FORMA CANONICĂ A UNUI DETERMINANT ŞI APLICAŢIILE EI

DE

D. V. IONESCU

Se ştie că o matrice oarecare cu elemente dintr-un corp dat, se poate aduce la o formă canonică prin transformări elementare repetate în mod convenabil. Transformările elementare sînt următoarele :

T_1 : se schimbă o linie cu altă linie ;

T_2 : se înmulţesc elementele unei linii cu un factor şi se adună la elementele unei alte linii.

Schimbînd în definiţiile precedente cuvîntul „linie" cu cuvîntul „coloană", se obţin transformările T_1', T_2'.

În particular, dacă matricea este patrată

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

forma ei canonică este

$$A^* = \begin{Vmatrix} a_1 & & & & & & 0 \\ & a_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & a_j & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 0 \end{Vmatrix}$$

cu toate elementele, în afară de diagonală, egale cu zero.

Vom numi forma canonică a determinantului $D = |A|$, *determinantul* $D^* = |A^*|$.

În general avem $D = D^*$ sau $D = -D^*$, de unde rezultă :

1°. Dacă $D \neq 0$, atunci forma canonică a lui D este

$$D^*=\begin{vmatrix} a_1 & & & 0\\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n\end{vmatrix}$$

cu toate elementele diagonalei diferite de zero, şi reciproc.

2°. Dacă $D = 0$, atunci forma canonică a lui D este

$$D^*=\left\|\begin{matrix} a_1 & & & & & & \\ & a_2 & & & 0 & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & a_j & & & \\ & & & & 0 & & \\ 0 & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{matrix}\right\|$$

cu cel puţin un element al diagonalei egal cu zero, şi reciproc.

În această lucrare vom face aplicaţii ale formei canonice a unui determinant. Deşi am făcut mai multe, ne vom mărgini numai la două şi anume :

1°. demonstrarea formulei bine cunoscute care leagă determinantul reciproc de un ordin dat al determinantului D, de determinantul D ;

2°. demonstrarea identităţii bine cunoscute a lui Sylvester.

Demonstraţiile ce le vom face se vor baza pe următoarea idee :

Să presupunem că avem de calculat un determinant Δ care corespunde la un determinant D oarecare. *Dacă se poate pune în evidenţă un invariant* $f(D, \Delta)$ *pentru orice transformare elementară* T_1, T_2, T_1', T_2', *atunci vom avea*

$$f(D, \Delta) = f(D^*, \Delta^*)$$

unde Δ^* *este determinantul care corespunde la forma canonică* D^* *a determinantului* D. *Dacă determinantul* Δ^* *se calculează direct şi uşor din* D^*, *atunci formula precedentă ne va da pe* Δ.

§ 1. Determinantul reciproc de ordinul j al unui determinant

Fie

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1}$$

un determinant oarecare şi să considerăm minorii lui de ordinul j.

$$a\begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_j \\ k_1, k_2, \dots, k_j \end{pmatrix} \tag{2}$$

formaţi cu elementele determinantului D, comune liniilor de rang $i_1, i_2, \dots, i_j$ şi coloanelor de rang $k_1, k_2, \dots, k_j$. Grupările $(i_1, i_2, \dots, i_j)$, $(k_1, k_2, \dots, k_j)$ se fac cu j indici dintre indicii $1, 2, \dots, n$. Numărul tuturor

minorilor de forma (2) este $\binom{n}{j}^2$. Vom aranja aceşti minori într-un determinant Δ_j cu $\binom{n}{j}$ linii şi $\binom{n}{j}$ coloane în modul următor. Aranjăm toate grupările de j indici $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j)$ luaţi dintre indicii $1, 2, \dots, n$ într-un şir S, astfel ca $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j)$, $(\alpha_1', \alpha_2', \dots, \alpha_j')$ fiind doi termeni consecutivi ai şirului, să avem $\alpha_h \leqq \alpha_h'$ pentru $h = 1, 2, \dots, j$.

