunţa fără demonstraţii rezultatele privitoare la problemele 1°—3° şi ne vom opri mai pe larg asupra celei mai bune aproximaţii a funcţiilor de ordinul n faţă de o mulţime de tipul $I_n\,[a, b]$.

2. T e o r e m a 38. *Dacă $f(x)$ este mărginită pe mulţimea E, atunci există în $\mathcal{F}_n$ o funcţie $\varphi\,(x)$, pentru care are loc relaţia* (81).

Demonstraţia acestei teoreme se bazează pe teorema 3 şi pe definiţia numărului $\mathcal{E}\,\{\,f;\ \mathcal{F}_n;\ E\}$.

T e o r e m a 39. *Dacă $f\,(x)$ este o funcţie continuă pe mulţimea E, atunci există în $\mathcal{F}_n$ o funcţie şi una singură $\varphi\,(x)$, pentru care are loc relaţia* (81).

Această teoremă aparţine lui M. I. M o r o z o v [11]. În cazul particular, cînd mulţimea E este chiar intervalul $[a, b]$, teorema 39 a fost demonstrată şi de L. T o r n h e i m [29].

D e f i n i ţ i a 18. *Dacă $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1}$, o funcţie $\psi\,(x) \in \mathcal{F}_n$ care satisface inegalităţile* $\operatorname{sgn}\,\{f(x_i) - \psi\,(x_i)\} = (-1)^i \varepsilon$, *unde* $\varepsilon = +1$ *sau* $\varepsilon = -1$, *se numeşte funcţie oscilatorie pe punctele* x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, *relativă la funcţia* $f(x)$.

D e f i n i ţ i a 19. *Dacă $\psi\,(x) \in \mathcal{F}_n$ este o funcţie oscilatoare pe punctele* $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1}$, *relativă la funcţia* $f(x)$ *şi* $|\,f(x_i) - \psi\,(x_i)\,| = \mu$, $i = 1, 2, \ldots, n, n+1$, $\mu \geqq 0$, *atunci $\psi\,(x)$ se numeşte egal-oscilatoare.*

T e o r e m a 40. *Dacă mulţimea E, e formată din $n + 1$ puncte,* $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$, *atunci funcţia $\varphi(x) \in \mathcal{F}_n$, pentru care are loc relaţia* (81), *este egal oscilatoare pe punctele x_i, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, relativă la funcţia $f(x)$.*

Această teoremă aparţine lui M. I. M o r o z o v [11]. Din ea rezultă imediat şi unicitatea funcţiei de cea mai bună aproximaţie, cînd $f(x)$ e definită pe $n+1$ puncte.

T e o r e m a 41. *Dacă $f(x)$ este o funcţie continuă pe mulţimea E, şi $\varphi(x) \in \mathcal{F}_n$ este funcţia pentru care are loc relaţia* (81), *atunci există în mulţimea E, $n+1$ puncte $x_1' < x_2' < \ldots < x_{n+1}'$, pe care $\varphi\,(x)$ este egal oscilatoare relativ la $f\,(x)$ şi pentru care avem* $|\,\varphi\,(x^{i'}) - f(x_i')\,| = \mathcal{E}\,\{f; \mathcal{F}_n; E\}$.

Aceasta este generalizarea teoremei lui Cebîşev, dată de M. I. M o r o z o v [11]. În cazul particular, cînd E este intervalul $[a, b]$, ea a fost demonstrată şi de L. T o r n h e i m [29]. Punctele x_i', din enunţul teoremei 41 le numim puncte de abatere maximă.

T e o r e m a 42. *Dacă $f\,(x)$ este continuă pe mulţimea E, atunci are loc relaţia*

$$\mathcal{E}\,\{\,f;\ \mathcal{F}_n;\ E\} = \sup_{E_{n+1} \subset E} \mathcal{E}\,\{\,f; \mathcal{F}_n;\ E_{n+1}\},$$

unde E_{n+1} este un sistem oarecare de $n+1$ puncte ale mulţimii E.

Aceasta este generalizarea teoremei lui Ch. de la Vallée Poussin dată de M. I. M o r o z o v [11]. În baza acestei teoreme, cea mai bună aproximaţie a funcţiei continue $f\,(x)$, pe o mulţime închisă E, este marginea superioară exactă a celor mai bune aproximaţii, considerate pe sisteme de cîte $n+1$ puncte ale mulţimii E.

3. D e f i n i ţ i a 20. *Funcţia $\psi\,(x) \in \mathcal{F}_n$ o numim pozitiv-(negativ) oscilatoare pe punctele $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1}$, relativ la funcţia $f(x)$, dacă* $\psi\,(x_1) - f(x_1) > 0$. ($\psi\,(x_1) - f(x_1) < 0$) *şi* $\operatorname{sgn}\,\{\,\psi\,(x_i) - f\,(x_i)\} = (-1)^{i-1}$ ($\operatorname{sgn}\,\{\psi\,(x_i) - f(x_i)\} = (-1)^i$), $i = 2, 3, \ldots, n+1$.

L e m a 21. *Dacă $f\,(x)$ este definită pe punctele $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$, atunci funcţiile oscilatoare pe punctele x_i, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, relative la $f\,(x)$ sînt toate sau pozitiv-oscilatoare sau negativ-oscilatoare.*

Demonstraţia acestei leme este foarte simplă. Să presupunem, în ipotezele din enunţ, că ar exista două funcţii $\psi_1\,(x)$, $\psi_2\,(x) \in \mathcal{F}_n$ astfel ca $\psi_1\,(x)$ să fie pozitiv-oscilatoare, iar $\psi_2\,(x)$ negativ-oscilatoare pe punctele x_i, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, relativ la funcţia $f\,(x)$. Atunci, diferenţa $\psi_1\,(x) - \psi_2\,(x)$ trebuie să se anuleze în fiecare din intervalele (x_i, x_{i+1}), $i = 1, 2, \ldots, n$. Aceasta contrazice proprietatea B.

L e m a 22. *Dacă $f\,(x)$ este $\mathcal{F}_n$-convexă pe punctele*

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_m,\quad m \geqq n+2, \tag{82}$$

atunci toate funcţiile oscilatoare pe cîte $n+1$ puncte $x_{i_1} < x_{i_2} < \ldots < x_{i_{n+1}}$ din şirul (82), *relative la $f(x)$, sînt pozitiv-oscilatoare, dacă n este impar, şi negativ-oscilatoare, dacă n e par.*

Demonstraţia acestei leme rezultă imediat din definiţia convexităţii şi din relaţiile (52). Să presupunem că $f(x)$ este convexă pe punctele (82) faţă de $\mathcal{F}_n$ şi n este par. Fie $\psi\,(x) \in \mathcal{F}_n$ o funcţie pozitiv-oscilatoare pe punctele $x_{i_1} < x_{i_2} < \ldots < x_{i_{n+1}}$ relativ la $f(x)$, adică $\psi\,(x_{i_1}) - f\,(x_{i_1}) > 0$ şi $\operatorname{sgn}\,\{\psi\,(x_{i_k}) - f(x_{i_k})\} = (-1)^{k-1}$, $k = 2, 3, \ldots, n+1$. Cum $n+1$ e impar, înseamnă că $\psi\,(x_{i_{n+1}}) - f(x_{i_{n+1}}) > 0$. Diferenţa $\psi\,(x) - L(\mathcal{F}_n;\, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n};\, f\,|\, x)$ trebuie deci să se anuleze în fiecare din intervalele $(x_{i_k}, x_{i_{k-1}})$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Într-adevăr, pe de o parte, pe baza definiţiei $\psi(x)$, avem $\psi\,(x_{i_k}) - L\,(\mathcal{F}_n;\, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n};\, f\,|\, x_{i_k}) = \psi\,(x_{i_k}) - f(x_{i_k})$, $k = 1, 2, \ldots, n$ iar pe de altă parte, $f(x)$ fiind convexă faţă de $\mathcal{F}_n$, avem $f(x_{i_{n+1}}) - L\,(\mathcal{F}_n;\, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n};\, f\,|\, x_{i_{n+1}}) > 0$. Prin urmare $\operatorname{sgn}\,\{\psi\,(x_{i_k}) - L(\mathcal{F}_n;\, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n};\, f\,|\, x_{i_{n+1}})\} = (-1)^{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots, n+1$, ceea ce nu se poate, pentru că funcţiile $\psi\,(x)$ şi $L(\mathcal{F}_n;\, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n};\, f\,|\, x)$ sînt distincte şi deci diferenţa lor nu se poate anula decît pe cel mult $n-1$ puncte.

În mod analog se obţine concluzia din lemă în cazul n impar.

