OBSERVAŢII ASUPRA CONVERGENŢEI SERIILOR AI CĂROR TERMENI SÎNT DAŢI DE O RELAŢIE DE RECURENŢĂ LINIARĂ

DE

NICOLAE GHIRCOIAŞIU

În lucrarea de faţă ne propunem să arătăm cum se pot utiliza rezultatele obţinute în lucrarea noastră ,,Dezvoltarea în serie întreagă a inversei unui polinom" [3], la studiul seriilor ai căror termeni sînt daţi de o relaţie de recurenţă liniară. În acest scop vom reaminti întîi cîteva dintre teoremele de care vom avea nevoie.

T e o r e m a I. *O condiţie necesară pentru ca o serie de puteri să aibă coeficienţii nenegativi, este ca unul dintre punctele ei singulare cu cel mai mic modul să fie pozitiv* (numită pe scurt *Condiţia N*).

T e o r e m a II. *În dezvoltarea în serie întreagă*

$$\frac{1}{(1-a_1x)(1-a_2x)\ldots(1-a_nx)} = 1+nq_1x+\ldots+\binom{n+r-1}{r}q_rx^r+\ldots,\ (n>1)$$

unde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *sînt reali, avem neegalităţile* $q_{2r+1}^2 < q_{2r}\, q_{2r+2}$ ($r = 0, 1, 2, \ldots$ şi $q_0 = 1$), *de unde rezultă că toţi coeficienţii* q *de rang par sînt pozitivi.*

T e o r e m a III. *Fiind dat un polinom* $P(x)$ *cu toate rădăcinile reale şi cu rădăcina cea mai mică în modul pozitivă* (Condiţia N), *dezvoltarea în serie întreagă*

$$\frac{1}{P(x)} = \frac{1}{(1-a_1x)(1-a_2x)\ldots(1-a_nx)} = 1+p_1x+p_2x^2+\ldots+p_nx^n+\ldots \quad (1)$$

are toţi coeficienţii p *din membrul al doilea pozitivi, începînd de la un rang* k *suficient de mare.*

T e o r e m a IV. *Dacă polinomul* $P(x)$ *cu coeficienţii reali şi toate rădăcinile reale, este de gradul* 2, 3 *sau* 4 *şi condiţia* N *este îndeplinită, condiţia necesară şi suficientă ca seria* (1) *să aibă toţi coeficienţii nenegativi este* $p_1 \geqq 0$ (adică $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqq 0$).

Alte rezultate vor fi citate în cursul lucrării.

Fie relaţia de recurenţă liniară şi cu coeficienţi constanţi

$$u_n + \alpha_1 u_{n-1} + \alpha_2 u_{n-2} + \ldots + \alpha_q u_{n-q} = 0, \qquad \alpha_q \neq 0. \tag{2}$$

Ea determină şirul de numere $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$, sau seria

$$\Sigma u_n \tag{3}$$

dacă se cunosc primele q numere $u_0, u_1, \ldots, u_{q-1}$, de aceea relaţia de recurenţă se zice că este de ordinul q. A rezolva sau integra această relaţie înseamnă a găsi expresia lui u_n în funcţie de cele q valori iniţiale.

Pentru integrarea relaţiei de recurenţă (2) se consideră *ecuaţia caracteristică*

$$r^q + \alpha_1 r^{q-1} + \ldots + \alpha_{q-1} r + \alpha_q = 0 \tag{4}$$

cu rădăcinile $r_1, r_2, \ldots, r_q$. Dacă acestea sînt distincte avem

$$u_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n + \ldots + C_q r_q^n \tag{5}$$

iar dacă $r_1 = r_2 = \ldots = r_m$, primii m termeni de mai sus trebuie înlocuiţi cu

$$C_1 r_1 + C_2 n r_1^{n-1} + C_3 n(n-1) r_1^{n-2} + \ldots + C_m n(n-1) \ldots (n-m+2) r^{n-m+1}$$

unde $C_1, C_2, \ldots, C_q$ sînt constante arbitrare, ele determinîndu-se cu ajutorul valorilor iniţiale. Aceste constante arbitrare nu pot să fie nule deoarece atunci ordinul relaţiei de recurenţă nu ar mai fi q.