Vom forma determinantul Δ_j, făcînd ca grupările $(i_1, i_2, \dots, i_j)$ şi $(k_1, k_2, \dots, k_j)$ să parcurgă toţi termenii şirului S.

Se notează

$$\Delta_j = \left| a\begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_j \\ k_1, k_2, \dots, k_j \end{pmatrix}\right| \tag{3}$$

determinantul reciproc de ordinul j, al lui D. Aceşti determinanţi au fost consideraţi pentru prima dată de Cauchy. S-a demonstrat că

$$\Delta_j = D^{\binom{n-1}{j-1}} \tag{4}$$

Vom da demonstraţia acestei formule utilizînd forma canonică a determinantului D.

Purtîndu-ne atenţia asupra primelor două linii ale determinantului D, vom scrie determinantul Δ_j sub forma

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a\begin{pmatrix} 1, 2, i_3, \dots, i_j \\ k_1, k_2, k_3, \dots, k_j \end{pmatrix} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a\begin{pmatrix} 1, i_2, i_3, \dots, i_j \\ k_1, k_2, k_3, \dots, k_j \end{pmatrix} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a\begin{pmatrix} 2, i_2, i_3, \dots, i_j \\ k_1, k_2, k_3, \dots, k_j \end{pmatrix} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a\begin{pmatrix} i_1, i_2, i_3, \dots, i_j \\ k_1, k_2, k_3, \dots, k_j \end{pmatrix} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{vmatrix}$$

în care s-au pus în evidenţă elementele coloanei $(k_1, k_2, \dots, k_j)$.

În primele linii ale determinantului Δ_j s-au pus în evidenţă liniile cu minorii de ordinul j ai determinantului D care conţin primele două linii ; $(i_3, i_4, \dots, i_j)$ fiind o grupare oarecare cu $j - 2$ indici luaţi dintre indicii $3, 4, \dots, n$, numărul acestor linii este $\binom{n-2}{j-2}$.

În liniile următoare s-au pus în evidenţă minorii din determinantul D, cu j linii dintre care prima este linia 1-a şi apoi linia a 2-a din determinantul D ; $(i_2, \dots, i_j)$ este o grupare cu $j-1$ indici luaţi dintre indicii (3, 4, ..., n), numărul acestor linii este $\binom{n-2}{j-1}$. În fine, în liniile următoare $(i_1, i_2 \dots, i_j)$ este o grupare cu j indici luați dintre indicii 3, 4, ..., n. Numărul acestor linii este $\binom{n-2}{j}$. Se verifică ușor că numărul tuturor liniilor este

$$\binom{n-2}{j-2}+\binom{n-2}{j-1}+\binom{n-2}{j-1}+\binom{n-2}{j}=\binom{n}{j}.$$

Dacă în determinantul D se schimbă linia întîia cu a doua, se obține determinantul

$$\overline{D} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = -D$$

și determinantul reciproc de ordinul j corespunzător lui $\overline{D}$ este

$$\overline{\Delta}_j = \begin{vmatrix} \dots\dots\dots\dots\dots \\ a\begin{pmatrix} 2, & 1, & i_3, & \dots, & i_j \\ k_1, & k_2, & k_3, & \dots, & k_j \end{pmatrix} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a\begin{pmatrix} 2, & i_2, & i_3, & \dots, & i_j \\ k_1, & k_2, & k_3, & \dots, & k_j \end{pmatrix} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a\begin{pmatrix} 1, & i_2, & i_3, & \dots, & i_j \\ k_1, & k_2, & k_3, & \dots, & k_j \end{pmatrix} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a\begin{pmatrix} i_1, & i_2, & i_3, & \dots, & i_j \\ k_1, & k_2, & k_3, & \dots, & k_j \end{pmatrix} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{vmatrix}$$

Ținînd seama că

$$a\begin{pmatrix} 2, & 1, & i_3, & \dots, & i_j \\ k_1, & k_2, & k_3, & \dots, & k_j \end{pmatrix} = -a\begin{pmatrix} 1, & 2, & i_3, & \dots, & i_j \\ k_1, & k_2, & k_3, & \dots, & k_j \end{pmatrix}$$