Lema 23. *Dacă $f(x)$ este $\mathcal{F}_n$-concavă pe punctele (82), atunci toate funcţiile oscilatoare pe cîte $n+1$ puncte $x_{i_1} < x_{i_2} < \ldots < x_{i_n}$ din şirul (82), relative la $f(x)$, sînt pozitiv-oscilatoare, dacă n e par şi negativ-oscilatoare dacă n e impar.*

Demonstraţia lemei 23 este analoagă cu cea a lemei 22. Proprietatea din enunţul lemelor 22 şi 23 rămîne valabilă, dacă, în loc de convexitate, considerăm neconvexitate, iar în loc de concavitate, neconvexitate faţă de $\mathcal{F}_n$. De exemplu, dacă în lema 22 facem asupra lui $f(x)$ ipoteza de neconcavitate faţă de $\mathcal{F}_n$, atunci funcţia $L(\mathcal{F}_n; x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}; f \mid x)$ poate eventual să coincidă cu $f(x)$ în punctul $x_{i_{n+1}}$. Demonstraţia rămîne şi în acest caz valabilă, pentru că $\psi(x_{i_{n+1}}) - f(x_{i_{n+1}}) > 0$.

4. Dacă în locul mulţimii generale $\mathcal{F}_n$ se consideră mulţimea particulară $\mathcal{T}_n$ a polinoamelor de grad cel mult egal cu $n-1$ şi ne fixăm asupra intervalului $[a, b]$, au loc cîteva proprietăţi care au fost semnalate de T. Popoviciu [23]. Dacă se notează cu $T^*_{n-1}(x)$ polinomul de cea mai bună aproximaţie de gradul $n-1$, al funcţiei $f(x)$, pe intervalul $[a, b]$, conform teoremei 41 diferenţa $|T^*_{n-1}(x) - f(x)|$ îşi atinge maximul în cel puţin $n+1$ puncte din $[a, b]$. Să introducem notaţia $\mu_{n-1}(f) = \max\limits_{x\in[a,b]} |T^*_{n-1}(x) - f(x)|$. Are loc

Teorema 43. *Dacă $f(x)$ este o funcţie de ordinul n faţă de mulţimea $\mathcal{T}_n$, pe intervalul $[a, b]$, atunci are loc relaţia*

$$|T^*_{n-1}(a) - f(a)| = |T^*_{n-1}(b) - f(b)| = \mu_{n-1}(f)$$

şi

$$[T^*_{n-1}(a) - f(a)]\,[T^*_{n-1}(b) - f(b)] \geqq 0 \text{ sau } \leqq 0,$$

după cum n este par sau impar.

Proprietatea exprimată prin această teoremă este legată de cîteva observaţii care se fac în lucrarea [23] asupra mulţimii punctelor din intervalul $[a,b]$, pe care o funcţie de ordinul n faţă de $\mathcal{T}_n$ îşi atinge maximul şi minimul.

Teorema 44. *Dacă $f(x)$ este neconcavă faţă de $\mathcal{T}_n$ şi continuă în $[a, b]$, atunci mulţimea punctelor pe care $f(x)$ îşi atinge maximul este formată din cel mult $\frac{n-1}{2} + 1$ sau $\frac{n}{2} + 1$ intervale *) neconsecutive, după cum n e impar sau par* [23].

Se observă imediat că dacă pentru n impar numărul $\frac{n-1}{2} + 1$ din teorema 44 este atins, atunci $f(x)$ îşi atinge maximul şi în a şi în b. Dacă n este par şi numărul $\frac{n}{2} + 1$ din teorema 44 este atins, atunci $f(x)$ îşi atinge maximul în punctul b.

Aceste proprietăţi — exprimate prin ultimele două teoreme — nu sînt valabile în general pentru orice mulţime de tipul $I_n\,[a, b]$. Are loc

Teorema 45. *Dacă $\mathcal{F}_n$ este o mulţime liniară şi fiecare funcţie din $\mathcal{F}_n$ îşi atinge maximul în cel mult $\frac{n-1}{2} + 1$ puncte cînd n e impar şi $\frac{n}{2}$ puncte cînd n e*

*) Vezi definiţia acestor intervale în [23].

par, atunci, pentru $n > 1$, teoremele 43 şi 44 rămîn valabile dacă înlocuim pe $\mathcal{T}_n$ cu $\mathcal{F}_n$, în ipoteza că dacă $\frac{n-1}{2} + 1$ este atins atunci maximul să fie atins în a şi b, iar dacă $\frac{n}{2}$ e atins, atunci maximul să fie atins în b.

Demonstraţia teoremei 45 se bazează pe linearitatea mulţimii $\mathcal{F}_n$. Să presupunem ipotezele din teoremă satisfăcute. Să presupunem că $f(x)$ este neconcavă faţă de $\mathcal{F}_n$ şi concluzia din teorema 45 nu ar avea loc pentru n impar de exemplu, dacă înlocuim pe $\mathcal{T}_n$ cu $\mathcal{F}_n$. Atunci ar exista $n+1$ puncte $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1}$ în $[a, b]$, astfel ca să avem

$$\begin{gathered} f(x_1) = f(x_3) = \ldots = f(x_n) = M, \qquad M = \max_{x\in[a,b]} f(x), \\ f(x_2) < M,\ f(x_4) < M, \ldots,\ f(x_{n+1}) < M. \end{gathered} \tag{83}$$

Din relaţiile (83) rezultă inegalitatea

$$L(\mathcal{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_n; f \mid x_{n+1}) > f(x_{n+1}),$$

care vine în contradicţie cu ipoteza de neconcavitate făcută asupra funcţiei $f(x)$. La fel se poate considera şi cazul cînd n este par.

Fie acum $f(x)$ o funcţie de ordinul n faţă de $\mathcal{F}_n$, presupusă liniară. Oricare ar fi funcţia $\varphi(x) \in \mathcal{F}_n$, diferenţa $f(x) - \varphi(x)$ este de asemenea *) de ordinul n faţă de $\mathcal{F}_n$. Cu această observaţie este demonstrată şi partea din concluzia teoremei referitoare la teorema 44.

În cazul $n = 1$, chiar şi pentru mulţimi liniare de tipul $I_1\,[a, b]$, putem da exemple care contrazic concluzia din teorema 43. Într-adevăr, dacă în loc de $\mathcal{T}_1$ considerăm mulţimea polinoamelor de forma αx, α fiind variabil, în orice interval $[\varepsilon, b]$, $0 < \varepsilon < b$, aceste polinoame formează o mulţime de tipul $I_1\,[\varepsilon, b]$. Fie $f(x) = -x^2 + x$. Printre polinoamele αx există unul de cea mai bună aproximaţie pentru $f(x) = -x^2 + x$ în intervalul $[\varepsilon, 1]$ şi anume $p(x) = (3-2\sqrt{2})\,x$. Dacă $\varepsilon < -1 + \sqrt{2}$, atunci se observă imediat că $\max\limits_{x\in[\varepsilon,1]} |f(x) - p(x)|$ nu e atins în extremitatea stîngă a intervalului cu toate că $f(x) = -x^2 + x$ este o funcţie concavă faţă de mulţimea funcţiilor αx în $[\varepsilon, 1]$.

5. În teorema 41 se dă o indicaţie asupra numărului punctelor de abatere maximă. Este interesant să se determine clasa de funcţii $f(x)$ pentru care numărul punctelor de abatere maximă este minim, adică $n+1$, mulţimea $\mathcal{F}_n$ fiind fixată. În cazul cînd în loc de $\mathcal{F}_n$ se consideră mulţimea $\mathcal{T}$, clasa funcţiilor pentru care numărul punctelor de abatere maximă pe un interval este $n+1$ a fost caracterizată de T. Popoviciu [23]. Aici dăm o generalizare a rezultatului din [23].

Lema 24. *Dacă funcţia $f(x)$ continuă pe $[a, b]$ este de ordinul n faţă de $\mathcal{F}_n$ pe intervalul $[a, b]$ fără să facă parte din $\mathcal{F}_n$ şi $\varphi(x) \in \mathcal{F}_n$, este funcţia de cea mai bună aproximaţie pe $[a, b]$ a funcţiei $f(x)$, atunci numărul punctelor pe care $\varphi(x) - f(x)$ atinge alternativ valorile $+\mathcal{E}\{f; \mathcal{F}_n; [a, b]\}$ şi $-\mathcal{E}\{f; \mathcal{F}_n; [a, b]\}$ este $n+1$.*

Demonstraţia este evidentă pe baza definiţiei 7 a funcţiilor de ordinul n faţă de $\mathcal{F}_n$.

*) Din cauza liniarităţii diferenţelor divizate.

D e f i n i ţ i a 21. *Dacă* $\varphi(x) \in \mathcal{F}_n$ *este funcţia egal oscilatoare pe punctele* $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$, *relativă la numerele* $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{n+1})$, *prin numărul* $\mu(\mathcal{F}_n;\ x_1, x_2, \ldots, x_{n+1};\ f)$ *înţelegem diferenţa* $f(x_{n+1}) - \varphi(x_{n+1})$.