Funcţia analitică $f(z)$, definită prin elementul său în origine

$$f(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots + u_n z^n + \ldots,$$

poartă numele de *funcţie generatoare* (Laplace) a relaţiei de recurenţă şi natura recurenţei este strîns legată de distribuţia punctelor singulare ale funcţiei $f(z)$ ([4], p. 13).

Astfel, în cazul relaţiei de recurenţă (2) funcţia generatoare este o funcţie raţională (presupusă ireductibilă pentru ca ordinul relaţiei (2) să fie q), deci avem

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{1+\beta_1 x+\beta_2 x^2+\ldots+\beta_{q-1}x^{q-1}}{1+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\ldots+\alpha_q x^q} = 1+u_1 x+u_2 x^2+\ldots+u_n x^n+\ldots \tag{6}$$

ceea ce se vede uşor, căci coeficienţii u_n se calculează din relaţiile

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= u_1 + \alpha_1 \\
\beta_2 &= u_2 + \alpha_1 u_1 + \alpha_2 \\
&\ldots \\
\beta_{q-1} &= u_{q-1} + \alpha_1 u_{q-2} + \alpha_2 u_{q-3} + \ldots + \alpha_{q-1} \\
0 &= u_q + \alpha_1 u_{q-1} + \alpha_2 u_{q-2} + \ldots + \alpha_{q-1} u_1 + \alpha_q \\
&\ldots \\
0 &= u_n + \alpha_1 u_{n-1} + \alpha_2 u_{n-2} + \ldots + \alpha_{q-1} u_{n-q+1} + \alpha_q u_{n-q}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Rezultă imediat că funcţia generatoare a unei relaţii de recurenţă liniare, are ca puncte singulare numai poli şi aceştia sînt zerourile lui $P(x)$.

Presupunînd cunoscuţi coeficienţii α_i şi β_i, numerele u_n rezultă din aproape în aproape. Reciproc, alegînd arbitrar pe $u_0, u_1, \ldots, u_{q-1}$ din primele relaţii (7), rezultă coeficienţii β, deci se determină polinomul $Q(x)$. Aşa cum o să vedem, natura seriei depinde numai de zerourile polinomului $P(x)$, de aceea în cele ce urmează — printr-o alegere convenabilă a condiţiilor iniţiale — vom lua $Q(x) \equiv 1$, deci vom considera seria

$$\frac{1}{P(x)} = \frac{1}{1+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\ldots+\alpha_q x^q} = 1+u_1 x+u_2 x^2+\ldots+u_n x^n+\ldots \tag{8}$$

Dacă γ este una din rădăcinile cu cel mai mic modul al lui $P(x)$, atunci raza de convergenţă a seriei de mai sus este $|\gamma|$ şi aceeaşi rază o are şi seria (6), indiferent de alegerea particulară a polinomului $Q(x)$. Pe de altă parte, cum ecuaţia caracteristică are ca rădăcini inversele rădăcinilor lui $P(x)$, raza de convergenţă a seriei (8) este determinată de rădăcina ecuaţiei caracteristice cu cel mai mare modul şi avem

TEOREMA 1. *Seria* (3) *este convergentă dacă* $|\gamma| > 1$ *şi divergentă dacă* $|\gamma| \leqq 1$, *unde* γ *este cea mai mică rădăcină în modul a polinomului* $P(x)$, *sau* $\frac{1}{\gamma}$ *cea mai mare rădăcină în modul a ecuaţiei caracteristice* (4). *În caz de convergenţă, suma seriei este* $\frac{1}{P(1)}$.

În adevăr, raza de convergenţă a seriei (8) fiind $|\gamma|$, dacă $|\gamma| > 1$ atunci $x = 1$ se găseşte în domeniul de convergenţă, deci seria numerică (3) va fi convergentă, suma ei fiind $\frac{1}{P(1)}$. Dacă $|\gamma| < 1$, $x = 1$ se găseşte în afara domeniului de convergenţă al seriei (8), deci seria (3) este divergentă. Dacă $|\gamma| = 1$ rezultă că şi ecuaţia (4) are o rădăcină egală în modul cu unitatea, ori atunci u_n nu tinde către zero cînd $n \to \infty$, după cum se vede imediat din (5).