și permutînd linia marcată prin $a\begin{pmatrix} 1, & i_2, & \dots, & i_j \\ k_1, & k_2, & \dots, & k_j \end{pmatrix}$ cu linia marcată prin $a\begin{pmatrix} 2, & i_2, & \dots, & i_j \\ k_1, & k_2, & \dots, & k_j \end{pmatrix}$, $\overline{\Delta}_j$ schimbînd semnul la fiecare permutare, deducem că

$$\overline{\Delta}_j = (-1)^{\binom{n-1}{j-1}}\Delta_j$$

deoarece $\overline{\Delta}_j$ schimbă semnul de $\binom{n-2}{j-1}$ ori, se poate scoate -1 factor pe primele $n-2$ linii și

$$\binom{n-2}{j-2}+\binom{n-2}{j-1}=\binom{n-1}{j-1}.$$

Se arată în mod analog că *dacă în determinantul D se schimbă două linii oarecare sau două coloane oarecare, avem formulele*

$$\overline{D} = -D, \qquad \overline{\Delta}_j = (-1)^{\binom{n-1}{j-1}}\Delta_j \tag{5}$$

unde s-a notat cu $\overline{D}$ ce devine D prin schimbarea făcută și apoi prin $\overline{\Delta}$, determinantul reciproc de ordinul j al lui $\overline{D}$.

În determinantul D, să adunăm la elementele liniei 1-a, elementele liniei a 2-a înmulțite cu λ, adică să considerăm determinantul

$$\overline{\overline{D}} = \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{21} & a_{12}+\lambda a_{22} & \dots & a_{1n}+\lambda a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Determinantul reciproc de ordinul j al lui $\overline{\overline{D}}$ este

$$\overline{\overline{\Delta}}_j = \begin{vmatrix} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a\begin{pmatrix} 1, & 2, & i_3, & \dots, & i_j \\ k_1, & k_2, & k_3, & \dots, & k_j \end{pmatrix} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a\begin{pmatrix} 1, & i_2, & \dots, & i_j \\ k_1, & k_2, & \dots, & k_j \end{pmatrix} + \lambda a\begin{pmatrix} 2, & i_2, & \dots, & i_j \\ k_1, & k_2, & \dots, & k_j \end{pmatrix} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a\begin{pmatrix} 2, & i_2, & \dots, & i_j \\ k_1, & k_2, & \dots, & k_j \end{pmatrix} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a\begin{pmatrix} i_1, & i_2, & \dots, & i_j \\ k_1, & k_2, & \dots, & k_j \end{pmatrix} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{vmatrix} = \Delta_j$$

Cînd la elementele unei linii oarecare a lui D, se adună elementele altei linii înmulțite cu un număr oarecare, sau la elementele unei coloane oarecare se adună elementele unei alte coloane înmulțite cu un număr oarecare, avem formulele

$$\overline{\overline{D}} = D, \qquad \overline{\overline{\Delta}}_j = \Delta_j \tag{6}$$

unde s-a notat cu $\overline{\overline{D}}$ ce devine D prin transformarea făcută și apoi prin $\overline{\overline{\Delta}}$, determinantul reciproc de ordinul j al lui $\overline{\overline{D}}$.

Fie D^* determinantul canonic al lui D și Δ_j^* determinantul reciproc de ordinul j al lui D^*.

Deoarece determinantul D^* se obține din D prin transformările T_1, T_2, T_1', T_2' convenabil repetate și avem formulele (4), (5), determinantul Δ_j^* va fi egal cu Δ_j sau va diferi de Δ_j prin semn.