Proprietatea de continuitate conţinută în teorema următoare rezultă din lucrarea lui M. I. M o r o z o v [11].

T e o r e m a 46. *Dacă funcţia* $f(x)$ *este continuă pe intervalul* $[a, b]$, *atunci* $\mu(\mathcal{F}_n;\ x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f)$ *este o funcţie continuă în raport cu ansamblul variabilelor sale* $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$.

Să notăm cu μ_- mulţimea valorilor negative ale lui $\mu(\mathcal{F}_n;\ x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f)$, cînd punctele x_i variază în intervalul $[a, b]$ şi cu μ_+ mulţimea valorilor sale pozitive.

L e m a 25. *Dacă* $f(x)$ *este continuă pe* $[a, b]$ *şi mulţimea* μ_+ *nu este vidă, iar* $\mu_1 = \max\{\mu_+\} = \mu(\mathcal{F}_n; x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n+1};\ f)$, *atunci* $\mu_1 = \mathcal{E}\{f;\mathcal{F}_n;\ I\}$, *unde* I *este intervalul* $[x'_1,\ x'_2]$, *iar maximul de mai sus se referă la mulţimea tuturor sistemelor de cîte* $n+1$ *puncte* $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$ *pe care* $\mu(\mathcal{F}_n;\ x_1,\ x_2, \ldots, x_{n+1};\ f) > 0$.

Pentru demonstraţia lemei 25 este suficient să arătăm că dacă $\varphi(x) \in \mathcal{F}_n$ este funcţia egal-oscilatoare pe punctele $x'_1 < x'_2 < \ldots < x'_{n+1}$ relativă la numerele $f(x'_1), f(x'_2), \ldots, f(x'_{n+1})$, atunci $|f(x) - \varphi(x)| \leqq \mu_1,\ x \in [x'_1,\ x'_{n+1}]$. Să presupunem contrariul. Fie x_0 un punct din (x'_1, x'_{n+1}), astfel ca $|f(x_0) - \varphi(x_0)| > \mu_1$. Să presupunem că $x'_k < x_0 < x'_{k+1}$. Funcţia $\varphi(x)$ este oscilatoare relativ la valorile funcţiei $f(x)$ pe punctele $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{k-1},\ x_0,\ x'_{k+1}, \ldots, x'_{n+1}$ sau pe punctele $x'_1,\ x'_2, \ldots, x'_k, x_0, x'_{k+2}, \ldots,\ x'_{n+1}$, după cum $f(x_0)\cdot f(x'_{k+1}) < 0$ sau $f(x_0)\cdot f(x'_{k+1}) > 0$. Să ne plasăm, de exemplu, în primul caz. Atunci funcţia egal oscilatoare $\varphi_1(x)$ pe punctele $x'_1 < x'_2 < \ldots < x'_{k-1} < x_0 < x'_{k+1} < \ldots < x'_{n+1}$, relativă la valorile funcţiei $f(x)$ pe aceste puncte, satisface următoarele relaţii de inegalitate*):

$$\mu_1 < |\varphi_1(x) - f(x)| < |\varphi(x_0) - f(x_0)|, \tag{**}$$

$$x = x'_i,\ i = 1, 2, \ldots, k-1,\ k+1, \ldots, n+1,\ x = x_0.$$

Din relaţiile (**) şi din definiţia funcţiei $\varphi_1(x)$ rezultă că

$$\mu(\mathcal{F}_n;\ x'_1,\ x'_2, \ldots, x'_{k-1}, \ldots, x_0, x'_{k+1}, \ldots, x'_{n+1}; f) > \mu_1. \tag{84}$$

Relaţia (84) contrazice definiţia numărului μ_1. În mod analog ajungem în contradicţie cu definiţia numărului μ_1, dacă luăm în considerare cazul $f(x_0)\, f(x'_{k+1}) > 0$. Concluzia din lema 25 este deci demonstrată.

L e m a 26. *Dacă* $f(x)$ *este continuă în* $[a, b]$, *mulţimea* μ_- *nu este vidă, iar* $\mu_2 = min\{\mu_-\} = \mu(\mathcal{F}_n;\ x''_1,\ x''_2, \ldots, x''_{n+1}; f)$, *atunci* $\mu_2 = \mathcal{E}\{f;\ \mathcal{F}_n;\ I\}$, *unde* I *este intervalul* $[x''_1,\ x''_{n+1}]$. *Analog cu cele de mai sus, minimul se referă la mulţimea sistemelor de cîte* $n+1$ *puncte* $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$, *pe care* $\mu(\mathcal{F}_n;\ x_1,\ x_2, \ldots,\ x_{n+1};\ f)$ *este negativ.*

Această lemă se demonstrează în mod analog cu lema 25.

*) Rezultă din definiţia acestor funcţii.

Dacă funcţia $f(x)$ nu este o funcţie de ordinul n faţă de $\mathcal{F}_n$, atunci mulţimile μ_- şi μ_+ sînt ambele nevide. Într-adevăr, în această ipoteză există un sistem de puncte $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1}$ pentru care $D[\mathcal{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1};\ f] > 0$ şi un alt sistem de puncte $x'_1 < x'_2 < \ldots < x'_{n+1}$ pentru care $D[\mathcal{F}_n;\ x'_1,\ x'_2, \ldots, x'_{n+1}; f] < 0$. Or, de aici, rezultă*) că avem şi $\mu(\mathcal{F}_n;\ x_1,\ x_2, \ldots, x_{n+1};\ f) > 0$ şi $\mu(\mathcal{F}_n;\ x'_1,\ x'_2, \ldots, x'_{n+1};\ f) < 0$. Pe baza teoremei 46 rezultă atunci

T e o r e m a 47. *Dacă* $f(x)$ *este continuă în* $[a, b]$ *şi nu este de ordinul* n *faţă de* $\mathcal{F}_n$, *atunci există un subinterval* $[\alpha, \beta]$ *al intervalului* $[a, b]$ *în care* $|\mu_1| = |\mu_2|$.

Demonstraţia teoremei se bazează pe un raţionament clasic de continuitate aplicat funcţiei $\mu(\mathcal{F}_n;\ x_1,\ x_2, \ldots, x_{n+1}; f)$, pe care nu-l mai facem aici, pentru că l-am dat în lucrarea [10].

Din teorema 47 rezultă următoarea consecinţă importantă. Dacă în intervalul $[\alpha,\ \beta]$ avem $|\mu_1| = |\mu_2|$ atunci, ţinînd seama de teorema 39 din care rezultă unicitatea funcţiei de cea mai bună aproximaţie, în condiţiile teoremei 47, rezultă că funcţiile egal oscilatoare $\varphi_1(x)$ şi $\varphi_2(x)$, pentru care avem respectiv $|\varphi_1(x) - f(x)| \leqq |\mu_1|$ şi $|\varphi_2(x) - f(x)| \leqq |\mu_2|$, în intervalul $[\alpha, \beta]$, coincid. Dar atunci în intervalul $[\alpha,\ \beta]$, pentru funcţia $f(x)$, există $n+2$ puncte de abatere maximă. Funcţia $\varphi(x) \in \mathcal{F}_n$, care satisface relaţia

$$|\varphi(x) - f(x)| \leqq |\mu_1| = |\mu_2|,$$

are proprietatea că există $n+1$ puncte $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$, astfel ca $\varphi(x_i) = f(x_i),\ i = 1,\ 2, \ldots, n+1$, şi există $n+2$ puncte $x'_1 < x'_2 < \ldots < x'_{n+2}$ astfel ca $\varphi(x)$ să fie egal oscilatoare relativ la valorile funcţiei $f(x)$, atît pe punctele $x'_1,\ x'_2, \ldots, x'_{n+1}$, cît şi pe punctele $x'_2,\ x'_3, \ldots, x'_{n+2}$, care sînt situate în modul următor:

$$x'_1 < x_1 < x'_2 < x_2 \ldots < x_{n+1} < x'_{n+2}.$$

Are loc deci:

T e o r e m a 48. *Dacă* $f(x)$ *este continuă în* $[a, b]$ *şi în orice subinterval* $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$, *numărul punctelor de abatere maximă de la funcţia de cea mai bună aproximaţie din* $\mathcal{F}_n$ *relativă la intervalul considerat* $[\alpha, \beta]$ *este* $n+1$, *atunci* $f(x)$ *este convexă sau concavă faţă de* $\mathcal{F}_n$ *pe intervalul* $[a, b]$.

