O METODĂ PENTRU CONSTRUIREA DE FORMULE DE CUBATURĂ PENTRU FUNCȚIILE DE DOUĂ VARIABILE

DE

D. D. STANCU

Comunicare prezentată la Sesiunea Filialei Cluj a Academiei R.P.R., din 17 aprilie 1957

În această lucrare vom extinde la două variabile o metodă pentru construirea de formule de integrare numerică pe care am expus-o în principiu, în cazul unei singure variabile, în lucrarea [1].

În prima parte a lucrării vom extinde la două variabile formula de interpolare a lui Lagrange-Hermite [1]).

§ 1. Asupra unei formule generale de interpolare

1. Să considerăm o rețea dreptunghiulară de noduri, care se obțin prin intersecția dintre dreptele paralele cu axa Oy

$$x = x_{\nu_1}\,(\nu_1 = \overline{1, n}),\ x = \alpha_{\nu_2}\,(\nu_2 = \overline{1, i}), \tag{1}$$

$$x = a'_p\,(p = \overline{1, \rho}) \tag{2}$$

și dreptele paralele cu axa Ox

$$y = y_{\mu_1}\,(\mu_1 = \overline{1, m}),\ y = \beta_{\mu_2}\,(\mu_2 = \overline{1, k}), \tag{3}$$

$$y = b'_q\,\left(q = \overline{1, \sigma}\right). \tag{4}$$

Prin intersecția acestor drepte se obțin $(n + i + \rho)\,(m + k + \sigma)$ noduri. Despre dreptele (1) și (3) vom presupune că sînt toate distincte, adică numerele reale x_{ν_1}, α_{ν_2} și y_{μ_1}, β_{μ_2} sînt respectiv distincte. Dreptele celelalte pot să nu fie distincte. În mod precis vom presupune că printre dreptele (2) există r_α drepte confundate în $x = a_\alpha\left(\alpha = \overline{1, s}\right)$, iar printre dreptele (4) vom presupune că există s_β drepte confundate în $y = b_\beta\left(\beta = \overline{1, r}\right)$. Pe baza notațiilor precedente avem

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_s = \rho,\quad s_1 + s_2 + \ldots + s_r = \sigma. \tag{5}$$

---

1) Formulei de interpolare a lui Lagrange-Hermite, din cazul unei variabile, i-am consacrat recent lucrarea [2].

În felul acesta se obține o rețea $\mathfrak{R}_{N,M}$ cu $(N+1)(M+1)$ noduri, nu toate distincte, unde

$$N = n + i + \rho - 1, \qquad M = m + k + \sigma - 1 \tag{6}$$

2. Formula de interpolare relativă la rețeaua $\mathfrak{R}_{N,M}$ și o funcție $f(x,y)$ definită și derivabilă parțial de un număr suficient de ori pe un domeniu care conține nodurile acestei rețele, se prezintă sub forma

$$f(x,y) = L_{N,M}(x,y) + R_{N,M}(f;x,y), \tag{7}$$

unde

$$L_{N,M}(x,y) = L\left(\begin{matrix} x_1,\dots,x_n,\alpha_1,\dots,\alpha_i,\overbrace{a_1,\dots,a_1}^{r_1},\dots,\overbrace{a_s,\dots,a_s}^{r_s} \\ y_1,\dots,y_m,\beta_1,\dots,\beta_k,\underbrace{b_1,\dots,b_1}_{s_1},\dots,\underbrace{b_r,\dots,b_r}_{s_r} \end{matrix};f \,\middle|\, \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) \tag{8}$$

este polinomul de interpolare de două variabile de gradul (N, M) al lui Lagrange-Hermite relativ la funcția $f(x,y)$ și nodurile rețelei $\mathfrak{R}_{N,M}$, iar $R_{N,M}(f;x,y)$ este restul acestei formule de interpolare.

Să introducem următoarele notații:

$$\left.\begin{aligned} & h(x) = \prod_{\nu=1}^{n}(x-x_\nu),\ u(x) = \prod_{\nu=1}^{i}(x-\alpha_\nu),\ A(x) = \alpha\prod_{\nu=1}^{s}(x-a_\nu)^{r_\nu}\ (\alpha \neq 0), \\ & h_\nu(x) = \frac{h(x)}{x-x_\nu},\ u_\nu(x) = \frac{u(x)}{x-\alpha_\nu},\ A_\nu(x) = \frac{A(x)}{(x-a_\nu)^{r_\nu}}, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} & g(y) = \prod_{\mu=1}^{m}(y-y_\mu),\ v(y) = \prod_{\mu=1}^{k}(y-\beta_\mu),\ B(y) = \beta\prod_{\mu=1}^{r}(y-b_\mu)^{s_\mu}, \\ & g_\mu(y) = \frac{g(y)}{y-y_\mu},\ v_\mu(y) = \frac{v(y)}{y-\beta_\mu},\ B_\mu(y) = \frac{B(y)}{(y-b_\mu)^{s_\mu}}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Pentru polinomul de interpolare (8) am găsit următoarea expresie

$$\begin{aligned} L_{N,M}(x,y) = & \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m} l_\nu^{(1)}(x)\,\omega_\mu^{(1)}(y) f(x_\nu,y_\mu) + \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{k} l_\nu^{(1)}(x)\,\omega_\mu^{(2)}(y) f(x_\nu,\beta_\mu) + \\ & + \sum_{\nu=1}^{i}\sum_{\mu=1}^{m} l_\nu^{(2)}(x)\,\omega_\mu^{(1)}(y) f(\alpha_\nu,y_\mu) + \sum_{\nu=1}^{i}\sum_{\mu=1}^{k} l_\nu^{(2)}(x)\,\omega_\mu^{(2)}(y) f(\alpha_\nu,\beta_\mu) + \\ & + \sum_{i_1=1}^{s}\sum_{\nu_1=0}^{r_{i_1}-1}\sum_{\mu=1}^{m} l_{i_1,\nu_1}(x)\,\omega_\mu^{(1)}(y)\frac{\partial^{\nu_1} f(a_{i_1},y_\mu)}{\partial x^{\nu_1}} + \\ & + \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{j_1=1}^{r}\sum_{\mu_1=0}^{s_{j_1}-1} l_\nu^{(2)}(x)\,\omega_{j_1,\mu_1}(y)\frac{\partial^{\mu_1} f(x_\nu,b_{j_1})}{\partial y^{\mu_1}} + \\ & + \sum_{i_1=1}^{s}\sum_{\nu_1=0}^{r_{i_1}-1}\sum_{\mu=2}^{m} l_{i_1,\nu_1}(x)\,\omega_\mu^{(2)}(y)\frac{\partial^{\nu_1} f(a_{i_1},\beta_\mu)}{\partial x^{\nu_1}} + \\ & + \sum_{\nu=1}^{i}\sum_{j_1=1}^{r}\sum_{\mu_1=0}^{s_{j_1}-1} l_\nu^{(2)}(x)\,\omega_{j_1,\mu_1}(y)\frac{\partial^{\mu_1} f(\alpha_\nu,b_{j_1})}{\partial y^{\mu_1}} + \\ & + \sum_{i_1=1}^{s}\sum_{\nu_1=0}^{r_{i_1}-1}\sum_{j_1=0}^{r}\sum_{\mu_1=0}^{s_{j_1}-1} l_{j_1,\nu_1}(x)\,\omega_{j_1,\mu_1}(y)\frac{\partial^{\nu_1+\mu_1} f(a_{i_1},b_{j_1})}{\partial x^{\nu_1}\partial y^{\mu_1}}, \end{aligned} \tag{11}$$

unde

$$l_\nu^{(1)}(x) = \frac{h_\nu(x)\,u(x)\,A(x)}{h_\nu(x_\nu)\,u(x_\nu)\,A(x_\nu)},\quad l_\nu^{(2)}(x) = \frac{h(x)\,u_\nu(x)\,A(x)}{h(\alpha_\nu)\,u_\nu(\alpha_\nu)\,A(\alpha_\nu)}, \tag{12}$$

$$l_{i_1,\nu_1}(x) = \sum_{\gamma=0}^{r_i-\nu_1-1}\frac{(x-a_{i_1})^{\nu_1}}{\nu_1!}\left[\frac{(x-a_{i_1})^\gamma}{\gamma!}\left(\frac{1}{C_{i_1}(x)}\right)^{(\gamma)}_{a_{i_1}}\right] C_{i_1}(x), \tag{13}$$

$$\omega_\mu^{(1)}(y) = \frac{g_\mu(y)v(y)B(y)}{g(y_\mu)\,v(y_\mu)\,B(y_\mu)},\quad \omega_\mu^{(2)}(y) = \frac{g(y)\,v_\mu(y)\,B(y)}{g(\beta_\mu)\,v_\mu(\beta_\mu)\,B(\beta_\mu)}, \tag{14}$$

$$\omega_{j_1,\mu_1}(y) \sum_{\delta=0}^{s_{j_1}-\mu_1-1}\frac{(y-b_{j_1})^{\mu_1}}{\mu_1!}\left[\frac{(y-b_{j_1})^\delta}{\delta!}\left(\frac{1}{D_{\nu_1}(y)}\right)^{(\delta)}_{b_{j_1}}\right] D_{j_1}(y), \tag{15}$$

iar

$$C_{i_1}(x) = h(x)u(x)A_{i_1}(x),\quad D_{\nu_1}(y) = g(y)v(y)B_{\nu_1}(y). \tag{16}$$