Dacă $D = 0$, în forma canonică D^* va exista cel puţin un zero pe diagonala principală, iar Δ_j^* va avea de asemenea cel puţin un element zero pe diagonala principală, adică vom avea $\Delta_j^* = 0$. Se deduce prin urmare că *dacă $D = 0$, atunci vom avea şi $\Delta_j = 0$.*

Dacă $D \neq 0$, forma lui canonică este

$$D^* = \begin{vmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \ldots a_n .$$

Determinantul Δ_j^*, corespunzător lui D^*, este

$$\Delta_j^* = \begin{vmatrix} a_1a_2\ldots a_j & & & 0 \\ & a_1a_3\ldots a_{j+1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{n-j+1}a_{n-j+2}\ldots a_n \end{vmatrix} = (a_1a_2\ldots a_n)^{\binom{n-1}{j-1}} = (D^*)^{\binom{n-1}{j-1}} \tag{7}$$

Formulele (5) şi (6) arată că

$$\frac{\bar{\Delta}_j}{(\bar{D})^{\binom{n-1}{j-1}}} = \frac{\Delta_j}{D^{\binom{n-1}{j-1}}} \quad ; \quad \frac{\bar{\bar{\Delta}}_j}{(\bar{\bar{D}})^{\binom{n-1}{j-1}}} = \frac{\Delta_j}{D^{\binom{n-1}{j-1}}}$$

şi prin urmare *cîtul* $\dfrac{\Delta_j}{D^{\binom{n-1}{j-1}}}$ *este invariant pentru transformările* T_1, T_2, T_1', T_2'. Deci vom avea

$$\frac{\Delta_j}{D^{\binom{n-1}{j-1}}} = \frac{\Delta_j^*}{(D^*)^{\binom{n-1}{j-1}}}. \tag{8}$$

Însă formula (7) arată că membrul al doilea al formulei (8) este 1, de unde rezultă formula (4), care este valabilă şi pentru $D = 0$, după cum s-a arătat mai sus.

§ 2. Identitatea lui Sylvester

Să considerăm determinanţii

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2m} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mm} \end{vmatrix} \tag{9}$$

şi elementele

$$c_{ik} = \left|\begin{array}{c|c} & q_{1k} \\ D & \vdots \\ & q_{nk} \\ \hline p_{i1} \; \ldots \; p_{in} & b_{ik} \end{array}\right| \tag{10}$$

unde i, $k = 1, 2, \ldots, m$. Vrem să calculăm determinantul

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2m} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ c_{m1} & c_{m2} & \ldots & c_{mm} \end{vmatrix} \tag{11}$$

şi să demonstrăm identitatea lui Sylvester.

$$C = D^{m-1} \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & q_{11} & \ldots & q_{1m} \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & q_{n1} & \ldots & q_{nm} \\ p_{11} & \ldots & p_{1n} & b_{11} & \ldots & b_{1m} \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ p_{m1} & \ldots & p_{mn} & b_{m1} & \ldots & b_{mm} \end{vmatrix} \tag{12}$$

Vom da o demonstraţie bazată pe reducerea unui determinant la forma lui canonică.

Fie $\bar{D}$ determinantul obţinut din D schimbînd două linii între ele, şi $\bar{C}$ determinantul format cu elementele $\bar{c}_{ik}$ obţinute făcînd în determinantul c_{ik} aceleaşi schimbări de linii ca şi în determinantul D. Avem

$$\bar{D} = -D, \quad \bar{c}_{ik} = -c_{ik}, \quad \bar{C} = (-1)^m C \tag{13}$$

şi aceste formule sînt valabile şi dacă în determinantul D se schimbă două coloane între ele.

Fie $\bar{\bar{D}}$ determinantul obţinut din D, adăugînd la elementele unei linii elementele altei linii înmulţite cu factorul λ. Notăm cu $\bar{\bar{C}}$ determinantul format cu elementele $\bar{\bar{c}}_{ik}$ obţinute făcînd în determinantul c_{ik} aceeaşi transformare ca şi în determinantul D. Vom avea

$$\bar{\bar{D}} = D, \quad \bar{\bar{c}}_{ik} = c_{ik}, \quad \bar{\bar{C}} = C \tag{14}$$

aceste formule fiind valabile şi dacă în determinantul D se adună la elementele unei coloane, elementele altei coloane înmulţite cu un factor μ.