Într-adevăr, din cauza celor spuse la punctul 2 din paragraful 1 al capitolului II, rezultă că $f(x)$, în ipotezele teoremei 48, trebuind să fie de ordinul n faţă de $\mathcal{F}_n$ (pentru că altfel am fi în contradicţie cu teorema 14), nu putem avea pe nici un sistem de puncte $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$ egalitatea $D[\mathcal{F}_n;\ x_1, x_2, \ldots, x_{n+1};\ f] = 0$, pentru că atunci pe intervalul $[x_1,\ x_{n+1}]$ $f(x)$ ar trebui să coincidă cu o funcţie din $\mathcal{F}_n$ şi deci numărul punctelor de abatere maximă în $[x_1, x_{n+1}]$ n-ar mai putea fi numai $n+1$. Trebuie deci ca $f(x)$ să fie o funcţie n-valentă faţă de $\mathcal{F}_n$ pe $[a, b]$. Concluzia din teorema 48 rezultă deci.

Conţinutul teoremei 48 revine la teorema IV din lucrarea T. P o p o v i c i u [23], dacă, în loc de $\mathcal{F}_n$, se consideră mulţimea particulară $\mathcal{P}_n$.

*) Raţionamentul este analog cu cel făcut în [23].

§ 2. CÎTEVA OBSERVAȚII ASUPRA CELEI MAI BUNE APROXIMAȚII PRIN FUNCȚII APARȚINÎND UNUI ȘIR INFINIT DE MULȚIMI INTERPOLATOARE

Să considerăm șirul infinit de mulțimi de funcții $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_n \subset \ldots$, în care mulțimea de indice k, $\mathcal{F}_k$, $k = 1, 2, \ldots$, este interpolatoare de ordinul k în intervalul $[a, b]$. Să ne fixăm asupra unei funcții $f(x)$, continuă pe intervalul $[a, b]$, care nu aparține nici uneia din mulțimile $\mathcal{F}_k$. Conform celor spuse în paragraful precedent, pentru orice valoare a lui k există în $\mathcal{F}_k$ o funcție și una singură $\varphi_k(x)$ astfel ca

$$\mathcal{E}\{f;\ \mathcal{F}_k;\ [a, b]\} = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - \varphi_k(x)|.$$

Putem deci vorbi despre șirul de funcții $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ și de șirul corespunzător al celor mai bune aproximații $\{\mathcal{E}\{f;\ \mathcal{F}_k;\ [a, b]\}\}_{k=1}^{\infty}$. Pentru simplificare, vom nota $\mathcal{E}_k = \mathcal{E}\{f;\ \mathcal{F}_k;\ [a, b]\}$, deoarece funcția $f(x)$, intervalul $[a, b]$ vor rămînea mereu aceleași. De asemenea, și șirul de mulțimi $\{\mathcal{F}_k\}_{k=1}^{\infty}$ îl presupunem fixat.

Teorema 49. *Șirul de numere $\{\mathcal{E}_k\}_{k=1}^{\infty}$ este necrescător.*

Pentru demonstrația teoremei 49 e suficient să observăm că nu putem avea niciodată $\mathcal{E}_{k+1} > \mathcal{E}_k$. Într-adevăr, dacă pentru un k oarecare am avea $\mathcal{E}_{k+1} > \mathcal{E}_k$, atunci diferența $\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)$ ar trebui să se anuleze în cel puțin $k+1$ puncte din $[a, b]$, ceea ce nu se poate pentru că $\varphi_k(x), \varphi_{k+1}(x) \in \mathcal{F}_{k+1}$. Această observație rezultă din faptul că inegalitatea $\mathcal{E}_{k+1} > \mathcal{E}_k$ atrage după sine existența a cel puțin $k+2$ puncte în care diferența $\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)$ ia alternativ valori negative și pozitive. Avem

$$f(x) - \mathcal{E}_k \leq \varphi_k(x) \leq f(x) + \mathcal{E}_k \quad x \in [a, b]$$

și $\varphi_{k+1}(x)$ ia în cel puțin $k+2$ puncte $x_1 < x_2 < \ldots < x_{k+2}$, alternativ valorile $f(x) - \mathcal{E}_{k+1}$ și $f(x) + \mathcal{E}_{k+1}$. Dar $f(x) - \mathcal{E}_{k+1} < f(x) - \mathcal{E}_k$ și $f(x) + \mathcal{E}_k < f(x) + \mathcal{E}_{k+1}$. Deci

$$\operatorname{sgn}\{\varphi_{k+1}(x_i) - \varphi_k(x_i)\} = \varepsilon\,(-1)^i,\ i = 1, 2, \ldots, k+2,$$

unde $\varepsilon = +1$ dacă $\varphi_{k+1}(x_1) - \varphi_k(x_1) < 0$, și $\varepsilon = -1$, dacă $\varphi_{k+1}(x_1) - \varphi_k(x_1) > 0$. Trebuie deci să avem

Lema 27. *Dacă $\varphi_k(x)$ și $\varphi_{k+1}(x)$ sînt funcții distincte, atunci $\mathcal{E}_{k+1} < \mathcal{E}_k$.*

Pentru demonstrație să presupunem că în ipotezele lemei am putea avea $\mathcal{E}_k = \mathcal{E}_{k+1}$. Atunci, ar exista $k+2$ puncte în care diferența $\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)$ ar lua alternativ valori negative și pozitive sau nule. Raționamentul e analog cu cel făcut la teorema 49 și ne conduce la contradicție cu faptul că $\varphi_k(x)$ și $\varphi_{k+1}(x)$ sînt funcții distincte din $\mathcal{F}_{k+1}$. Deci trebuie să avem $\mathcal{E}_{k+1} < \mathcal{E}_k$.

Lema 28. *Dacă diferența $\varphi_k(x) - f(x)$ ia alternativ valorile $+\mathcal{E}_k$ și $-\mathcal{E}_k$ în $k+2$ puncte, atunci $\varphi_{k+1}(x)$ coincide cu $\varphi_k(x)$.*

Demonstrația este evidentă, pe baza teoremelor 47 și 49.

Teorema 50. *Dacă $f(x)$ este convexă* (sau concavă) *față de fiecare din mulțimile $\mathcal{F}_k$, $k = 1, 2, \ldots$, în $[a, b]$, atunci șirul $\{\mathcal{E}_k\}_{k=0}^{\infty}$ este descrescător.*

Demonstrația este evidentă pe baza lemelor 27 și 28

Teorema 51. *În șirul $\{\mathcal{E}_k\}_{k=1}^{\infty}$ segmentele formate din termeni egali $\mathcal{E}_i$ $\mathcal{E}_{i+1}, \ldots, \mathcal{E}_{i+n}, \ldots$, conțin întotdeauna un număr finit de termeni.*

Într-adevăr, din $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_{i+1} = \ldots = \mathcal{E}_{i+n}$ rezultă pe baza lemei 27 că $\varphi_i(x)$, $\varphi_{i+1}(x), \ldots, \varphi_{i+n}(x)$, coincid. Dacă am avea un asemenea segment infinit, funcția $f(x)$ ar trebui să aparțină uneia din mulțimile $\mathcal{F}_k$.

§ 3. O CONSECINȚĂ A TEOREMEI LUI CH. DE LA VALLÉE POUSSIN

Să considerăm m segmente de dreaptă $s_1, s_2, \ldots, s_m$, $m \geq n+1$, situate pe direcția paralelă cu axa OY și de lungimi egale. Să presupunem că proiecțiile acestor segmente pe axa OX aparțin intervalului $[a, b]$.

Teorema 52. *Dacă pentru fiecare grup de cîte $n+1$ din segmentele date, $s_{i_1}, s_{i_2}, \ldots, s_{i_{n+1}}$, există în $\mathcal{F}_n$ cîte o funcție al cărei grafic intersectează pe fiecare din aceste $n+1$ segmente, atunci există în $\mathcal{F}_n$ o funcție al cărei grafic intersectează cele m segmente date.*

Pentru demonstrația teoremei 52 să considerăm mijloacele m_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, ale segmentelor date. Pentru a nu complica numerotarea, să presupunem că proiecțiile x_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, ale segmentelor s_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, sînt situate în ordinea $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$. Să notăm cu $f(x)$ funcția definită de egalitățile

$$f(x_k) = m_k,\ k = 1, 2, \ldots, m. \tag{85}$$

Fie l lungimea comună a segmentelor date. Să presupunem ipoteza din teoremă satisfăcută și fie $s_{i_1}, s_{i_2}, \ldots, s_{i_{n+1}}$, un grup oarecare de $n+1$ segmente dintre cele date, astfel ca $i_1 < i_2 < \ldots < i_{n+1}$. Fie $g(x) \in \mathcal{F}_n$ o funcție al cărei grafic le intersectează. Atunci

$$|f(i_k) - g(x_{i_k})| \leq \frac{l}{2},\ k = 1, 2, \ldots, n+1. \tag{86}$$

Atunci, dacă $\varphi(x)$ este o funcție egal-oscilatoare pe punctele $x_{i_1} < x_{i_2} < \ldots < x_{i_{n+1}}$ relativă la valorile $f(x_{i_1}), f(x_{i_2}), \ldots, f(x_{i_{n+1}})$ ale lui $f(x)$, trebuie să avem și

$$|f(x_{i_k}) - \varphi(x_{i_k})| \leq \frac{l}{2},\ k = 1, 2, \ldots, n+1, \tag{87}$$

conform proprietăților funcției $\varphi(x)$.