Restul formulei de interpolare (7) se poate exprima cu ajutorul diferențelor divizate parțiale, astfel

$$\begin{aligned} R_{N,M}(f;x,y) = & \; h(x)\,u(x)\widetilde{A}(x)\,[x, x_1,\dots, x_n, \alpha_1,\dots, \alpha_i, a_1,\dots, a_1,\dots, a_s,\dots,a_s\,;f] + \\ & + g(y)\,v(y)\widetilde{B}(y)\,[y, y_1,\dots,y_m, \beta_1,\dots, \beta_k, b_1,\dots, b_1,\dots,b_r,\dots,b_r\,; f] - \\ & - h(x)\,u(x)\widetilde{A}(x)\,g(y)\,v(y)\widetilde{B}(y)\begin{bmatrix} x, x_1,\dots,x_n, \alpha_1,\dots, \alpha_i, a_1,\dots, a_1,\dots,a_s,\dots, a_s \\ y, y_1,\dots,y_m,\dots,\beta_1,\dots,\beta_k, b_1,\dots, b_1,\dots, b_r,\dots, b_r \end{bmatrix};f\Bigg]^{1)}. \end{aligned} \tag{17}$$

3. Acest rest se poate pune sub o formă remarcabilă în ipoteza că $f(x,y)$ admite derivatele parțiale de ordinele $N+1$ în raport cu x și $M+1$ în raport cu y, pe cel mai mic dreptunghi care conține nodurile rețelei $\mathfrak{R}_{N,M}$.

Ne vom folosi de cîteva formule de suprapunere și de medie referitoare la diferențele divizate parțiale de care ne-am ocupat în lucrările [3], [4]. Avem succesiv

$$\begin{aligned} R_{N,M}(f;x,y) = & \; h(x)\,u(x)\widetilde{A}(x)\,[x, x_1,\dots, x_n, \alpha_1,\dots, \alpha_i, a_1,\dots, a_1,\dots, a_s,\dots, a_s; f] + \\ & + g(y)\,v(y)\widetilde{B}(y)\,[y, y_1,\dots, y_m, \beta_1,\dots, \beta_k, b_1,\dots, b_1,\dots, b_r,\dots, b_r\,; f] - \\ & - h(x)u(x)\widetilde{A}(x)g(y)v(y)\widetilde{B}(y)\,\big[y, y_1,\dots, y_m, \beta_1,\dots, \beta_k, b_1,\dots, b_1,\dots, b_r,\dots, b_r\,; \end{aligned}$$

$$[x, x_1,\dots, x_n, \alpha_1,\dots, \alpha_i, a_1,\dots, a_1,\dots, a_s,\dots, a_s\,; f]\big] = \frac{h(x)u(x)\widetilde{A}(x)}{(N+1)!}\,\frac{\partial^{N+1} f(\xi,y)}{\partial\xi^{N+1}}, +$$

$$+ g(y)\,v(y)\widetilde{B}(y)\,[y, y_1,\dots, y_m, \beta_1,\dots, \beta_k, b_1,\dots, b_1,\dots, b_r,\dots, b_r\,; f] -$$

$$- \frac{h(x)\,u(x)\widetilde{A}(x)g(y)\,v(y)\widetilde{B}(y)}{(N+1)!}\Big[y, y_1,\dots, y_m, \beta_1,\dots, \beta_k, b_1,\dots, b_1,\dots,b_r,\dots, b_r,;$$

---

[1]) Fie $P_m(t)$ un polinom de gradul efectiv m; prin $\widetilde{P}_m(t)$ vom înțelege produsul dintre o constantă C și $P_m(t)$ astfel încît $CP_m(t)$ să aibă coeficientul lui t^m egal cu 1.

$$\left.\frac{\partial^{N+1}f(\xi,y)}{\partial\xi^{N+1}}\right] = \frac{h(x)\,u(x)\,\widetilde{A}(x)}{(N+1)!}\,\frac{\partial^{N+1}f(\xi,y)}{\partial\xi^{N+1}} +$$

$$+\,g(y)\,v(y)\,\widetilde{B}(y)\Big[y, y_1,\dots, y_m, \beta_1,\dots, \beta_k, b_1,\dots, b_1,\dots b_r,\dots, b_r\,; f(x, y) -$$

$$-\frac{h(x)\,u(x)\,\widetilde{A}(x)}{(N+1)!}\,\left.\frac{\partial^{N+1}f(\xi,y)}{\partial\xi^{N+1}}\right] = \frac{h(x)\,u(x)\,\widetilde{A}(x)}{(N+1)!}\,\frac{\partial^{N+1}f(\xi,y)}{\partial\xi^{N+1}} +$$

$$+\frac{g(y)\,v(y)\,\widetilde{B}(y)}{(M+1)!}\left(\frac{\partial^{M+1}f(x,\eta)}{\partial\eta^{M+1}} - \frac{h(x)\,u(x)\,\widetilde{A}(x)}{(N+1)!}\,\frac{\partial^{N+M+2}f(\xi,\eta)}{\partial\xi^{N+1}\,\partial\eta^{M+1}}\right).$$

În felul acesta am obținut pentru restul formulei de interpolare (7) următoarea expresie

$$\begin{aligned} R_{N,M}(f;x,y) = {}& \frac{h(x)\,u(x)\,\widetilde{A}(x)}{(N+1)!}\,\frac{\partial^{N+1}f(\xi,y)}{\partial\,\xi^{N+1}} + \frac{g(y)\,v(y)\,\widetilde{B}(y)}{(M+1)}\,\frac{\partial^{M+1}(x,\eta)}{\partial\,\eta^{M+1}} - \\ & - \frac{h(x)\,u(x)\,\widetilde{A}(x)\,g(y)\,v(y)\,\widetilde{B}(y)}{(N+1)!\;(M+1)!}\,\frac{\delta^{N+M+2}f(\xi,\eta)}{\partial\,\xi^{N+1}\,\delta\,\eta^{M+1}}, \end{aligned} \tag{18}$$

unde ξ și η sînt valori din cele mai mici intervale care îi conțin respectiv pe $x, x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_i, a_1, \dots, a_s$ și $y, y_1, \dots, y_m, \beta_1, \dots, \beta_k, b_1, \dots, b_r$.

Subliniem că valorile ξ și η care intervin mai sus sînt aceleași în toți termenii restului.

Rezultatele precedente se pot extinde fără nici o greutate la trei și mai multe variabile.

§ 2. Formule de integrare numerică de grad înalt de exactitate

4. Folosind formula de interpolare (7) vom construi o formulă generală de cubatură pentru calculul numeric al integralei duble

$$I = \iint\limits_D p(x, y)\,f(x, y)\,dx\,dy, \tag{19}$$

unde D este dreptunghiul definit de inegalitățile

$$a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d, \tag{20}$$

iar $p(x,y)$ e o funcție dată, nenegativă și integrabilă în D.

