UN CRITERIU DE MĂRGINIRE A SOLUȚIEI UNUI SISTEM NELINIAR DE ECUAȚII DIFERENȚIALE

DE

I. MUNTEANU

Comunicare prezentată la Sesiunea Universităților „V. Babeș“ și „Bolyai“ din 27 mai 1958

În lucrarea de față se dă un criteriu de mărginire pe toată axa reală $-\infty < t < \infty$ a cel puțin unei soluții pentru un anumit sistem de ecuații diferențiale neliniare. Metoda demonstrației se bazează pe cunoscutul principiu topologic al lui W a z e w s k i [1] și pe cercetările lui B. P. D e m i d o v i c i [2], un rezultat al ultimului autor obținîndu-se într-un caz particular al teoremei demonstrate în această lucrare.

Fie dat sistemul de n ecuații diferențiale ordinare neliniare

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{dx_1}{dt} = A_1\ (x_1,\ x_2, \ldots,\ x_p) + \varphi_1\ (t,\ x_1, x_2, \ldots, x_n),\\
\dfrac{dx_2}{dt} = A_2\ (x_1,\ x_2, \ldots,\ x_p) + \varphi_2\ (t,\ x_1, x_2, \ldots,\ x_n),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\dfrac{dx_p}{dt} = A_p\ (x_1,\ x_2, \ldots,\ x_p) + \varphi_p\ (t,\ x_1, x_2, \ldots,\ x_n),\\
\dfrac{dx_{p+1}}{dt} = B_1\ (x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots,\ x_n) + \varphi_{p+1}\ (t,\ x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n),\\
\dfrac{dx_{p+2}}{dt} = B_2\ (x_{p+1},\ x_{p+2}, \ldots,\ x_n) + \varphi_{p+2}\ (t,\ x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\dfrac{dx_n}{dt} = B_{n-p}\ (x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n) + \varphi_n\ (t,\ x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n),
\end{array}\right\} \quad (1)$$

unde funcţiile A_i, B_j şi φ_k $(i = 1, 2, \ldots, p;\ j = 1,2, \ldots, n-p;\ k = 1,2, \ldots, n;$ $0 \leqslant p \leqslant n)$ sînt definite şi continue respectiv în domeniile

$$D_1 : \sum_{i=1}^{p} x_i^2 < \infty,\quad D_2 : \sum_{i=p+1}^{n} x_i^2 < \infty \quad \text{şi} \quad D_1 \times D_2 \times I, \quad \text{unde} \quad I = (-\infty, +\infty).$$

În plus, presupunem îndeplinite anumite condiţii care să asigure unicitatea şi prelungibilitatea soluţiilor.

Vom introduce notaţiile matriciale

$$A = \begin{Vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_p \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_{n-p} \end{Vmatrix}, \quad \Phi_A = \begin{Vmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_p \end{Vmatrix}, \quad \Phi_B = \begin{Vmatrix} \varphi_{p+1} \\ \varphi_{p+2} \\ \vdots \\ \varphi_n \end{Vmatrix}, \quad \Phi = \begin{Vmatrix} \Phi_A \\ \Phi_B \end{Vmatrix},$$

$$x = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix}, \quad \xi = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{Vmatrix}, \quad \eta = \begin{Vmatrix} x_{p+1} \\ x_{p+2} \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix}, \quad x = \begin{Vmatrix} \xi \\ \eta \end{Vmatrix}.$$

Atunci sistemul (1) se va scrie, mai scurt,

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= A(\xi) + \Phi_A(t, x), \\ \frac{d\eta}{dt} &= B(\eta) + \Phi_B(t, x), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

iar sistemele generatoare corespunzătoare se vor scrie

$$\frac{d\xi}{dt} = A(\xi) \tag{3}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = B(\eta) \tag{4}$$

În spaţiul euclidian E^s cu s dimensiuni vom nota cu ρ_s distanţa de la origine $O\,(0, 0, \ldots, 0)$ la punctul $M\,(x_1, x_2, \ldots, x_s)$:

$$\rho_s = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_s^2}, \quad \text{unde } 1 \leqslant s \leqslant n.$$

Fie date într-un spaţiu oarecare două mulţimi A şi B, astfel încît $A \subset B$. Fie P un punct al acestui spaţiu. Se zice că o aplicaţie $Q = T(P)$ efectuează o retractă a lui B în A, dacă ea este continuă în B şi dacă

$$T(P) \in A, \text{ cînd } P \in B,$$

$$T(P) = P, \text{ cînd } P \in A.$$

Dacă o asemenea aplicaţie există, atunci A se numeşte retract al lui B.