Să aplicăm acum teorema 42 *) funcției $f(x)$. Funcția $\varphi_n(x) \in \mathcal{F}_n$ care se abate cel mai puțin de la funcția $f(x)$ pe punctele x_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ trebuie să satisfacă relațiile de inegalitate

$$|\varphi_n(x_i) - f(x_i)| \leq \frac{l}{2},\ i = 1, 2, \ldots, m. \tag{88}$$

Or, din (88) rezultă tocmai concluzia din teorema 52.

Această teoremă leagă teoria celei mai bune aproximații de o proprietate topologică, care este cunoscută, în cazul $n = 2$, dacă $\mathcal{F}_2$ se înlocuiește cu mulțimea $\mathcal{P}_2$, sub numele de teorema lui Helly [25].

*) Care este generalizarea teoremei lui Ch. de la Vallée Poussin.

CAPITOLUL V

§ 1. ASUPRA UNEI TEOREME DE MEDIE

1. În multe probleme de calcul numeric, dintre care unele vor fi amintite la sfîrșitul acestui paragraf este util să se cunoască forma unei funcționale $A[f]$, cînd se urmărește calculul valorilor $A[f_0]$, f_0 fiind un element ale mulțimii de definiție a funcționalei $A[f]$. În acest paragraf ne vom referi la o funcțională $A[f]$, definită pe mulțimea funcțiilor continue pe un interval dat $[a, b]$. Ne interesează studiul formei funcționalei $A[f]$ — în anumite condiții suplimentare — pe baza comportamentului său față de o mulțime de tipul $I_n[a, b]$.

Să considerăm mulțimea $\mathcal{F}_{n+1}$ de tipul $I_{n+1}[a,b]$ despre care presupunem că are o submulțime $\mathcal{F}_n$ de tipul $I_n[a, b]$. Presupunem că $n+1 \geqq 2$.

2. Lema 29. *Dacă $A[f]$ este o funcțională definită pe mulțimea funcțiilor continue pe intervalul $[a, b]$ și sînt îndeplinite condițiile:*

1°. $A[f] = 0$ *dacă* $f \in \mathcal{F}_n$;

2°. $A[f] \neq 0$ *dacă f este $\mathcal{F}_n$-convexă sau $\mathcal{F}_n$-concavă pe intervalul* $[a, b]$, *atunci, dacă $\varphi(x)$ este o funcție continuă pe intervalul* $[a, b]$ *și* $A[\varphi] = 0$, *există $n+1$ puncte* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1}$ în intervalul $[a, b]$, astfel ca $A[L(\mathcal{F}_n; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1}; \varphi | x)] = 0$.

Demonstrația acestei leme se bazează pe teorema 12. Din cauza ipotezei 2°, $\varphi(x)$ nu poate să fie nici $\mathcal{F}_n$-convexă, nici $\mathcal{F}_n$-concavă pe $[a, b]$. Există prin urmare, pe baza teoremei 12, un sistem de $n+1$ puncte $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_n < \xi_{n+1}$, în $[a, b]$, astfel ca $D[\mathcal{F}_n; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \xi_{n+1}; \varphi] = 0$. Dar două funcții distincte din $\mathcal{F}_{n+1}$ nu pot să coincidă decît în cel mult n puncte. Aceasta înseamnă că funcția interpolatoare $L(\mathcal{F}_{n+1}; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1}; \varphi | x)$ coincide cu funcția interpolatoare $L(\mathcal{F}_n; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n; \varphi | x)$. Prin urmare, din cauza ipotezei 1°, $A[L(\mathcal{F}_{n+1}; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1}; \varphi | x)] = 0$. Lema este deci adevărată.

Se observă că în enunțul lemei 29, condiția 2° se referă la funcții $\mathcal{F}_n$-convexe și funcții $\mathcal{F}_n$-concave pe $[a,b]$. Asemenea funcții există. Orice funcție din mulțimea $\mathcal{F}_{n+1}$ care nu aparține submulțimii $\mathcal{F}_n$ este n-valentă față de $\mathcal{F}_n$ pe intervalul $[a,b]$ și deci, fiind continuă pe $[a,b]$, este $\mathcal{F}_n$-convexă sau $\mathcal{F}_n$-concavă pe $[a,b]$. De aici rezultă că în ipotezele lemei 29, $A[f] \neq 0$, dacă $f \in \mathcal{F}_{n+1}$ și $f \overline{\in} \mathcal{F}$.

Din lema 29 rezultă o consecință importantă în cazul cînd mulțimile $\mathcal{F}_{n+1}$ și $\mathcal{F}_n$ sînt liniare iar funcționala $A[f]$ este de asemenea liniară *). Are loc în *acest caz*

Lema 30. *Dacă sînt îndeplinite condițiile* 1° *și* 2° *din enunțul lemei* 29 și (x) *este o funcție continuă în* $[a,b]$ *atunci există un sistem de* n + 1 *puncte* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1}$, *astfel ca*

$$A[L(\mathcal{F}_{n+1}; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1}; f | x)] = A[f]. \tag{89}$$

Pentru demonstrație să presupunem $A[f] = c \neq 0$, pentru că dacă $A[f] = 0$, atunci sîntem în ipotezele lemei 29 și proprietatea are loc. Să considerăm funcția $g(x) = f(x) - \dfrac{A[f]}{A[\varphi_0]}\varphi_0$, unde φ_0 este o funcție oarecare din $\mathcal{F}_{n+1}$, care nu

*) Aici prin liniaritate înțelegem că $A[f]$ este aditivă și omogenă.

aparține lui $\mathcal{F}_n$. Avem deci cu siguranță $A[\varphi_0] \neq 0$ și, din cauza liniarității funcționalei $A[f]$,

$$A[g] = A\left[f - \frac{A[f]}{A[\varphi_0]}\varphi_0\right] = 0,$$

prin urmare $g(x)$ nu poate fi nici $\mathcal{F}_n$-convexă, nici $\mathcal{F}_n$-concavă. Deoarece $g(x)$ este continuă pe $[a,b]$, putem aplica lema 29 și anume $A[L(\mathcal{F}_{n+1}; \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n+1}; g | x)] = 0$ pe un anumit sistem de puncte $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1}$ din $[a, b]$. Dar $L(\mathcal{F}_{n+1}; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1}; g | x) = L(\mathcal{F}_{n+1}; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1}; f | x) -$

$$- \frac{A[f]}{A[\varphi_0]} L(\mathcal{F}_{n+1}; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1}; \varphi_0 | x).$$

De aici, calculînd pe $A[L(\mathcal{F}_{n+1}; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1}; g | x)$, obținem

$$A[f] = A[L(\mathcal{F}_{n+1}; \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{n+1}; f | x)],$$

pentru că $L(\mathcal{F}_{n+1}; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1}; \varphi_0 | x)$ coincide cu φ_0.

Concluzia lemei 30 ne conduce la cîteva observații interesante. Dacă admitem că $\mathcal{F}_{n+1}$ și $\mathcal{F}_n$ sînt mulțimi liniare, atunci știm că există în $\mathcal{F}_{n+1}$, $n+1$ funcții $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_{n+1}(x)$, care formează o bază interpolatoare [10]. Orice funcție $\varphi(x) \in \mathcal{F}_{n+1}$ este de forma

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i f_i(x).$$

Dacă pentru $\alpha_{n+1} = 0$, obținem mulțimea $\mathcal{F}_n$, sîntem în cazul clasic al unui sistem Cebîșev $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), f_{n+1}(x)$, în care primele n funcții formează, de asemenea, un sistem Cebîșev. Avem

$$L(\mathcal{F}_{n+1}; x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}; f | x) = \sum_{i=1}^{n+1} d_i[f] f_i(x),$$

unde $d_{n+1}[f]$ este diferența divizată generalizată a funcției $f(x)$, relativă la sistemul de funcții $f_1(x), \ldots, f_{n+1}(x)$ *). În ipotezele lemei 30, formula (89) ne dă

$$A[L(\mathcal{F}_{n+1}; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1}; f | x) = d_{n+1}[f]\, A[f_{n+1}(x)] = A[f]. \tag{90}$$

Enunțul lemei cuprinde deci ca un caz particular teorema de medie. pentru funcționale liniare dată de T. Popoviciu [21].