Formula de cubatură care se obține este

$$\begin{aligned} I = {}& \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m} A_{\nu,\mu}\,f(x_\nu, y_\mu) + \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{k} B_{\nu,\mu}\,f(x_\nu, \beta_\mu) + \\ & + \sum_{\nu=1}^{i}\sum_{\mu=1}^{m} C_{\nu,\mu}\,f(\alpha_\nu, y_\mu) + \sum_{\nu=1}^{i}\sum_{\mu=1}^{k} D_{\nu,\mu}\,f(\alpha_\nu, \beta_\mu) + \\ & + \sum_{\nu=1}^{i}\sum_{j_1=1}^{r}\sum_{\mu_1=0}^{s_{j_1}-1} E_{\nu,j_1,\mu_1}\,\frac{\partial^{\mu_1}f(\alpha_\nu, b_{j_1})}{\partial\,y^{\mu_1}} + \sum_{i_1=1}^{s}\sum_{\nu_1=0}^{r_{i_1}-1}\sum_{\mu=1}^{k} F_{i_1,\nu_1,\mu}\,\frac{\partial^{\nu_1}f(a_{i_1}, \beta_\mu)}{\partial\,x^{\nu_1}} + \\ & + \sum_{i_1=1}^{s}\sum_{\nu_1=0}^{r_{i_1}-1}\sum_{\mu=1}^{m} G_{i_1,\nu_1,\mu}\,\frac{\partial^{\nu_1}f(a_{i_1}, y_\mu)}{\partial\,x^{\nu_1}} + \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{j_1=1}^{r}\sum_{\mu_1=0}^{s_{j_1}-1} H_{\nu,j_1,\mu_1}\,\frac{\partial^{\mu_1}f(x_\nu, b_{j_1})}{\partial\,y^{\mu_1}} + \\ & + \sum_{i_1=1}^{s}\sum_{\nu_1=0}^{r_{i_1}-1}\sum_{j_1=1}^{r}\sum_{\mu_1=0}^{s_{j_1}-1} I_{i_1,\nu_1,j_1,\mu_1}\,\frac{\partial^{\nu_1+\mu_1}f(a_{i_1}, b_{j_1})}{\partial\,x^{\nu_1}\,\partial y^{\mu_1}} + \rho[f], \end{aligned} \tag{21}$$

expresiile coeficienților căreia se pot scrie imediat pe baza formulelor (7) și (11).

5. Să presupunem că $p(x,y) = p_1(x)p_2(y)$. Considerînd mai general că dreptunghiul D poate fi și infinit, vom presupune că există « momentele »

$$c_n = \int_a^b p_1(x)\,x^n\,dx,\ d_m = \int_c^d p_2(y)\,y^m\,dy$$

$$(n, m = 0, 1, 2, \dots)$$

și că $c_0 > 0$, $d_0 > 0$.

Vom încerca acum să determinăm pe x_ν $(\nu = \overline{1, n})$ și y_μ $(\mu = \overline{1, m})$ astfel încît în membrul al doilea al formulei (21) să dispară sumele duble: a doua, a treia, a patra, a cincea și a șasea. În mod precis vom demonstra următoarea:

T e o r e m ă. *Condiția necesară și suficientă ca în formula* (21), *unde* $i=n$, $k=m$, *să avem, oricare ar fi* $\alpha_1,\dots,\alpha_n$, $\beta_1,\dots,\beta_m$,

$$\left.\begin{aligned} & B_{\nu,\mu} = 0\ (\nu = \overline{1,n};\ \mu = \overline{1,m}),\ C_{\nu,\mu} = 0\ (\nu = \overline{1,n};\ \mu = \overline{1,m}), \\ & D_{\nu,\mu} = 0\ (\nu = \overline{1,n};\ \mu = \overline{1,m}),\ E_{\nu,j_1,\mu_1} = 0\ (\nu = \overline{1,n};\ j_1 = \overline{1,r};\ \mu_1 = 0,s_{j_1}-1) \\ & F_{i_1,\nu_1,\mu} = 0\ (i_1 = \overline{1,s};\ \nu_1 = \overline{0,r_{i_1}-1};\ \mu = \overline{1,m}), \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

este ca x_ν $(\nu = \overline{1,n})$, y_ν $(\mu = \overline{1,m})$ *să fie rădăcinile reale și distincte, respectiv ale polinoamelor ortogonale*

$$Q_n(x) = \frac{1}{A(x)} \begin{vmatrix} \Phi_n(x) & \Phi_{n+1}(x) & \dots & \Phi_{n+\rho}(x) \\ \Phi_n(a_1) & \Phi_{n+1}(a_1) & \dots & \Phi_{n+\rho}(a_1) \\ \Phi'_n(a_1) & \Phi'_{n+1}(a_1) & \dots & \Phi'_{n+\rho}(a_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Phi_n^{(r_1-1)}(a_1) & \Phi_{n+1}^{(r_1-1)}(a_1) & \dots & \Phi_{n+\rho}^{(r_1-1)}(a_1) \\ \Phi_n(a_2) & \Phi_{n+1}(a_1) & \dots & \Phi_{n+\rho}(a_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Phi_n(a_s) & \Phi_{n+1}(a_s) & \dots & \Phi_{n+\rho}(a_s) \\ \Phi'_n(a_s) & \Phi'_n(a_s) & \dots & \Phi'_{n+\rho}(a_s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Phi_n^{(r_s-1)}(a_s) & \Phi_{n+1}^{(r_s-1)}(a_s) & \dots & \Phi_{n+\rho}^{(r_s-1)}(a_s) \end{vmatrix}, \tag{23}$$

$$R_m(y) = \frac{1}{B(y)} \begin{vmatrix} \Psi_m(y) & \Psi_{m+1}(y) & \dots & \Psi_{m+\sigma}(y) \\ \Psi_m(b_1) & \Psi_{m+1}(b_1) & \dots & \Psi_{m+\sigma}(b_1) \\ \Psi'_m(b_1) & \Psi'_{m+1}(b_1) & \dots & \Psi'_{m+\sigma}(b_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Psi_m^{(s_1-1)}(b_1) & \Psi_{m+1}^{(s_1-1)}(b_1) & \dots & \Psi_{m+\sigma}^{(s_1-1)}(b_1) \\ \Psi_m(b_2) & \Psi_{m+1}(b_2) & \dots & \Psi_{m+\sigma}(b_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Psi_m(b_r) & \Psi_{m+1}(b_r) & \dots & \Psi_{m+\sigma}(b_r) \\ \Psi'_m(b_r) & \Psi'_{m+1}(b_r) & \dots & \Psi'_{m+\sigma}(b_r) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Psi_m^{(s_r-1)}(b_r) & \Psi_{m+1}^{(s_r-1)}(b_r) & \dots & \Psi_{m+\sigma}^{(s_r-1)}(b_r) \end{vmatrix}, \tag{24}$$

unde $\{\Phi_n(x)\}$ *este sistemul de polinoame ortogonale relative la intervalul* (a,b) *și ponderea* $p_1(x)$, *iar* $\{\Psi_m(y)\}$ *este sistemul de polinoame ortogonale relative la intervalul* (c,d) *și ponderea* $p_2(y)$.

Demonstrația este imediată. Avînd în vedere expresiile coeficienților de la (22) se găsește că este necesar și suficient ca

$$\int_a^b p_1(x)\, A(x)\, h(x)\, P(x)\, dx = 0, \quad \int_c^d p_2(y)\, B(y)\, g(y)\, Q(y)\, dy = 0,$$

unde $P(x)$ și $Q(y)$ sînt polinoame oarecare de grad $n-1$, respectiv $m-1$.

Se știe că polinoamele $h(x)$ și $g(y)$, care verifică aceste condiții, sînt date de formulele (23) și (24) ale lui Christoffel.

6. Alegînd valorile $x_1,\dots,x_n$ și $y_1,\dots,y_m$ să fie respectiv rădăcinile polinoamelor (23) și (24), formula de cubatură (21) se reduce la următoarea

$$\begin{aligned} \iint_D p(x,y)\, f(x,y)\, dx\, dy &= \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{m} A_{\nu,\mu} f(x_\nu, y_\mu) + \\ &+ \sum_{i_1=1}^{s} \sum_{\nu_1=0}^{r_{i_1}-1} \sum_{\mu=1}^{m} G_{i_1,j_1,\mu} \frac{\partial^{\nu_1} f(a_{i_1}, y_\mu)}{\partial x^{\nu_1}} + \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{j_1=1}^{r} \sum_{\mu_1=0}^{s_{j_1}-1} H_{\nu,j_1,\mu_1} \frac{\partial^{\mu_1} f(x_\nu, b_{j_1})}{\partial y^{\mu_1}} + \\ &+ \sum_{i_1=1}^{s} \sum_{\nu_1=0}^{r_{i_1}-1} \sum_{j_1=1}^{r} \sum_{\mu_1=0}^{s_{j_1}-1} I_{i_1,\nu_1 j_1,\mu_1} \frac{\partial^{\nu_1+\mu_1} f(a_{i_1}, b_{j_1})}{\partial x^{\nu_1}\, \partial y^{\mu_1}} + \rho[f]. \end{aligned} \tag{25}$$