În spaţiul E^s fie definită funcţia $U\,(x_1, \ldots, x_s)$ continuă şi definită pozitiv şi cu derivate parţiale continue. Suprafaţa $U\,(x_1, \ldots, x_s) = a$, unde a este o constantă pozitivă, este omeomorfă cu sfera $\Sigma : x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_s^2 = 1$. Notăm cu D mulţimea punctelor $(x_1, \ldots, x_s)$ pentru care $U(x_1, \ldots, x_s) \leqslant a$ şi cu F frontiera acestei mulţimi.

L e m ă. *Frontiera F nu este un retract pentru mulţimea D.*

Demonstraţie. Presupunem contrariul, anume că există o aplicaţie $Q = T(P)$ care să efectueze o retractă a lui D în F. Întrucît F este omeomorfă cu sfera, fie $R = V\,(Q)$ aplicaţia continuă corespunzătoare care transformă frontiera F în suprafaţa sferei $\Sigma : x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_s^2 = 1$. Fie acum $S = W\,(R)$ aplicaţia care face să corespundă fiecărui punct $R \in \Sigma$ antipodul său $S \in \Sigma$. Această transformare este, evident, continuă. Aplicaţia

$$S = W\,(R) = W\,(V\,(Q)) = W\,(V\,(T\,(P)))$$

este continuă în D şi transformă mulţimea D într-o parte a sa. Dar această aplicaţie nu are nici un punct fix, adică un punct cu proprietatea $P = W\,(V\,(T\,(P)))$, ceea ce contrazice cunoscuta teoremă de punct fix a lui Brouwer [3].

Fie dat sistemul de s ecuaţii diferenţiale

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= P_1\,(x_1, x_2, \ldots, x_s), \\ \frac{dx_2}{dt} &= P_2\,(x_1, x_2, \ldots, x_s), \\ \frac{dx_s}{dt} &= P_s\,(x_1, x_2, \ldots, x_s) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

care, după introducerea notaţiei prescurtate $P = (P_1, P_2, \ldots, P_s)$, se va scrie astfel

$$\frac{dx}{dt} = P\,(x)\,. \tag{5'}$$

Relativ la sistemul (5′) vom introduce două definiţii:

Definiţia 1. Vom spune că sistemul (5′) se bucură de proprietatea L^+, dacă există funcţia definită pozitiv $U\,(x_1, \ldots, x_s)$ şi constantele pozitive h, H, $\rho^{(0)}$ astfel încît

$$(\text{grad}\ U, P) \geqslant h\,\rho_s \quad \text{şi} \quad |\text{grad}\ U| \leqslant H\rho_s$$

pentru $\rho_s > \rho^{(0)}$

Definiţia 2. Vom spune că sistemul (5′) se bucură de proprietatea L^-, dacă există funcţia definită pozitiv $V\,(x_1, \ldots, x_s)$ şi constantele pozitive h', H', $\rho^{(0)\prime}$ astfel încît

$$(\text{grad}\ V, P) \leqslant -h'\,\rho_s \quad \text{şi} \quad |\text{grad}\ V| \leqslant H'\,\rho_s$$

pentru $\rho_s > \rho^{(0)\prime}$

Vom reveni acum la sistemul de ecuaţii diferenţiale (1) sau, scris prescurtat, (2). Vom demonstra următoarea:

T e o r e m ă. *Pentru sistemul de ecuații diferențiale* (2) *fie îndeplinite următoarele condiții*:

1° *Sistemul generator* (3) *se bucură de proprietatea* L^+, *iar sistemul generator* (4) *se bucură de proprietatea* L^-;

2° *Există numerele pozitive*

$$\varepsilon,\ \varepsilon',\ H_1,\ H'_1,\ \bar{\rho},\ \bar{\rho}'$$

astfel încît

$$|\Phi_A(t,\ x)| < H_1\, \rho_\rho^{-\varepsilon},\ |\Phi_B(t,\ x)| < H_1'\, \rho_p^{*-\varepsilon'},$$

pentru

$$\rho_p = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_p^2} > \bar{\rho},\ \rho_p^* = \sqrt{x_{p+1}^2 + \ldots + x_n^2} > \rho$$