*)

$$d_{n+1}[f] = \frac{\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \ldots & f_n(x_1) & f(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \ldots & f_n(x_2) & f(x_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1(x_{n+1}) & f_2(x_{n+1}) & \ldots & f_n(x_{n+1}) & f(x_{n+1}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \ldots & f_n(x_1) & f_{n+1}(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \ldots & f_n(x_2) & f_{n+1}(x_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1(x_{n+1}) & f_2(x_{n+1}) & \ldots & f_n(x_{n+1}) & f_{n+1}(x_{n+1}) \end{vmatrix}}.$$

3. În cele ce urmează ne vom folosi de cîteva proprietăți pe care le are un spic de ordinul n al mulțimii $\mathfrak{F}_{n+1}$. Să observăm mai întîi că orice spic de ordinul n al mulțimii $\mathfrak{F}_{n+1}$ conține o funcție și una singură din mulțimea $\mathfrak{F}_n$. Fie date punctele $M_1(x_1, y_1)$ $M_2(x_2, y_2), \ldots, M_n(x_n, y_n)$, unde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt n puncte distincte din intervalul $[a, b]$. Funcția $L(\mathfrak{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_n; y \mid x)$ împarte funcțiile din spicul corespunzător acestor puncte, în două clase, ambele nevide: funcțiile din $\mathfrak{F}_{n+1}$ care sînt $\mathfrak{F}_n$ - convexe și funcțiile din $\mathfrak{F}_{n+1}$ care sînt $\mathfrak{F}_n$ - concave. Are loc:

L e m a 31. *Dacă $A\,[f]$ este o funcțională definită pe mulțimea funcțiilor continue pe intervalul $[a, b]$ și sînt îndeplinite următoarele condiții:*

1° *$A\,[f]$ este continuă pe mulțimea sa de definiție*);*

2° *$A\,[f] = 0$ dacă $f \in \mathfrak{F}_n$;*

3° *$A\,[f] \neq 0$ dacă f este $\mathfrak{F}_n$ - convexă sau $\mathfrak{F}_n$ - concavă pe $[a, b]$, atunci $A[f]$ păstrează un semn constant pentru toate funcțiile $\mathfrak{F}_n$ - convexe sau $\mathfrak{F}_n$ - concave aparținînd unui spic de ordinul n al mulțimii $\mathfrak{F}_{n+1}$.*

Să considerăm punctele $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2), \ldots, M_n(x_n, y_n)$, de mai sus. Avem $A\,[L(\mathfrak{F}_n; x_1, x_2, \ldots, x_n; y \mid x)] = 0$. Să presupunem că printre funcțiile $\mathfrak{F}_n$ - convexe ($\mathfrak{F}_n$ - concave) aparținînd spicului corespunzător acestor puncte, există două funcții $g_1(x)$, $g_2(x)$, astfel ca $A\,[g_1(x)] < 0$, și $A\,[g_2(x)] > 0$. Să presupunem că pentru $x > x_n$ avem $g_1(x) < g_2(x)$. Dacă $x_n = b$, atunci alegem un punct x în intervalul (x_{n-1}, x_n) și presupunem $g_1(x) > g_2(x)$. Pe baza teoremei 4, mulțimea funcțiilor din spic, ale căror valori în x sînt cuprinse între $g_1(x)$ și $g_2(x)$, este compactă. Rezultă că $A\,[f]$ trebuie să se anuleze pe o funcție din această mulțime. Aceasta e în contradicție cu ipoteza 3° din enunțul lemei.

Să presupunem că $\mathfrak{F}_{n+1}$ este mulțimea generată de sistemul Cebîșev $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_{n+1}(x)$, iar $\mathfrak{F}_n$ este submulțimea generată de funcțiile $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$, formînd de asemenea un sistem Cebîșev.

L e m a 32. *În ipotezele lemei 30, $A\,[f]$ este monotonă în raport cu valoarea într-un punct fixat, diferit de punctele x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ a funcțiilor din spicul relativ la un sistem de puncte $M_1(x_1, y_1), \ldots, M_n(x_n, y_n)$.*

Demonstrația rezultă din lema 30. Pe baza formulei (90), în afară de un factor constant $A\,[\varphi_{n+1}(x)]$, $A\,[f]$ coincide cu parametrul a_{n+1} al funcției $F(x; a_1, a_2, \ldots, a_{n+1})$ care generează mulțimea $\mathfrak{F}_{n+1}$. Pe baza lemei 30 din paragraful precedent rezultă concluzia din lema 32.

Ca o consecință a lemei 32 să observăm că în ipotezele din enunțul ei, mulțimea funcțiilor din $\mathfrak{F}_{n+1}$ pentru care $A\,[f]$ ia o aceeași valoare C, este de tipul $I_n\,[a, b]$.

L e m a 33. *Dacă $\mathfrak{F}_n \subset \mathfrak{F}_{n+1}$ sînt mulțimi interpolatoare oarecare (deci nu neapărat liniare) și dacă sînt satisfăcute ipotezele din lema 31, atunci din monotonia funcționalei $A\,[f]$ pe orice spic (în sensul formulat în lema 32) rezultă că mulțimea funcțiilor din $\mathfrak{F}_{n+1}$ pentru care $A\,[f]$ ia o valoare constantă C, este de tipul $I_n\,[a, b]$.*

*) Dacă șirul de funcții $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ tinde uniform în $[a, b]$ către funcția $f(x)$, atunci $\lim\limits_{k\to\infty} A\,[f_k(x)] = A\,[f(x)]$.

T e o r e m a 53. *Dacă sînt îndeplinite condițiile din lema 31 și dacă*

1° *$A\,[f]$ este monotonă pe orice spic al mulțimii $\mathfrak{F}_{n+1}$;*

2° *oricare ar fi $C \neq 0$, $A\,[\varphi] \neq C$ pentru orice funcție $\varphi(x)$ care e convexă sau concavă față de mulțimea funcțiilor f din $\mathfrak{F}_{n+1}$ pentru care avem $A\,[f] = C$, atunci pentru orice funcție $\varphi(x)$, continuă pe $[a, b]$, există un sistem de $n + 1$ puncte $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1}$, în $[a, b]$, astfel ca $A\,[f] = A\,[L(\mathfrak{F}_{n+1}, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1}, f \mid x)]$.*

Demonstrația teoremei 53 revine la aplicarea lemei 29 în cazul submulțimii funcțiilor f din $\mathfrak{F}_{n+1}$ pentru care $A\,[f] = A\,[\varphi] = C \neq 0$. Dacă $C = 0$ atunci revenim la lema 29.

4. Vom da acum o aplicație a teoremei 53. Să particularizăm mulțimile $\mathfrak{F}_n$ și $\mathfrak{F}_{n+1}$. Să considerăm mulțimea $\mathfrak{P}_{n+1}$ a polinoamelor de grad cel mult egal cu n și submulțimea $\mathfrak{P}_n$ formată din polinoamele de grad cel mult egal cu $n - 1$, $n \geqq 1$. Fie $f(x)$ o funcție continuă pe intervalul $[a, b]$, iar $T^*_{n-1}(x)$ polinomul de cea mai bună aproximație de gradul $n - 1$, al funcției $f(x)$, pe intervalul $[a, b]$. Avem, conform definiției lui $T^*_{n-1}(x)$,

$$\mu_{n-1}[f] = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - T^*_{n-1}(x)|$$

unde

$$\mu_{n-1}[f] = \min_{T_{n-1} \in \mathfrak{P}_n} \{\max_{x \in [a, b]} |f(x) - T_{n-1}(x)|\}.$$

Este asigurată după cum se știe existența și unicitatea polinomului $T^*_{n-1}(x)$. Să notăm cu $V(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ determinantul lui Wandermonde al numerelor $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ și cu $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f]$ diferența divizată, de ordinul n, a funcției $f(x)$, pe punctele $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. Se știe că

$$\rho_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f) = \frac{V(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \mid [x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] \mid}{\sum\limits_{i=1}^{n+1} V(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1})} \tag{91}$$

este cea mai bună aproximație a funcției $f(x)$, prin polinoame de gradul $n - 1$, pe punctele $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$. Conform cunoscutei teoreme a lui de la Vallée Poussin avem

$$\mu_{n-1}[f] = \max_{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}} \rho_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f), \tag{92}$$

maximul din membrul al doilea referindu-se la toate sistemele de cîte $n + 1$ puncte distincte $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ din intervalul $[a, b]$. Se observă că

$$\max_{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}} \frac{V(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})}{\sum\limits_{i=1}^{n+1} V(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1})}$$

este cea mai bună aproximație a funcției $f(x) = x^n$ prin polinoame de gradul $n - 1$, pe intervalul $[a, b]$ și deci este egală cu $\dfrac{(b-a)^n}{2^{2n}}$. Prin urmare, dacă $f(x)$ este un polinom $p(x) \in \mathcal{P}_{n+1}$ şi $p(x) \in \mathcal{P}_n$, atunci

$$\mu_{n-1}[p] = \frac{(b-a)^n}{2^{2n}} \left| [x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; p] \right|, \tag{93}$$

factorul $|[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; p]|$ fiind constant, egal cu valoarea absolută a coeficientului lui x^n din polinomul $p(x)$.