Pentru coeficienții acestei formule de cubatură am obținut următoarele expresii

$$\left.\begin{aligned} A_{\nu,\mu} &= A'_\nu B'_\mu = A''_\nu B''_\mu = A'''_\nu B'''_\mu, \\ G_{i_1,\nu_1,\mu} &= C_{i_1,\nu_1} B'_\mu = C_{i_1,\nu_1} B''_\mu = C_{i_1,\nu_1} B'''_\mu, \\ H_{\nu,j_1,\mu_1} &= A'_\nu D_{j_1,\mu_1} = A''_\nu D_{j_1,\mu_1} = A'''_\nu D_{j_1,\mu_1}, \\ I_{i_1,\nu_1,j_1,\mu_1} &= C_{i_1,\nu_1} D_{j_1,\mu_1}, \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

unde

$$\left.\begin{aligned} A'_\nu &= \int_a^b p_1(x) \frac{h_\nu(x)\, A(x)}{h_\nu(x_\nu)\, A(x_\nu)}\, dx, \quad A''_\nu = \int_a^b p_1(x) \left(\frac{h_\nu(x)}{h_\nu(x_\nu)}\right)^2 \frac{A(x)}{A(x_\nu)}\, dx, \\ A'''_\nu &= \frac{c_{n+\rho}\, \gamma_{n-1}^2\, G_n^2}{\alpha\, c_{n-1}} \cdot \frac{1}{A(x_\nu)\, Q'_n(x_\nu)\, Q_{n-1}(x_\nu)}, \\ B'_\mu &= \int_c^d p_2(y) \frac{g_\mu(y)\, B(y)}{g_\mu(y_\mu) B(y_\mu)}\, dy, \quad B''_\mu = \int_c^d p_2(y) \left(\frac{g_\mu(y)}{g_\mu(y_\mu)}\right)^2 \frac{B(y)}{B(y_\mu)}\, dy \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

$$\left.\begin{aligned} B'''_\mu &= \frac{d_{m+\sigma}\, \delta_{m-1}^2\, L_m^2}{\beta d_{m-1}} \cdot \frac{1}{B(y_\mu)\, R'_m(y_\mu)\, R_{m-1}(y_\mu)}, \\ C_{i_1,\nu_1} &= \int_a^b p_1(x)\, L^{(1)}_{i_1,\nu_1}(x)\, dx, \quad D_{j_1,\mu_1} = \int_c^d p_2(y)\, L^{(2)}_{j_1,\mu_1}(y)\, dy. \end{aligned}\right\} \tag{27'}$$

Mai sus am folosit şi următoarele notaţii:

1° c_k e coeficientul lui x^k din polinomul ortogonal $\Phi_r(x)$, iar d_r e coeficientul lui y^r din polinomul ortogonal $\Psi_r(y)$.

2° G_n e minorul elementului $\Phi_{n+\rho}(x)$ din determinantul de la (23), iar L_m minorul elementului $\Psi_{m+\sigma}(y)$ din determinantul de la (24).

3°

$$\gamma_n^2 = \int_a^b p_1(x)\, \Phi_n^2(x)\, dx, \quad \delta_m^2 = \int_c^d p_2(y)\, \Psi_m^2(y)\, dy.$$

4°

$$L^{(1)}_{i,\upsilon_1}(x) = \sum_{\rho_1=0}^{r_{i_1}-\upsilon_1-1} \frac{(x-a_{i_1})^{\upsilon_1}}{\upsilon_1!}\left[\frac{(x-a_{i_1})^{\rho_1}}{\rho_1!}\left(\frac{1}{E_{i_1}(x)}\right)^{(\rho_1)}_{a_{i_1}}\right] E_{i_1}(x), \quad E_{i_1}(x) = h(x)\, A_{i_1}(x),$$

$$L^{(2)}_{j_1,\mu_1}(y) = \sum_{\sigma_1=0}^{s_{i_1}-\mu_1-1} \frac{(y-b_{j_1})^{\mu_1}}{\mu_1!}\left[\frac{(y-b_{j_1})^{\sigma_1}}{\sigma_1!}\left(\frac{1}{F_{j_1}(y)}\right)^{(\sigma_1)}_{b_{j_1}}\right] F_{j_1}(y), \quad F_{j_1}(y) = g(y)\, B_{j_1}(y).$$

7. Formula de cubatură (25) are gradul de exactitate $(2n+\rho-1,\ 2m+\sigma-1)$, adică $\rho[f] \equiv 0$ în cazul cînd $f(x, y)$ este un polinom de gradul $2n+\rho-1$ în raport cu x şi de gradul $2m+\sigma-1$ în raport cu y.

Pentru a găsi expresia restului formulei (25) vom lua $i = n$ şi $k = m$ şi vom considera cazul limită

$$h(x) \equiv u(x) \equiv \widetilde{Q}_n(x), \quad g(y) \equiv v(y) \equiv \widetilde{R}_m(y). \tag{28}$$

Vom pleca de la formula (17), care în acest caz se scrie

$$R_{N,M}(f; x, y) = r_1(x, y) + r_2(x, y) - r_3(x, y),$$

unde

$$r_1(x, y) = \widetilde{Q}_n^2(x)\, \widetilde{A}(x)\, [x, x_1, x_1, x_2, x_2, \ldots, x_n, x_n, a_1, \ldots, a_1, \ldots, a_s, \ldots, a_s; f],$$

$$r_2(x, y) = \widetilde{R}_m^2(y)\, \widetilde{B}(y)\, [y, y_1, y_1, y_2, y_2, \ldots, y_m, y_m, b_1, \ldots, b_1, \ldots, b_r, \ldots, b_r; f],$$

$$r_3(x, y) = \widetilde{Q}_n^2(x)\, \widetilde{A}(x)\, \widetilde{R}^2(y)\, \widetilde{B}(y) \left[\begin{matrix} x, x_1, x_1, x_2, x_2, \ldots, x_n, x_n, a_1, \ldots, a_1, \ldots, a_s, \ldots, a_s \\ y, y_1, y_1, y_2, y_2, \ldots, y_m, y_m, b_1, \ldots, b_1, \ldots, b_s, \ldots, b_s \end{matrix}; f\right].$$

Pe baza unei proprietăţi de suprapunere a diferenţelor divizate parţiale, de care ne-am mai folosit în această lucrare, şi unor formule de medie bine cunoscute putem scrie succesiv

$$\iint p(x, y)\, [r_1(x, y) - r_3(x, y)]\, dx\, dy =$$

$$= \int_c^d p_2(y) \left\{ \int_a^b p_1(x)\, \widetilde{Q}_n^2(x)\, A(x) \Big[x, x_1, x_1, x_2, x_2, \ldots, x_n, x_n, a_1, \ldots, a_1, \ldots, a_s, \ldots, a_s; f(x, y) - \right.$$

$$\left. - \widetilde{R}_m^2(y)\, \widetilde{B}(y)\, [y, y_1, y_1, y_2, y_2, \ldots, y_m, y_m, b_1, \ldots, b_1, \ldots, b_r, \ldots, b_r; f(x, y)]\Big] dx \right\} dy =$$

$$= \int_c^d p_2(y) \big\{[\xi', x_1, x_1, x_2, x_2, \ldots, x_n, x_n, a_1, \ldots, a_1, \ldots, a_s, \ldots, a_s; f(\xi', y) -$$

$$- \widetilde{Q}_m^2(y)\, \widetilde{B}(y)\, [y, y_1, y_1, y_2, y_2, \ldots, y_m, y_m, b_1, \ldots, b_1, \ldots, b_r, \ldots, b_r; f(\xi', y)]]\, A_1\big\}\, dy =$$

$$= A_1 \int_c^d p_2(y) \left\{ \frac{1}{(2n+\rho)!} \frac{\partial^{2n+\rho} f(\xi, y)}{\partial \xi^{2n+\rho}} - \frac{\widetilde{R}_m^2(y)\, \widetilde{B}(y)}{(2n+\rho)!} \Big[y, y_1, y_1, y_2, y_2, \ldots, y_m, y_m, b_1, \ldots \right.$$

$$\left. \ldots, b_1, \ldots, b_r, \ldots, b_r; \frac{\partial^{2n+\rho}(\xi, y)}{\partial \xi^{2n+\rho}}\Big] \right\} dy = \frac{A_1 B_2}{(2n+\rho)!} \frac{\partial^{2n+\rho} f(\xi, \eta_1)}{\partial \xi^{2n+\rho}} -$$

$$- \int_c^d p_2(y) \frac{\widetilde{R}_m^2(y)\, \widetilde{B}(y)}{(2n+\rho)!} \left[y, y_1, y_1, y_2, y_2, \ldots, y_m, y_m, b_1, \ldots, b_1, \ldots, b_r, \ldots, b_r; \frac{\partial^{2n+\rho} f(\xi, y)}{\partial \xi^{2n+\rho}}\right] dy,$$

unde

$$A_1 = \int_a^b p_1(x)\, \widetilde{Q}_n^2(x)\, \widetilde{A}(x)\, dx, \quad \widetilde{B}_2 = \int_c^d p_2(y)\, dy, \tag{29}$$

iar $\xi \in (a, b)$ şi $\eta \in (c, d)$.