și

$$-\infty < t < \infty;$$

atunci sistemul (2) *are cel puțin o soluție mărginită pe toată axa reală, adică există cel puțin un punct* $\bar{x} \in D_1 \times D_2$ *astfel încît soluția* $\bar{x} = \bar{x}\,(t)$, *care satisface condiția* $\bar{x}\,(O) = \bar{x}$, *este mărginită pentru* $-\infty < t < \infty$.

Demonstrație. Considerăm la început cazul cînd $0 < p < n$. În spațiul $E^n = E^n\,(\xi,\ \eta)$ considerăm domeniul

$$g = \{\, U(\xi) < a,\ V(\eta) < a \,\}$$

(produsul cartezian a doi „elipsoizi"), unde a este o constantă pozitivă valoarea căreia o vom preciza mai jos. Frontiera γ a domeniului g constă din părțile corespunzătoare γ_1 și γ_2 ale suprafețelor $U(\xi) = a$ și $V(\eta) = a$ și anume

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2,$$

unde

$$\gamma_1 = \{\, U(\xi) = a,\ V(\eta) < a \,\}$$

și

$$\gamma_2 = \{\, U(\xi) \leqslant a,\ V(\eta) = a \,\}.$$

Fie

$$G = \{(\xi, \eta) \in g,\ -\infty < t < +\infty\}$$

un tub în spațiul E^{n+1} $(t,\ \xi,\ \eta)$ construit pe domeniul g. Evident, suprafața $\Gamma = \{(\xi,\ \eta) \in \gamma,\ -\infty < t < \infty\}$ servește ca frontieră a domeniului tubular G. Notăm

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2,$$

unde

$$\Gamma_1 = \{\,(\xi,\ \eta) \in \gamma_1,\ -\infty < t < +\infty\},\ \Gamma_2 = \{\,(\xi, \eta) \in \gamma_2,\ -\infty < t < +\infty\,\}.$$

Vom arăta că fiecare punct $Q_0(t_0,\ \xi_0, \eta_0) \in \Gamma_1$ este un punct de ieșire strictă din domeniul G. Într-adevăr, dacă $Q_0 \in \Gamma_1$, atunci potrivit primei ecuații din sistemul (2), avem

$$\frac{dU\,(Q_0)}{dt} = (\text{grad}\ U\,(\xi_0),\ A\,(\xi_0)) + (\text{grad}\ U\,(\xi_0),\ \Phi_A\,(t_0, x_0)).$$

Ținînd seama de inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski și de condiția 2° a teoremei, obținem

$$|(\text{grad}\ U\,(\xi_0),\ \Phi_A\,(t_0, x_0))| \leqslant |\text{grad}\ U\,(\xi_0)|.\ |\Phi_A\,(t_0, x_0)| < H.H_1\, \rho_p^{1-\varepsilon}$$

Utilizînd condiția 1° a teoremei, avem

$$\frac{dU\,(Q_0)}{dt} \geqslant h\rho_p - HH_1\, \rho_p^{1-\varepsilon} = h\rho_p\left(1 - \frac{HH_1}{h}\cdot\frac{1}{\rho_p^{\varepsilon}}\right).$$

Alegînd $\rho_p > \max\,(\rho^{(0)},\ \bar{\rho})$ suficient de mare, și pentru aceasta numărul a va trebui

să fie suficient de mare, vom obține că $1 - \frac{HH_1}{h}\cdot\frac{1}{\rho_p^{\varepsilon}} > 0$, de unde

$$\frac{dU\,(Q_0)}{dt} > 0.$$

Întrucît $V\,(Q_0) < a$, rezultă, evident, că punctul Q_0 este un punct de ieșire strictă din tubul G.

În mod analog se demonstrează că, alegînd în mod convenabil numărul a, pentru fiecare punct Q_0' $(t_0',\ \xi_0',\ \eta_0') \in \Gamma_2$, are loc inegalitatea

$$\frac{dV\,(Q_0')}{dt} < 0$$

și deci punctul Q_0' nu poate fi un punct de ieșire din domeniul G. Așadar, Γ_1 reprezintă mulțimea tuturor punctelor de ieșire din domeniul G și fiecare punct al acestei mulțimi este un punct de ieșire strictă din G.