Din cele de mai sus rezultă cîteva observaţii interesante. Să notăm

$$\delta_{n-1}[p] \begin{cases} \mu_{n-1}[p] & \text{dacă} \quad [x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; p] > 0, \\ -\mu_{n-1}[p] & \text{dacă} \quad [x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; p] < 0. \end{cases} \tag{94}$$

Să considerăm un spic de ordinul n al mulţimii $\mathcal{P}_{n+1}$, ataşat punctelor $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \ldots, M_n(x_n, y_n)$, $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Dacă fixăm un punct $x_{n+1} > x_n$, valorile pe punctul x_{n+1}, ale polinoamelor din acest spic, formează un interval. Fie J un subinterval oarecare al acestui interval. Coeficientul lui x^n, din polinoamele care formează spicul, este o funcţie monotonă pe intervalul J *). De aici rezultă proprietatea;

$\delta_{n-1}[p]$ *este o funcţie monotonă pe orice spic de ordinul n al mulţimii* $\mathcal{P}_{n+1}$.

O altă observaţie pe care o putem face este următoarea. Dacă considerăm mulţimea $\mathcal{P}_{n+1}(\alpha)$ a tuturor polinoamelor $\alpha x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$, unde α e fix iar a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, variază, ştim că ea este de tipul $I_n(-\infty, +\infty)$. Fie $f(x)$ o funcţie convexă sau concavă faţă de $\mathcal{P}_{n+1}(\alpha)$ pe intervalul $[a, b]$. Are loc proprietatea

oricare ar fi punctele distincte $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, *diferenţa divizată* $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f]$ *este diferită de* α.

Fie pentru fixarea ideilor $f(x)$ o funcţie concavă faţă de mulţimea $\mathcal{P}_{n+1}(\alpha)$, în intervalul $[a, b]$. Prin urmare, dacă un polinom $p(x) \in \mathcal{P}_{n+1}(\alpha)$ coincide pe punctele $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, $x_n < b$, cu $f(x)$, atunci, oricare ar fi $x_{n+1} > x_n$, avem $f(x_{n+1}) - p(x_{n+1}) < 0$. În acelaşi timp, avînd în vedere că două polinoame distincte din $\mathcal{P}_{n+1}$ nu pot să coincidă decît în cel mult n puncte distincte, rezultă că orice polinom de gradul n, în care coeficientul lui x^n este diferit de α, este convex sau concav faţă de mulţimea $\mathcal{P}_{n+1}(\alpha)$. De aici putem trage concluzia că în polinomul lui Lagrange de gradul n, $L_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}; f \mid x)$, oricare ar fi nodurile de interpolare, coeficientul lui x^n este mai mic decît α, adică $[x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}; f] < \alpha$. Într-adevăr, $L_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}; f \mid x)$ face parte dintr-un spic de ordinul n al mulţimii $\mathcal{P}_{n+1}$, care conţine întotdeauna un polinom $p(x) \in \mathcal{P}_{n+1}(\alpha)$, astfel ca $p(x_i) = f(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Dar $L_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}; f \mid x)$ coincide pe $n+1$ puncte cu funcţia $f(x)$, care e concavă faţă de $\mathcal{P}_{n+1}(\alpha)$, deci $p(x_{n+1}) - L_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}; f \mid x_{n+1}) > 0$, ceea ce este echivalent cu $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] < \alpha$. În stabilirea acestei inegalităţi s-a ţinut de sigur seama de faptul că oricare ar fi punctele $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \ldots, M_n(x_n, y_n)$, $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, dacă $x_{n+1} > x_n$, şi $p_1(x), p_2(x)$ sînt două polinoame din spicul relativ la aceste puncte, atunci din $p_1(x_{n+1}) > p_2(x_{n+1})$ rezultă $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; p_1] > [x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; p_2]$.

*) Să notăm cu $A[p]$ coeficientul lui x^n din polinomul $p(x)$ al spicului, $p(x_{n+1}) = y \in J$. Cînd y descrie intervalul J, $A[p]$ este o anumită funcţie de y. Monotonia acestei funcţii rezultă din observaţia, pe care am mai făcut-o, că mulţimea polinoamelor de gradul n, în care x^n are un coeficient fixat α, iar ceilalţi coeficienţi sînt variabili, este de tipul $I_n(-\infty, \infty)$.

Din cele de mai sus rezultă o precizare a celei mai bune aproximaţii a funcţiei $f(x)$ prin polinoame din mulţimea $\mathcal{P}_n$. Păstrăm ipoteza de concavitate asupra funcţiei $f(x)$, pe care o mai presupunem continuă pe $[a, b]$. Fie $\mathcal{E}_{n-1}$ mulţimea punctelor din $[a, b]$ definită în felul următor: $T^*_{n-1}(x)$ fiind polinomul de cea mai bună aproximaţie de grad $n-1$ al funcţiei $f(x)$ pe intervalul $[a, b]$ din $x_0 \in \mathcal{E}_{n-1}$, rezultă $|f(x_0) - T^*_{n-1}(x_0)| = \mu_{n-1}[f]$. Din cauza continuităţii funcţiilor care intervin, mulţimea $\mathcal{E}_{n-1}$ este o mulţime închisă. Fie $\xi = \inf \mathcal{E}_{n-1}$. Avem $|f(\xi) - T^*_{n-1}(\xi)| = \mu_{n-1}[f]$. Să adoptăm următoarea definiţie:

$$\delta_{n-1}[f] = (-1)^n \left[f(\xi) - T^*_{n-1}(\xi) \right]. \tag{95}$$

Se observă imediat că dacă $f(x)$ coincide cu un polinom $p(x)$ din mulţimea $\mathcal{P}_{n+1}$, fără să se reducă la un polinom de gradul $n-1$, atunci funcţionala $\delta_{n-1}[f]$, definită prin (95), coincide cu $\delta_{n-1}[p]$ din (94). În ipotezele făcute asupra funcţiei $f(x)$, $\delta_{n-1}[f]$ nu poate să coincidă niciodată cu $\delta_{n-1}[p]$, dacă $p \in \mathcal{P}_{n+1}(\alpha)$. Într-adevăr, din observaţia făcută asupra diferenţei divizate $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f]$, punctele x_i, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, fiind arbitrar alese în $[a, b]$, rezultă că $f(x)$ este o funcţie cu a n-a diferenţă divizată, mărginită în sensul definiţiei date de T. Popoviciu [19]. Acest rezultat se stabileşte foarte uşor. Pe de o parte mulţimea polinoamelor din $\mathcal{P}_{n+1}(\alpha)$, care coincid în cîte n puncte distincte cu $f(x)$, este egal mărginită (aceasta rezultă din proprietăţile funcţiilor convexe de ordin superior). De aici rezultă imediat că şi mulţimea polinoamelor din $\mathcal{P}_{n+1}$, care coincid în cîte $n+1$ puncte cu $f(x)$, este de asemenea egal mărginită (ele sînt toate concave faţă de $\mathcal{P}_{n+1}(\alpha)$). Atunci, pe baza unei proprietăţi binecunoscute cu privire la mărginirea coeficienţilor polinoamelor de acelaşi grad, care formează o mulţime egal mărginită, rezultă proprietatea cerută, de mărginire a mulţimii tuturor diferenţelor divizate $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f]$. Avem deci

$$\mu_{n-1}[f] = \frac{(b-a)^n}{2^{2n}} \left\{ \max_{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}} \left| [x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] \right| \right\}. \tag{96}$$

Cum totdeauna $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f] \neq \alpha$, rezultă că nu putem avea niciodată $\delta_{n-1}[f] = \delta_{n-1}[p]$ dacă $p \in \mathcal{P}_{n+1}(\alpha)$.

Să trecem acum la aplicarea teoremei 53. Să considerăm funcţionala $A[f] = \delta_{n-1}[f]$. Ea îndeplineşte, pe baza observaţiilor mai sus făcute, toate condiţiile din enunţul teoremei 53. În ceea ce priveşte continuitatea acestei funcţionale, în raport cu argumentul f, considerat ca element al spaţiului funcţiilor continue pe intervalul $[a, b]$, metrica fiind cea uniformă *), ea este binecunoscută. Sîntem în cazul unei funcţionale *neliniare*, căreia îi aplicăm teorema 53.