Cu acestea avem

$$\rho[f] = \frac{A_1 B_2}{(2n+\rho)!} \frac{\partial^{2n+\rho} f(\xi, \eta_1)}{\partial \xi^{2n+\rho}} +$$

$$+ \int_c^d p_2(y) \widetilde{R}_m^2(y) \widetilde{B}(y) \Bigg[y, y_1, y_1, y_2, y_2, \ldots, y_m, y_m, b_1, \ldots, b_1, \ldots, b_r, \ldots, b_r;$$

$$\int_a^b p_1(x) f(x, y)\, dx - \frac{A_1}{(2n+\rho)!} \frac{\partial^{2n+\rho} f(\xi, y)}{\partial \xi^{2n+\rho}} \Bigg] dy + \frac{A_1 B_2}{(2n+\rho)!} \frac{\partial^{2n+\rho} f(\xi, \eta_1)}{\partial \xi^{2n+\rho}} +$$

$$+ A_2 \Bigg[\eta', y_1, y_1, y_2, y_2, \ldots, y_m, y_m, b_1, \ldots, b_1, \ldots, b_r, \ldots, b_r; \int_a^b p_1(x) f(x, \eta')\, dx -$$

$$- \frac{A_1}{(2n+\rho)!} \frac{\partial^{2n+\rho} f(\xi, \eta')}{\partial \xi^{2n+\rho}} \Bigg].$$

Rezultă că restul formulei generale de cubatură (25) se poate pune sub forma

$$\rho[f] = \frac{A_1 B_2}{(2n+\rho)!} \frac{\partial^{2n+\rho} f(\xi, \eta_1)}{\partial \xi^{2n+\rho}} + \frac{A_2 B_1}{(2m+\sigma)} \frac{\partial^{2m+\rho} f(\xi_1, \eta)}{\partial \nu^{2m+\rho}} -$$

$$- \frac{A_1 A_2}{(2n+\rho)!(2m+\sigma)!} \frac{\delta^{2n+2m+\rho+\sigma} f(\xi, \eta)}{\partial \xi^{2n+\rho} \partial \eta^{2m+\sigma}}, \tag{30}$$

unde $\xi_1 \in (a, b)$, $\eta \in (c, d)$, iar alături de notațiile de la (29) am mai folosit și următoarele

$$A_2 = \int_c^d p_2(y) \widetilde{R}_m^2(y) \widetilde{B}(y)\, dy, \quad B_1 = \int_a^b p_1(x)\, dx. \tag{31}$$

8. În cazul particular

$$\rho = 0, \ \sigma = 0 \tag{32}$$

formula generală de cubatură (25) se reduce la formula de tip Gauss

$$\iint_D p(x, y) f(x, y)\, dx\, dy = \sum_{\upsilon=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{m} A'_{\upsilon,\mu} f(x_\upsilon, y_\mu) + \rho_1[f], \tag{33}$$

unde

$$A'_{\upsilon,\mu} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n \gamma_m}\, \Phi'_n(x_\upsilon) \psi'_m(y_\mu) \Phi_{n-1}(x_\upsilon) \psi_{m-1}(y_\mu)},$$

cu

$$\lambda_n = \left(\int_a^b p_1(x) \widetilde{\Phi}_n^2(x)\, dx \right) : \left(\int_a^b p_1(x) \widetilde{\Phi}_{n-1}^2(x)\, dx \right),$$

$$\gamma_m = \left(\int_c^d p_2(y) \widetilde{\psi}_m^2(y)\, dy \right) : \left(\int_c^d p_2(y) \widetilde{\psi}_{m-1}^2(y)\, dy \right).$$

Pe baza formulei (30), restul formulei (33) are următoarea expresie

$$\rho_1(f) = \frac{A'_1 B_2}{(2n)!} \frac{\partial^{2n} f(\xi, \eta_1)}{\partial \xi^{2n}} + \frac{A'_2 B_1}{(2m)!} \frac{\partial^{2m} f(\xi_1, \eta)}{\partial \eta^{2m}} -$$

$$- \frac{A'_1 A'_2}{(2n)!(2m)!} \frac{\partial^{2n+2m} f(\xi, \eta)}{\partial \xi^{2n} \partial \eta^{2m}}, \tag{34}$$

unde

$$A'_1 = \int_a^b p_1(x) \widetilde{\Phi}_n^2(x)\, dx, \quad A'_2 = \int_c^d p_2(y) \widetilde{\psi}_m^2(y)\, dy,$$

iar B_1 și B_2 au expresiile de la (31) și (29).

9. Dacă $p(x,y) \equiv 1$, $a=c=-1$, $b=d=1$, formula (33) se reduce la următoarea

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(x, y)\, dx\, dy = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{m} A'_{\nu,\mu} f(x_\nu, y_\mu) + \rho_2[f], \tag{35}$$

unde

$$A_{\nu,\mu} = \frac{4}{nm\, P'_n(x_\nu) P_{n-1}(x_\nu) P'_m(y_m) P'_{m-1}(y_m)},$$ 1)

iar

$$\rho_2[f] = \frac{4^{n+1}}{2n+1} \cdot \frac{m!}{[(n+1)(n+2)\ldots 2n]^3} \frac{\partial^{2n} f(\xi, \eta_1)}{\partial \xi^{2n}} +$$

$$+ \frac{4^{m+1}}{2m+1} \frac{m!}{[(m+1)(m+2)\ldots 2m]^3} \frac{\partial^{2m} f(\xi_1, \eta)}{\partial \eta^{2m}} -$$

$$- \frac{4^{n+m+1}}{(2n+1)(2m+1)} \cdot \frac{n!\, m!}{[(n+1)(n+2)\ldots 2n]^3 [(m+1)(m+2)\ldots 2m]^3} \cdot \frac{\partial^{2n+2m} f(\xi, \eta)}{\partial \xi^{2n} \partial \eta^{2m}}.$$

De această formulă de cubatură ne-am ocupat și în lucrarea [4].

---

1) Cu $P_r(t)$ am notat polinomul lui Legendre: $\frac{1}{2^r \cdot r!} [(t^2-1)^r]^{(r)}$.

§ 3. Cazuri particulare ale formulei generale de cubatură

10. Folosind rezultatele din paragraful precedent se pot construi efectiv, cu uşurinţă, multe formule de cubatură care sînt simple şi au gradul înalt de exactitate. În cazul

$$p_1(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta,\ p_2(y) = (1-y)^{\alpha'}(1+y)^{\beta'}\ (\alpha,\alpha',\beta,\beta' > -1) \tag{32}$$

$$A(x) = 1 - x^2,\ B(y) = 1 - y^2,\ a = c = -1,\ b = d = 1$$

şi $n = m = 1$, se obţin valorile

$$x_1 = \frac{\beta - \alpha}{\alpha + \beta + 4},\ y_1 = \frac{\beta' - \alpha'}{\alpha' + \beta' + 4}.$$

Pentru

$$\alpha = \alpha' = \frac{1}{2},\ \beta = \beta' = -\frac{1}{2} \tag{33}$$

se obţine formula de cubatură

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{(1-x)(1-y)}{(1+x)(1+y)}} f(x,y)\,dx\,dy = \frac{\pi^2}{3600}\Big\{625 f(-1,1) + 75[f(-1,1) + f(1,-1)] + 9f(1,1) + 800\left[f\left(-1,-\frac{1}{4}\right) + f\left(-\frac{1}{4},-1\right)\right] + 96\left[f\left(1,-\frac{1}{4}\right) + f\left(-\frac{1}{4},1\right)\right] + 1024 f\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right)\Big\} - \frac{\pi^2}{256}\left[\frac{\partial^4 f(\xi,\eta_1)}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^4 f(\xi_1,\eta)}{\partial \eta^4} + \frac{1}{256}\frac{\partial^8 f(\xi,\eta)}{\partial \xi^4 \partial \eta^4}\right]. \tag{34}$$