Dacă $|\gamma| > 1$, rezultă că cea mai mare în modul dintre rădăcinile ecuaţiei caracteristice $\left(\frac{1}{\gamma}\right)$ este subunitară, deci teorema de mai sus se poate enunţa şi în forma:

TEOREMA 1'. *Seria* (3) *este convergentă dacă şi numai dacă toate rădăcinile ecuaţiei caracteristice sînt în modul mai mici decît unitatea.*

Observare. Seria (3), definită prin relaţia de recurenţă (2), are în general termeni oarecari. Mai jos ne vom ocupa de cazurile în care seria are termeni pozitivi. Vom continua să presupunem că funcţia generatoare este $\frac{1}{P(x)}$.

TEOREMA 2. *O condiţie necesară ca seria* (3) *să aibă termenii pozitivi, este ca* γ *să fie pozitiv* (teorema I, condiţia N).

Nu ştim în general să spunem care este condiţia suficientă pentru ca termenii u_n să fie pozitivi. Aceasta depinde de natura rădăcinilor polinomului $P(x)$. Să ne ocupăm întîi de cazul cînd rădăcinile lui $P(x)$ sînt reale. Avem următoarele teoreme :

TEOREMA 3. *Seria* (3) *are toţi coeficienţii pozitivi, începînd cu un rang k suficient de mare, dacă ecuaţia caracteristică* (4) *are toate rădăcinile reale şi condiţia N este îndeplinită, deci $\Upsilon > 0$ (pentru convergenţă $\Upsilon > 1$).*

Teorema este o consecinţă imediată a teoremei III şi spune că numai un număr finit k de termeni din seria (3) pot fi negativi şi dintre aceştia numai cei de rang impar (teorema II). Pozitivitatea tuturor termenilor seriei este asigurată prin urmarea de cel mult k condiţii. Mai jos se tratează cîteva cazuri în care $k = 1$, deci în care e nevoie de încă o condiţie suplimentară peste condiţia N.

TEOREMA 4. *Pentru orice relaţie de recurenţă liniară cu coeficienţi constanţi de ordinul* 1, 2, 3 *sau* 4, *seria* (3) *este convergentă şi are toţi termenii pozitivi, dacă rădăcinile ecuaţiei caracteristice sînt reale, $\Upsilon > 1$ şi ultimii doi coeficienţi din relaţia de recurenţă sînt de semne contrarii, sau penultimul este nul.*

În adevăr, teorema 4 cere ca $u_1 \geqslant 0$, dar notînd cu Υ_i rădăcinile lui $P(x)$, condiţia devine

$$u_1 = \sum_{i=1}^{q} \Upsilon_i = -\frac{\alpha_{q-1}}{\alpha_q}, \qquad q = 2, 3, 4$$

deci a_q şi a_{q-1} trebuie să fie de semne contrarii, sau $a_{q-1} = 0$.

Pentru cazul relaţiilor de recurenţă liniare de ordinul întîi $u - ku_{n-1} = 0$, avem ecuaţia caracteristică $r - k = 0$, k real. Seria corespunzătoare are termenii pozitivi cînd $k > 0$ şi este convergentă cînd $k < 1$ şi divergentă dacă $k \geqslant 1$. În adevăr, seria corespunzătoare este

$$1 + kx + k^2x^2 + \ldots + k^nx^n + \ldots$$

Dacă $0 < k < 1$, seria are termenii pozitivi şi este convergentă. Cum raza ei de convergenţă este $\frac{1}{k} > 1$, $x = 1$ se află în domeniul de convergenţă, deci seria (3) este convergentă şi are suma $\frac{1}{1-k}$. După cum se vede, condiţia impusă în relaţia de recurenţă ne dă tocmai criteriul lui d'Alembert.

TEOREMA 5. *Dacă ecuaţia caracteristică* (4), *cu toate rădăcinile reale, are o singură rădăcină negativă, teorema* 1 *asigură şi pozitivitatea termenilor seriei* (8).