Fixăm acum valorile t_0 și $\eta_0 = \{x_{p+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\}$, $(V(\eta_0) < a)$ și considerăm secțiunea corespunzătoare $z = z\,(t_0,\ \xi,\ \eta_0)$ a tubului G, unde t_0 și η_0 joacă rolul de parametri. Evident, mulțimea z reprezintă interiorul închis al elipsoidului $U\,(\xi) \leqslant a$. De aceea mulțimea $z \cap \Gamma_1$ este elipsoidul $U\,(\xi) = a$. Mulțimea Γ_1 admite o aplicație retractă pe mulțimea $z \cap \Gamma_1$; pentru realizarea unei asemenea aplicații este suficient ca fiecărui punct $Q\ (t,\ \xi,\ \eta) \in \Gamma_1$ să i se pună în corespondență punctul $Q_0\ (t_0, \xi, \eta_0) \in z \cap \Gamma_1$. Potrivit lemei nu există o aplicație retractă a elipsoidului închis $U(\xi) \leqslant a$ pe suprafața sa $U(\xi) = a$. De aceea nu există o aplicație retractă a mulțimii z pe mulțimea $z \cap \Gamma_1$. Dar atunci, pe baza principiului topologic al lui W a z e w s k i [1], pentru orice sistem de numere $(t_0,\ \eta_0)$ se poate alege valoarea $\xi_0 = \xi\ (t_0,\ \eta_0)$ astfel încît soluția corespunzătoare

$$\bar{x} = \bar{x}\,(t;\, t_0, x_0),$$

definită de condițiile inițiale $\overline{x}\big|_{t=t_0} = \left\|\begin{smallmatrix}\xi_0\\ \eta_0\end{smallmatrix}\right\|$, va fi pentru $t \geqslant t_0$ situată în întregime în interiorul tubului închis $\overline{G} = G \cup \Gamma$.

Prin urmare, în spațiul $Ox_1x_2 \ldots x_n$ există o familie n-p- parametrică $\mathfrak{M}_{n-p}$ de soluții ale sistemului (2) mărginite pentru $t \to +\infty$.

Înlocuind t cu $-t$, obținem că în spațiul $Ox_1x_2 \ldots x_n$ există, de asemenea, o familie p-parametrică $\mathfrak{M}_p$ de soluții ale sistemului (2) mărginite pentru $t \to -\infty$.

Considerăm acum spațiul $Otx_1x_2 \ldots x_n$. Fie S_m $(m = 1, 2, \ldots)$ intersecția cu hiperplanul $t = 0$ a mulțimii soluțiilor sistemului (1) mărginite pentru $t \to +\infty$ și care aparțin tubului închis $\overline{G}$ pentru $-m \leqslant t < +\infty$. Potrivit celor demonstrate, mulțimea S_m nu este vidă pentru nici un m și avem

$$S_1 \supset S_2 \supset \ldots . \supset S_m \supset \ldots .$$

Pe baza proprietății de continuitate a soluțiilor față de condițiile inițiale, mulțimile S_m sînt închise. Deci există punctul $\overline{x} \in \bigcap_{m=1}^{\infty} S_m$. Soluția $\overline{x} = \overline{x}(t)$, definită de condiția inițială $\overline{x}(0) = \overline{x}$, există evident pentru toate valorile lui t din intervalul $(-\infty, \infty)$ și este conținută în întregime în tubul închis $\overline{G}$, adică este mărginită pe toată axa reală $-\infty < t < \infty + \infty$.

Așadar, există cel puțin o soluție

$$\overline{x} = \overline{x}(t)$$

a sistemului (1) mărginită pe toată axa reală infinită $-\infty < t < \infty$, iar mărimea diametrului tubului G, în care este situată această soluție, depinde de alegerea numărului a. Deci există numărul pozitiv $r_0 = r_0(a)$ astfel încît

$$|\overline{x}(t)| < r_0$$

pentru $-\infty < t < \infty$.