11. Dacă

$$\alpha = \beta,\ \alpha' = \beta',\ a = c = -1,\ b = d = +1, \tag{35}$$

coordonatele nodurilor formulei de cubatură (25) se află rezolvînd ecuaţiile

$$\left.\begin{aligned} &(\alpha + n + 1)(\alpha + n + 2)\, J_n^{(\alpha,\alpha)}(x) - (n+1)(n+2)\, J_{n+2}^{(\alpha,\alpha)}(x) = 0,\\ &(\alpha' + m + 1)(\alpha' + m + 2)\, J_m^{(\alpha',\alpha')}(y) - (m+1)(m+2)\, J_{m+2}^{(\alpha',\alpha')}(y) = 0, \end{aligned}\right\}, \tag{36}$$

unde cu $J_\nu^{(p,p)}(t)$ am notat polinomul lui Jacobi

$$J_\nu^{(p,p)}(t) = \frac{1}{2^\nu \cdot \nu!}(t^2 - 1)^{-p}\frac{d^\nu}{dt^\nu}(t^2-1)^{\nu+p}.$$

În cazul $n = m = 1$ se obţine formula de cubatură

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^\alpha (1-y^2)^{\alpha'} f(x,y)\,dx\,dy = 4^{\alpha+\alpha'+1}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\alpha'+1)\Gamma(\alpha'+2)}{\Gamma(2\alpha+4)\Gamma(2\alpha'+4)} \cdot \{f(-1,-1) + f(-1,1) + f(1,-1) + f(1,1) + 4[(\alpha+1)f(0,-1) + f(0,1) + (\alpha'+1)f(-1,0) + f(1,0)] + 16(\alpha+1)(\alpha'+1)f(0,0)\} - \frac{4^{\alpha+\alpha'+1}}{3}\left[\frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\alpha+3)\Gamma(\alpha'+1)^2}{\Gamma(2\alpha+6)}\frac{\partial^4 f(\xi,\eta_1)}{\partial \xi^4} + \frac{\Gamma(\alpha+1)^2\Gamma(\alpha'+2)\Gamma(\alpha'+3)}{\Gamma(2\alpha'+6)}\frac{\partial^4 f(\xi_1,\eta)}{\partial \eta^4} + \frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\alpha+3)\Gamma(\alpha'+2)\Gamma(\alpha'+3)}{3\Gamma(2\alpha+6)\Gamma(2\alpha'+6)}\frac{\partial^8 f(\xi,\eta)}{\partial \xi^4 \partial \eta^4}\right]. \tag{37}$$

De aici, pentru $\alpha = \alpha' = 0$, se obţine formula de integrare numerică a lui Cavalieri-Simpson pentru două variabile

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{9}\Big\{f(-1,-1) + f(-1,1) + f(1,-1) + f(1,1) + 4[f(-1,0) + f(0,-1) + f(1,0) + f(0,1)] + 16f(0,0)\Big\} - \frac{1}{45}\left[\frac{\partial^4 f(\xi,\eta_1)}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^4 f(\xi_1,\eta)}{\delta \eta^4} + \frac{1}{180}\frac{\partial^8 f(\xi,\eta)}{\partial \xi^4 \partial \eta^4}\right]. \tag{38}$$

Într-un caz mai general ne-am ocupat de această formulă în lucrarea [5].

Pentru $\alpha = \alpha' = -\frac{1}{2}$ formula (37) devine

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \frac{f(x,y)\,dx\,dy}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}} = \frac{\pi^2}{16}\{f(-1,-1) + f(-1,1) + f(1,-1) + f(1,1) + 2[f(-1,0) + f(0,-1) + f(1,0) + f(0,1)] + 4f(0,0)\} - \frac{\pi^2}{192}\left[\frac{\partial^4 f(\xi,\eta_1)}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^4 f(\xi_1,\eta)}{\partial \eta^4} + \frac{1}{192}\frac{\partial^8 f(\xi,\eta)}{\partial \xi^4 \partial \eta^4}\right]. \tag{39}$$

12. În cazul $p(x, y) = 1$, $A(x) = 1 - x^2$, $B(y) = 1 - y^2$, $n = m = 2$ și $n = m = 3$ se obțin următoarele formule de cubatură de grad de exactitate (5,5), respectiv (7,7)

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f(x, y)\,dx\,dy = \frac{1}{36}\Big\{f(-1, -1) + f(-1, 1) + f(1, -1) + f(1, 1) +$$

$$+ 5\Big[f\Big((-1, -\frac{1}{\sqrt{5}}\Big) + f\Big(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -1\Big) + f\Big(-1, \frac{1}{\sqrt{5}}\Big) + f\Big(\frac{1}{\sqrt{5}}, 1\Big) +$$

$$+ f\Big(1, -\frac{1}{\sqrt{5}}\Big) + f\Big(-\frac{1}{\sqrt{5}}, 1\Big) + f\Big(1, \frac{1}{\sqrt{5}}\Big) + f\Big(\frac{1}{\sqrt{5}}, 1\Big)\Big] + \tag{40}$$

$$+ 25\Big[f\Big(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\Big) + f\Big(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\Big) + f\Big(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\Big) + f\Big(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\Big)\Big]\Big\} -$$

$$- \frac{4}{23625}\Big[\frac{\partial^6 f(\xi, \eta_1)}{\partial \xi^6} + \frac{\partial^6 f(\xi_1, \eta)}{\partial \eta^6} + \frac{1}{23625}\,\frac{\partial^{12} f(\xi, \eta)}{\partial \xi^6\,\partial \eta^6}\Big],$$

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f(x, y)\,dx\,dy = \frac{1}{8100}\Big\{81\,[f(-1, -1) + f(-1, 1) + f(1, -1) +$$

$$+ f(1, 1)] + 576\,f[(-1, 0) + f(0, -1 + f(1, 0) + f(0, 1)] +$$

$$4096\,f(0,0) + 441\Big[f\Big(-1, -\sqrt{\frac{3}{7}}\Big) + f\Big(-\sqrt{\frac{3}{7}}, -1\Big) + f\Big(-1, \sqrt{\frac{3}{7}}\Big) +$$

$$+ f\Big(\sqrt{\frac{3}{7}}, -1\Big) + f\Big(1, -\sqrt{\frac{3}{7}}\Big) + f\Big(-\sqrt{\frac{3}{7}}, 1\Big) + f\Big(1, \sqrt{\frac{3}{7}}\Big) +$$

$$+ f\Big(\sqrt{\frac{3}{7}}, 1\Big)\Big] + 3136\Big[f\Big(0, -\sqrt{\frac{3}{7}}\Big) + f\Big(-\sqrt{\frac{3}{7}}, 0\Big) + f\Big(0, \sqrt{\frac{3}{7}}\Big) + \tag{41}$$

$$+ f\Big(\sqrt{\frac{3}{7}}, 0\Big)\Big] + 2401\Big[f\Big(-\sqrt{\frac{3}{7}}, -\sqrt{\frac{3}{7}}\Big) + f\Big(-\sqrt{\frac{3}{7}}, \sqrt{\frac{3}{7}}\Big) +$$

$$+ f\Big(\sqrt{\frac{3}{7}}, -\sqrt{\frac{3}{7}}\Big) + f\Big(\sqrt{\frac{3}{7}}, \sqrt{\frac{3}{7}}\Big)\Big]\Big\} -$$

$$- \frac{1}{1389150}\Big[\frac{\partial^8 f(\xi, \eta_1)}{\partial \xi^8} + \frac{\partial^8 f(\xi_1, \eta)}{\partial \eta^8} + \frac{1}{5556600}\,\frac{\partial^{16} f(\xi, \eta)}{\partial \xi^8\,\partial \eta^8}\Big].$$

Dacă $n=2$ iar $m=3$, se obține formula de gradul de exactitate (5,7)