Fie $f(x)$ o funcţie continuă pe intervalul $[a, b]$. Are loc:

T e o r e m a 54. *Dacă* $\mu_{n-1}[f]$ *este cea mai bună aproximaţie a funcţiei* $f(x)$, *prin polinoame de gradul* $n-1$, *pe intervalul* $[a, b]$, *atunci există, în* $[a, b]$, $n+1$

*) $\rho(f_1, f_2) = \max\limits_{x \in [a, b]} |f_1(x) - f_2(x)|$.

puncte $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1}$, *astfel ca polinomul de interpolare al lui Lagrange pe nodurile* ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, *să aibă proprietatea* *):

$$\mu_{n-1}\left[L_{n+1}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1}; f \mid x)\right] = \mu_{n-1}[f].$$

Din această teoremă rezultă o observaţie interesantă asupra numerelor $\mu_k[f]$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Se ştie că acest şir este monoton şi anume necrescător. Pe baza teoremei lui Waierstrass avem $\lim\limits_{k \to \infty} \mu_k[f] = 0$. Din teorema 54, rezultă că $\mu_k[f] = \dfrac{(b-a)^{k+1}}{2^{2k+2}} M_k[f]$. Studiul structurii numerelor $M_k[f]$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ în ipoteza continuităţii funcţiei $f(x)$, ar conduce la o demonstraţie a teoremei lui Waierstrass cu ajutorul polinoamelor de cea mai bună aproximaţie. Problema unei asemenea demonstraţii a fost ridicată şi în lucrarea [18].

Teorema 53 mai are şi alte aplicaţii, în general în studiul structurii anumitor funcţionale, care intervin în analiza numerică. Prezintă un interes deosebit găsirea, pentru o funcţională $A[f]$ dată, a unei mulţimi interpolatoare de un ordin $n+1 \geq 2$, astfel ca ipotezele din teorema 53 să fie îndeplinite.

Institutul de Calcul, Academia R.P.R., Filiala Cluj

О ПОНЯТИИ ВЫПУКЛОЙ ФУНКЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО МНОЖЕСТВА ИНТЕРПОЛИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Работа содержит 5 глав. Глава I посвящена основным свойствам множества $\mathcal{F}_n$ типа $I_n\,[a, b]$. Наряду с другими свойствами эта глава содержит также несколько теорем среднего, положенных в основу многих из приводимых в остальных главах доказательств (Теоремы 7, 9 и 13).

В главе II изучается $\mathcal{F}_n$-выпуклые, $\mathcal{F}_n$-вогнутые, $\mathcal{F}_n$-невыпуклые и $\mathcal{F}_n$-невогнутые функции (определение 7).

Глава III содержит дифференциальные неравенства, характеризующие вышеупомянутые функции. В той же главе приводятся некоторые результаты по исследованию полилокальной задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Глава IV содержит несколько результатов по наилучшему приближению в смысле П. Л. Чебышева, а также обобщение одной теоремы Хелли.

Глава V содержит в качестве приложения понятия выпуклой функции теорему среднего для непрерывных функционалов, определенных на множестве непрерывных функций в заданном промежутке $[a, b]$.

*) Din $\delta_{n-1}[f] = A$, rezultă evident şi $\mu_{n-1}[f] = |A|$.

SUR UNE NOTION DE FONCTION CONVEXE PAR RAPPORT À UN ENSEMBLE DE FONCTIONS INTERPOLATRICES

RÉSUMÉ

Le travail est divisé en 5 chapitres. Le premier chapitre expose les propriétés d'un ensemble $\mathcal{F}_n$ du type $I_n\,[a, b]$ (définition 1); le chapitre comprend également 3 théorèmes de moyenne — les théorèmes 7, 9 et 13 — utilisés par la suite dans les chapitres suivants.

Dans le 2[e] chapitre, on donne la définition des fonctions d'ordre n relatives à l'ensemble $\mathcal{F}_n$ du type $I_n\,[a, b]$.

Le 3[e] chapitre est consacré aux inégalités différentielles qui caractérisent les fonctions étudiées dans le 2[e] chapitre.

Le 4[e] chapitre fournit quelques résultats sur la meilleure approximation au sens de P. L. Tchébychev.

Enfin, dans le 5[e] chapitre, on donne comme application un théorème de moyenne pour des fonctionnelles définies sur l'ensemble des fonctions continues sur un intervalle donné $[a, b]$.

BIBLIOGRAFIE

1. ASCOLI G., *Sopra un nouvo algoritmo per representatzione delle funzioni di variabile reale.* Annali della R. Sc. Norm. Sup., Pisa (2), **3**, 243–253 (1934).
2. БАБКИН В. Н., *Решение одной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка методом Чаплыгина.* Прикл. мат. и Мех., **8**,239—**242** (1954).
3. BEKENBACH E. F., *Generalized Convex Functions.* Bull. Amer. Math. Soc., 43, 363–371 (1937).
4. БУРОВ В. Н., *Некоторые эффективные способы решения задач Чебышева о наилучшем приближении.* Доклады Акад. Наук СССР, **113**, *4*, 731—733 (1957).
5. ФИХТЕНГОЛЬЦ Г. М., *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* ГИТТЛ, Москва, 1951.
6. КОНДРАТЬЕВ В. А., *Элементарные необходимого и достаточного условия неколебаемости решений линейного диффеpенциального уравнения второго порядка.* УМН, **12**, 159—160 (1957).
7. MARKOFF W., *Über polynome, die in einem gegebenen Intervalle möglichst wenig von Null abweichen.* Math. Ann., **77**, 213–258 (1916).
8. MOLDOVAN E., *Asupra unei generalizări a noţiunii de convexitate.* Studii şi Cercetări Ştiinţifice, Cluj, **6**, 3–4 (1955).
9. — *Asupra unor teoreme de medie.* Comunicările Academiei R.P.R., **VI**, *1* (1956).
10. — *Proprietăţi ale mulţimilor de funcţii interpolatoare.* Bul. Univ. « V. Babeş » şi « Bolyai », Seria şt. naturii, **I**, 1–2 (1957).
11. МОРОЗОВ М. И., *О некоторых вопросах равномерного приближения непрерывных функцций посредством функции интерполяционных классов.* Изв. Акад. Наук, Сер. Мат., **16**, 75—100 (1952).
12. ПАШКОВСКИЙ С. Ф., *О расположении (e)-точек полиномов наилучшего приближения.* Доклады Акад. Наук СССР, **117**, *4*, 576—577 (1957).
13. PEIXOTO M. M., *Generalized Convex Functions.* Bull. of. the Am. Math. Soc., **55**, 563–572 (1949).
14. ПИНСКЕР И. С., *Успехи матем. наук*, **6**, *6(46)*, 174 (1951).
15. POINCARÉ H., *L'Intermédiaire des Mathématiciens*, **1**, 141–144 (1894).
16. POLYA G., *On the Mean-Value Theorem Corresponding to a Given Linear Homogeneous Differential Equation.* Trans. Am. Math. Soc., **24**, 312–324 (1922).

17. Pompeiu D., *Sur une proposition analogue au théorème des accroissements finis.* Mathematica, **22**, 143–146 (1946).
18. Popoviciu T., *Cea mai bună aproximaţie a funcţiilor continue prin polinoame.* Cluj, 1937.
19. — *Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou deux variables réelles.* Mathematica, **VIII**, 1–86 (1934).
20. — *Sur une généralisation de la notion de convexité d'ordre supérieur.*
21. — *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur* (IX). Bull. Math. de la Soc. Roumaine des Sc., **43**, 85–141 (1941).
22. — *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur* (1) Mathematica, **12**, 81–92 (1936).
23. — *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur* (VI). Revue Math. de l'Union Interbalkanique, **2**, 31–40 (1939).
24. Ch. de la Vallée Poussin, *Sur l'équation différentielle du second ordre.* Journ. de Math. pures et appl., **8**, 125–144 (1929).
25. Rademacher H., Schoenberg I. J., *Helly's Theorems on Convex Domains and Cshebycheff's Approximation Problem.* Canadian J. of Math., **2**, 245–256 (1950).
26. Сансоне Ж., *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* ИИЛ, Москва, 1954.
27. Scorza Dragoni G., *A proposito di alcuni teoremi relativi ad una problema di limiti, per una equazioni diferenziale del secondo ordine.* Rend. R. Ac. dei Lincei, (6), 22 44–48 (1935).
28. Чаплыгин С. А., *Полное собрание сочинений.* **III**, 75—79 (1935).
29. Tornheim L., *On n-Parameter Families of Functions and Associated Convex Functions.* Trans. Amer. Math. Soc., **69**, 457–467 (1950).
30. Tschalaloff L., *Über den Rolleschen satz angewandt auf lineare Kombinationen endlich vieler Functionem.* Comptes Rendus du Premier Congrès des mathématiciens hongrois. Budapest, 27 Août – 2 Sept., 1950, 591–594 (1952).