Rezultă din [3, pag. 57], teorema 5_1.

TEOREMA 6. *Termenii seriei* (8) *sînt pozitivi dacă ecuaţia caracteristică* (4), *cu toate rădăcinile reale, are o singură rădăcină pozitivă şi ultimii doi coeficienţi din relaţia de recurenţă sînt de semne contrarii sau penultimul este nul.*

Rezultă din [3, pag. 57], teorema 5_2.

TEOREMA 7. *Dacă relaţia de recurenţă are forma*

$$u_n - k_1u_{n-1} - k_2u_{n-2} - \ldots - k_qu_{n-q} = 0, \tag{9}$$

unde k_i sînt numere pozitive, seria (3) *converge dacă singura rădăcină pozitivă a ecuaţiei caracteristice*

$$r^q - k_1r^{q-1} - k_2r^{q-2} - \ldots - k_q = 0 \tag{10}$$

este mai mică decît unitatea, deci dacă avem

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_q < 1. \tag{11}$$

În caz contrar seria diverge.

Avem în acest caz

$$P(x) = 1 - k_1x - k_2x^2 - \ldots - k_qx^q,$$

deci seria (8) va avea coeficienţii pozitivi dacă este îndeplinită condiţia N, deci singura rădăcină pozitivă este cea mai mică în modul dintre toate rădăcinile lui $P(x)$ (reale sau complexe) [1]. Pentru ca seria (3) să conveargă, trebuie ca această rădăcină să fie mai mare decît unitatea (teorema 1), deci rădăcina pozitivă a ecuaţiei (10) să fie subunitară. Dacă este aşa, atunci primul membru din (10), pentru $r = 1$, este pozitiv şi se obţine neegalitatea (11).

Teorema de mai sus a fost demonstrată pe altă cale de către Desaint [2].

În toate teoremele precedente, în afară de ultima, rădăcinile ecuaţiei caracteristice au fost presupuse reale. În general cînd ecuaţia caracteristică are rădăcini complexe, lucrurile se complică. Ţinînd seama de rezultatele din [3] se pot găsi regiuni din plan în care să poată fi situate rădăcinile complexe ale ecuaţiei caracteristice, cînd aceasta are gradele 3 sau 4 şi rădăcina cu cel mai mare modul este pozitivă şi subunitară. În acest caz seria (3) are termenii pozitivi şi este convergentă.

Institutul politehnic — Cluj,
Catedra de matematică

BIBLIOGRAFIE

1. Angheluţă Th., *Curs de teoria funcţiilor de variabilă complexă*, Ed. tehnică, 1957, p. 15.
2. Desaint M., *Sur la convergence des séries données par une relation de récurrence et le théoreme de d'Alembert.* Bull. de la Soc. Math. de France, 1929, t. LVII, p. 216–221.
3. Ghircoiaşiu N., *Asupra dezvoltării în serie întreagă a inversei unui polinom.* Studii şi cercetări ştiinţifice (Cluj), Seria I-a, 1955, nr. 1–2, p. 51–74.
4. Montel P., *Leçons sur les Recurrences et leurs applications.* Gauth. — Villars, Paris, 1957, p. 32.

ЗАМЕЧАНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО СХОДИМОСТИ РЯДОВ, ЧЛЕНЫ КОТОРЫХ СВЯЗАН ЛИНЕЙНЫМ РЕККУРЕНТНЫМ СООТНОШЕНИЕМ

(Краткое содержание)

Были использованы результаты одного прежнего исследования и получились теоремы в связи со сходимостью рядов с членами связанными линейным реккурентным соотношением. Между прочим нашёлся результат найденный Десаном [3].

REMARQUES SUR LA CONVERGENCE DES SÉRIES DONT LES TERMES SONT DONNÉS PAR UNE RELATION LINÉAIRE DE RÉCURRENCE

(Résumé)

En utilisant les résultats d'un travail antérieur [4], on obtient des théorèmes sur la convergence des séries données par une relation linéaire de récurrence. Parmi ces propriétés, on retrouve les résultats d'un mémoire de Dessaint [3].