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f(x, y)\,dx\,dy = \frac{1}{540}\Big\{9\Big[f(-1, -1) + f(-1, 1) + f(1, -1) +$$

$$+ f(1, 1)\Big] + 45\Big[f\Big(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -1\Big) + f\Big(\frac{1}{\sqrt{5}}, -1\Big) + f\Big(-\frac{1}{\sqrt{5}}, 1\Big) + f\Big(\frac{1}{\sqrt{5}}, 1\Big)\Big] +$$

$$+ 49\Big[f\Big(-1, -\sqrt{\frac{3}{7}}\Big) + f\Big(1, -\sqrt{\frac{3}{7}}\Big) + f\Big(-1, \sqrt{\frac{3}{7}}\Big) + f\Big(1, \sqrt{\frac{3}{7}}\Big)\Big] +$$

$$+ 64\,[f(-1, 0) + f(1, 0)] + 320\Big[f\Big(-\frac{1}{\sqrt{5}}, 0\Big) + f\Big(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0\Big)\Big] +$$

$$+ 245\Big[f\Big(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\sqrt{\frac{3}{7}}\Big) + f\Big(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\sqrt{\frac{3}{7}}\Big) + f\Big(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \sqrt{\frac{3}{7}}\Big) +$$

$$+ f\Big(\frac{1}{\sqrt{5}}, \sqrt{\frac{3}{7}}\Big)\Big]\Big\} - \Big[\frac{4}{23625}\,\frac{\partial^6 f(\xi, \eta_1)}{\partial \xi^6} + \frac{1}{1389150}\,\frac{\partial^8 f(\xi_1, \eta)}{\partial \eta^8} +$$

$$+ \frac{1}{32818668750}\,\frac{\partial^{14} f(\xi, \eta)}{\partial \xi^6 \partial \eta^8}\Big].$$

13. Să presupunem că $A(x) = x^2$, $B(y) = y^2$, $n=2p-1$, $m=2q-1$.

Dacă $p(x,y) = 1$, $a=c=-1$, $b=d=1$, iar $p=q=1$ sau $p=q=2$, avem formulele de cubatură de gradele de exactitate (3,3), respectiv (7,7)

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f(x, y)\,dx\,dy = \frac{1}{9}\Big\{36\,f(0,0) + 6\Big[f''_{x^2}(0,0) + f''_{y^2}(0,0)\Big] + f^{(4)}_{x^2y^2}(0,0)\Big\} +$$

$$+ \frac{1}{30}\Big[\frac{\partial^4 f(\xi, \eta_1)}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^4 f(\xi_1, \eta)}{\partial \eta^4} - \frac{1}{120}\,\frac{\partial^8 f(\xi, \eta)}{\partial \xi^4\,\partial \eta^4}\Big],$$

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f(x, y)\,dx\,dy = \frac{1}{140625}\Big\{207936\,f(0,0) + 67032\Big[f\Big(0, -\sqrt{\frac{5}{7}}\Big) +$$

$$+ f\Big(-\sqrt{\frac{5}{7}}, 0\Big) + f\Big(0, \sqrt{\frac{5}{7}}\Big) + f\Big(\sqrt{\frac{5}{7}}, 0\Big)\Big] + 21609\Big[f\Big(-\sqrt{\frac{5}{7}}, -\sqrt{\frac{5}{7}}\Big) +$$

$$+ f\Big(-\sqrt{\frac{5}{7}}, \sqrt{\frac{5}{7}}\Big) + f\Big(\sqrt{\frac{5}{7}}, -\sqrt{\frac{5}{7}}\Big) + f\Big(\sqrt{\frac{5}{7}}, \sqrt{\frac{5}{7}}\Big)\Big] +$$

$$+ 9120\,[f''_{x^2}(0,0) + f''_{y^2}(0,0)] + 2940\Big[f''_{x^2}\Big(0, -\sqrt{\frac{5}{7}}\Big) + f''_{x^2}\Big(0, \sqrt{\frac{5}{7}}\Big) +$$

$$+ f''_{y^2}\Big(-\sqrt{\frac{5}{7}}, 0\Big) + f''_{y^2}\Big(\sqrt{\frac{5}{7}}, 0\Big)\Big] + 400\,f^{(4)}_{x^2y^2}(0,0)\Big\} + \frac{1}{1111320}\Big[\frac{\partial^8 f(\xi, \eta_1)}{\partial \xi^8} +$$

$$+ \frac{\partial^8 f(\xi_1, \eta)}{\partial \eta^8} - \frac{1}{4445280}\,\frac{\partial^{16} f(\xi, \eta)}{\partial \xi^8\,\partial \eta^8}\Big].$$

14. În cazul $A(x) = x^4$, $B(y) = y^4$, $n = m = 3$, $a = c = -1$, $b = d = 1$, $p(x, y) = 1$, se obține formula de cubatură de gradul de exactitate (9,9) următoare

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f(x, y)\,dx\,dy = \frac{1}{1297080225}\Big\{2516025600\, f(0, 0) + 548499600\Big[f\Big(0, -\frac{\sqrt{7}}{3}\Big) +$$

$$+ f\Big(-\frac{\sqrt{7}}{3}, 0\Big) + f\Big(0, \frac{\sqrt{7}}{3}\Big) + f\Big(\frac{\sqrt{7}}{3}, 0\Big)\Big] + 119574225\Big[f\Big(-\frac{\sqrt{7}}{3}, -\frac{\sqrt{7}}{3}\Big) +$$

$$+ f\Big(-\frac{\sqrt{7}}{3}, \frac{\sqrt{7}}{3}\Big) + f\Big(\frac{\sqrt{7}}{3}, -\frac{\sqrt{7}}{3}\Big) + f\Big(\frac{\sqrt{7}}{3}, \frac{\sqrt{7}}{3}\Big)\Big] + 175560000\,[f''_{x^2}(0, 0) +$$

$$+ f''_{y^2}\, 0, 0)] + 2457840\,[f^{(4)}_{x^4}(0, 0) + f^{(4)}_{y^4}(0, 0)] + 12250000\, f^{(4)}_{x^2y^2}(0, 0) +$$

$$+ 171500\,[f^{(6)}_{x^2y^4}(0, 0) + f^{(6)}_{x^4y^2}(0, 0] + 2401\, f^{(8)}_{x^4y^4}(0, 0) +$$

$$+ 38272500\Big[f''_{x^2}\Big(0, -\frac{\sqrt{7}}{3}\Big) + f''_{x^2}\Big(0, \frac{\sqrt{7}}{3}\Big) + f''_{y^2}\Big(-\frac{\sqrt{7}}{3}, 0\Big) + f''_{y^2}\Big(\frac{\sqrt{7}}{3}, 0\Big)\Big] +$$

$$+ 535815\Big[f^{(4)}_{x^4}\Big(0, -\frac{\sqrt{7}}{3}\Big) + f^{(4)}_{x^4}\Big(0, \frac{\sqrt{7}}{3}\Big) + f^{(4)}_{y^4}\Big(-\frac{\sqrt{7}}{3}, 0\Big) + f^{(4)}_{y^4}\Big(\frac{\sqrt{7}}{3}, 0\Big)\Big]\Big\} +$$

$$+ \frac{1}{202078800}\Big[\frac{\partial^{10} f(\xi, \eta_1)}{\partial \xi^{10}} + \frac{\partial^{10} f(\xi_1, \eta)}{\partial \eta^{10}} - \frac{1}{808315200}\,\frac{\partial^{20} f(\xi, \eta)}{\partial \xi^{10}\,\partial \eta^{10}}\Big].$$

15. Presupunînd că $A(x) = x^4$, $B(y) = y^4$, $n = m = 3$, $p(x, y) = e^{-x^2-y^2}$, $a = c = -\infty$, $b = d = +\infty$, se ajunge la formula de cubatură de gradul de exactitate (9, 9) următoare