Cazurile cînd $p = 0$ sau $p = n$ conduc la o demonstrație analoagă mult mai simplă, concluziile teoremei menținîndu-se și de această dată.

Teorema este astfel demonstrată în întregime.

Institutul de calcul al Academiei R.P.R., Filiala Cluj

КРИТЕРИЙ ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Доказывается следующая теорема.

Теорема. *Если для системы нелинейных дифференциальных уравнений* (1) *или в сокращенном виде* (2) *удовлетворены условия:*

1°. *Для порождающей системы* (3) *существует положительно определенная и непрерывно дифференцируемая функция* $U = U(x_1, \ldots . x_p)$ *и*

положителные постоянные h, H, $\rho^{(0)}$ *такие, что* $(\mathrm{grad}\ U, A| \geqslant h\rho_p$ и/$|\mathrm{grad}\ U| \leqslant \leqslant H\rho_p$ *при* $\rho_p > \rho^{(0)}$; *для порождающей системы* (4) *существует положително определенная и непрерывно дифференцируемая функция* $V = V(x_{p+1}, \ldots, x_n)$ *и положительные постоянные* h', H', $\rho^{(0)'}$ *такие, что* $(\mathrm{grad}\ V, B) \leqslant -h'\rho_p^*$ *и* $|\mathrm{grad}\ V| \leqslant H'\rho_p^*$. при $\rho_p^* > \rho^{(0)'}$.

2°. *Существуют положительные чизла* ε, ε' H_1', $\overline{\rho}$, $\overline{\rho}'$ *такие, что*

$$|\Phi_A(t, x)| < H_1\, \rho_{(p)}^{-\varepsilon}, \quad |\Phi_B(t, x)| < H_1'\, \rho_p^{*-\varepsilon'}$$

при $\rho_p > \overline{\rho}$, $\rho_p^* > \overline{\rho}'$ и $-\infty < t < \infty$;

тогда система (2) *имеет по крайней мере одно решение, ограниченное на всей вещественной оси.*

UN CRITÈRE DE DÉLIMITATION POUR LA SOLUTION D'UN SYSTÈME NON LINÉAIRE D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

RÉSUMÉ

L'auteur démontre le suivant

Théorème. Si, dans un système d'équations différentielles (1) *ou, en notation abrégée,* (2), *les conditions suivantes sont satisfaites:*

1° *il existe, pour le système générateur* (3), *une fonction* $U = U(x_1, \ldots . , x_p)$, *définie positive et aux dérivées partielles continues, et des constantes positives* h, H, $\rho^{(0)}$, *telles que*

$$(\mathrm{grad}\ U, A) \geqslant h\,\rho_p \ \textit{et}\ |\mathrm{grad}\ U| \leqslant H\,\rho_p$$

pour $\rho_p > \rho^{(0)}$; *et, pour le système générateur* (4) *il existe une fonction* $V = V(x_{p+1}, \ldots, x_n)$ *définie positive et aux dérivées partielles continues, et des constantes positives* h', H', $\rho^{(0)'}$, *telles que*

$$(\mathrm{grad}\ V, B) \leqslant -h'\rho_p^* \ \textit{et}\ |\mathrm{grad}\ V| \leqslant H'\rho_p^*$$

$$\textit{pour}\ \rho_p^* > \rho^{(0)};\ \text{et}$$

2° *il existe des nombres positifs* ε, ε', H_1, H'_1, $\overline{\rho}$, $\overline{\rho}'$, *tels que*

$$|\Phi_A(t, x)| < H_1\,\rho_p^{-\varepsilon}, \quad |\Phi_B(t, x)| < H_1'\,\rho_p^{*-\varepsilon'}$$

pour $\rho_p > \overline{\rho}$, $\rho_p^* > \overline{\rho}'$ et $-\infty < t < \infty$;

le système (2) *aura au moins une solution limitée pour* $-\infty < t < \infty$.

BIBLIOGRAFIE

1. T. Wazewski, *Sur un principe topologique de l'examen de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires*. Ann. Soc. Polon. de Math., **20**, 279–313 (1947).
2. Б. П. Демидович, *Об ограниченных решениях нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений*. Матем. Сборник, **40**, 1, 73—90 (1956).
3. L. E. J. Brouwer, *Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten*. Math. Ann., **71**, 97–115 (1912).