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2} f(x, y)\,dx\,dy = \frac{\pi}{271063296}\Big\{247873536\, f(0, 0) + 5667840\Big[f\Big(0, -$$

$$-\sqrt{\frac{7}{2}}\Big) + f\Big(-\sqrt{\frac{7}{2}}, 0\Big) + f\Big(0, \sqrt{\frac{7}{2}}\Big) + f\Big(\sqrt{\frac{7}{2}}, 0\Big)\Big] + 44964864\,[f''_{x^2}(0, 0) +$$

$$+ f''_{y^2}(0, 0)] + 2314368\,[f^{(4)}_{x^4}(0, 0) + f^{(4)}_{y^4}(0, 0)] + 1028160\Big[f''_{x^2}\Big(0, -\sqrt{\frac{7}{2}}\Big) +$$

$$+ f''_{x^2}\Big(0, \sqrt{\frac{7}{2}}\Big) + f''_{y^2}\Big(-\sqrt{\frac{7}{2}}, 0\Big) + f''_{y^2}\Big(\sqrt{\frac{7}{2}}, 0\Big)\Big] + 52920\Big[f^{(4)}_{x^4}\Big(0, -\sqrt{\frac{7}{2}}\Big) +$$

$$+ f^{(4)}_{x^4}\Big(0, \sqrt{\frac{7}{2}}\Big) + f^{(4)}_{y^4}\Big(-\sqrt{\frac{7}{2}}, 0\Big) + f^{(4)}_{y^4}\Big(\sqrt{\frac{7}{2}}, 0\Big)\Big] + 8156736\, f^{(4)}_{x^2y^2}(0, 0) +$$

$$+ 419832\,[f^{(6)}_{x^2y^4}(0, 0) + f^{(6)}_{x^4y^2}(0, 0)] + 21609\, f^{(8)}_{x^4y^4}(0, 0) + 129600\Big[f\Big(-\sqrt{\frac{7}{2}},$$

$$-\sqrt{\frac{7}{2}}\Big) + f\Big(-\sqrt{\frac{7}{2}}, \sqrt{\frac{7}{2}}\Big) + f\Big(\sqrt{\frac{7}{2}}, -\sqrt{\frac{7}{2}}\Big) + f\Big(\sqrt{\frac{7}{2}}, \sqrt{\frac{7}{2}}\Big)\Big]\Big\} +$$

$$+ \frac{\pi}{552960}\Big[\frac{\partial^{10} f(\xi, \eta_1)}{\partial \xi^{10}} + \frac{\partial^{10} f(\xi_1, \eta)}{\partial \eta^{10}} - \frac{1}{552960}\,\frac{\partial^{20} f(\xi, \eta)}{\partial \xi^{10}\,\partial \eta^{10}}\Big].$$

16. În cazul $p(x, y) = 1$, $A(x) = x^{`}$, $B(y) = y^4$, $n = m = 3$, se obține următoarea formulă de cubatură de gradul de exactitate (7, 9)

$$\int_{-1}^{+1}\int_{+1}^{+1} f(x, y)\,dx\,dy = \frac{1}{13505625}\Big\{22872960\, f(0, 0) + 4986360\Big[f\Big(0, -\frac{\sqrt{7}}{3}\Big) +$$

$$+ f\Big(0, \frac{\sqrt{7}}{3}\Big] + 7373520\Big[f\Big(-\frac{\sqrt{5}}{7}, 0\Big) + f\Big(\sqrt{\frac{5}{7}}, 0\Big) +$$

$$+ 1607445\Big[f\Big(-\sqrt{\frac{5}{7}}, -\frac{\sqrt{7}}{3}\Big) + f\Big(-\sqrt{\frac{5}{7}}, \frac{\sqrt{7}}{3}\Big) + f\Big(\sqrt{\frac{5}{7}}, -\frac{\sqrt{7}}{3}\Big) +$$

$$+ f\Big(\sqrt{\frac{5}{7}}, \frac{\sqrt{7}}{3}\Big)\Big] + 1003200\, f''_{x^2}(0, 0) + 1596000\, f''_{y^2}(0,0) + 218700\Big[f''_{x^2}\Big(0,$$

$$-\frac{\sqrt{7}}{3}\Big) + f''_{x^2}\Big(0, \frac{\sqrt{7}}{3}\Big)\Big] + 514500\Big[f''_{y^2}\Big(-\sqrt{\frac{5}{7}}, 0\Big) + f''_{y^2}\Big(\sqrt{\frac{5}{7}}, 0\Big)\Big] +$$

$$+ 70000\, f^{(4)}_{x^2y^2}(0,0) + 22344\, f^{(4)}_{y^4}(0, 0) + 7203\Big[f^{(4)}_{y^4}\Big(-\sqrt{\frac{5}{7}}, 0\Big) +$$

$$+ f^{(4)}_{y^4}\Big(\sqrt{\frac{5}{7}}, 0\Big)\Big] + 980\, f^{(6)}_{x^2y^4}(0,0)\Big\} + \frac{1}{1111320}\,\frac{\partial f^{8}(\xi, \eta_1)}{\partial \xi^{8}} +$$

$$\frac{1}{202078800}\,\frac{\partial^{10} f(\xi_1, \eta)}{\partial \eta^{10}} - \frac{1}{186810534187200}\,\frac{\partial^{18} f(\xi, \eta)}{\partial \xi^{8}\,\partial \eta^{10}}.$$

17. Formulele de cubatură de la aliniatele 13—16 sînt de tip Gauss, în sensul că ele folosesc un număr minim de noduri. De pildă ultima formulă, care are gradul de exactitate (7,9), are 20 de termeni, în timp ce formula corespunzătoare a lui Cotes, de același grad de exactitate, conține 80 de termeni.

Institutul de calcul al Academiei R.P.R., Filiala Cluj

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Автор распространяет на случай двух переменных метод построения кубатурных формул, изложенный им в работе [1].

В § 1 распространена на случай двух переменных интерполярная формула Лагранжа — Эрмита; получена формула (7), в которой интерполярный многочлен $L_{N,M}(x\,y)$ имеет выражение (11), а остаточный член формулы

приведен в (17); для этого остаточного члена приведена также формула (18), где значения ξ и η одинаковы во всех членах.

В § 2 применением интерполярной формулы (7) для численного определения двойного интеграла (13), получена кубатурная формула (21). Выбором в качестве значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_m$, корни ортонормированных многочленов (23) и (24) кубатурная формула (21) приводится к виду (25), при любых параметрах $\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \beta_1, \ldots, \beta_k$, где $i \leqslant n, k \leqslant m$. Для расчета коэффициентов этой формулы приведены формулы (26). Взяв $i = n$ и $k = m$ и рассматривая предельный случай (28) доказывается, что остаточный член кубатурной формулы (25) может быть выражен формулой (30).

В § 3 строятся фактически несколько кубатурных формул, исходя из общей формулы (25). Отметим, в частности, кубатурные формулы, приведенные в пунктах 13—16, обладающие максимальной степенью точности; они содержат вчетверо меньше членов, чем формулы одинаковой степени точности с случайно распределенными узлами.

UNE MÉTHODE DE CONSTRUCTION DES FORMULES DE CUBATURE POUR LES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

RÉSUMÉ

L'auteur étend au cas de deux variables une méthode de construction des formules de quadrature qu'il a exposée dans son travail [1]. Dans le § 1, la formule d'interpolation de Lagrange-Hermite est étendue à deux variables; on a obtenu la formule (7), où le polynôme d'interpolation $L_{N,M}(x, y)$ est donné en (11), tandis que le reste de la formule est donné en (17); pour ce reste la formule (18) est encore donnée où les valeurs ξ et η sont les mêmes dans tous les termes.

Dans le § 2, à l'aide de la formule d'interpolation (7) pour le calcul numérique de l'intégrale double (19), l'auteur obtient la formule de cubature (21). En prenant les racines des polynômes orthogonaux (23) et (24), pour valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $y_1, y_2, \ldots, y_m$, la formule de cubature (21) se réduit à la formule (25), quels que soient les paramètres $\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \beta_1, \ldots, \beta_k$, où $i \leqslant n, k \leqslant m$. Pour le calcul des coefficients de cette formule, les formules (26) sont données. Il est démontré que, en prenant $i = n$ et $k = m$ et en considérant le cas limite (28), le reste de la formule de cubature (25) peut être exprimé par la formule (30).

Dans le § 3, l'auteur construit effectivement plusieurs formules de cubature, en partant de la formule générale (25). Il faut surtout mentionner les formules de cubature des alinéas n^0 13 à 16, qui présentent un degré d'exactitude maximum; elles contiennent quatre fois moins de termes que les formules d'un même degré d'exactitude, mais avec des nœuds pris au hasard.

BIBLIOGRAFIE

1. D. D. Stancu, *O metodă pentru construirea de formule de cuadratură de grad înalt de exactitate*. Comunicările Acad. R.P.R., **8**,4 (1958).
2. — *Asupra formulei de interpolare a lui Hermite și a unor aplicații ale acesteia*. Studii și cercetări de matematică, Cluj **8**,3—4 (1957).
3. — *Considerații asupra interpolării polinominale a funcțiilor de mai multe variabile*. Bul. Univ. « Babeş-Bolyai » din Cluj, Seria Ştiinţele naturii, **1**,1—1 (1957).
4. — *Generalizarea unor formule de interpolare pentru funcțiile de mai multe variabile și unele considerații asupra formulei de integrare numerică a lui Gauss*. Bul. Ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţia de ştiinţe matematice și fizice, **9**,2 (1957).
5. — *Contribuții la integrarea numerică a funcțiilor de mai multe variabile*. Studii și cercetări matematica, Cluj, **8**,1—2 (1957).