Fie D^* forma canonică a determinantului D, adică

$$D^* = \begin{vmatrix} a_1 & & & & & & \\ & a_2 & & & & 0 & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & a_j & & & \\ & & & & 0 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{vmatrix}$$

şi

$$c^*_{ik} = \begin{vmatrix} & & & q^*_{1k} \\ & D^* & & \vdots \\ & & & q^*_{nk} \\ p^*_{i1} & \ldots & p^*_{in} & b_{ik} \end{vmatrix}$$

unde p^*_{ij} şi q^*_{ik} sînt elementele deduse din elementele $p_{i1}, \ldots, p_{in}$ şi $q_{1k}, \ldots, q_{nk}$ prin transformările care aduc pe D la forma lui canonică D^*. Avem

$$C^* = \begin{vmatrix} c^*_{11} & \ldots & c^*_{1m} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ c^*_{m1} & \ldots & c^*_{mm} \end{vmatrix}$$

Dacă $j \leqq n-2$, atunci se vede imediat — dezvoltînd determinantul c^*_{ik} după elementele penultimei coloane — că $c^*_{ik} = 0$, şi prin urmare $C^* = 0$.

Dacă însă $j = n-1$, dar $m > 1$, atunci dezvoltînd determinantul c^*_{ik} după elementele penultimei coloane, obţinem

$$c^*_{ik} = -a_1 a_2 \ldots a_{n-1} p^*_{in} q^*_{nk}$$

şi deci

$$C^* = (-a_1 a_2 \ldots a_{n-1})^m \begin{vmatrix} p^*_{1n} q^*_{n1} & p^*_{1n} q^*_{n2} & \ldots & p^*_{1n} q^*_{nm} \\ p^*_{2n} q^*_{n1} & p^*_{2n} q^*_{n2} & \ldots & p^*_{n2} q^*_{nm} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ p^*_{mn} q^*_{n1} & p^*_{mn} q^*_{n2} & \ldots & p^*_{mn} q^*_{nm} \end{vmatrix} = 0.$$

Deci am demonstrat că dacă $D = 0$, avem de asemenea $C^* = 0$, cu condiţia ca în cazul cînd $j = n-1$ să avem $m > 1$. Din formulele (13) şi (14) se deduce că determinantul C^* este egal cu C sau diferă de C prin semn. Rezultă că *dacă avem* $D = 0$, *avem de asemenea* $C = 0$ (cazul cînd $j = n-1$ iar $m = 1$, se rezervă pentru mai tîrziu).

Să presupunem $D \neq 0$, şi fie D^* forma lui canonică

$$D^* = \begin{vmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{vmatrix};$$

elementele c^*_{ik} corespunzătoare sînt

$$c^*_{ik} = \begin{vmatrix} a_1 & & & 0 & q^*_{1k} \\ & a_2 & & & q^*_{2k} \\ & & \ddots & & \cdot \\ 0 & & & a_n & q^*_{nk} \\ p^*_{i1} & p^*_{i2} & \ldots & p^*_{in} & b^*_{ik} \end{vmatrix}$$

Dezvoltînd acest determinant după elementele ultimei lui coloane, şi punînd pe $a_1 a_2 \ldots a_n = D^*$ în factor, avem

$$c^*_{ik} = D^* \left(b_{ik} - \frac{p^*_{i1} q^*_{1k}}{a_1} - \frac{p^*_{i2} q^*_{2k}}{a_2} - \ldots - \frac{p^*_{in} q^*_{nk}}{a_n} \right) = D^* b'_{ik}.$$

Determinantul C^* se poate scrie sub forma

$$C^* = (D^*)^m \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \frac{q^*_{11}}{a_1} & \frac{q^*_{12}}{a_1} & \ldots & \frac{q^*_{1m}}{a_1} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \frac{q^*_{21}}{a_2} & \frac{q^*_{22}}{a_2} & \ldots & \frac{q^*_{2m}}{a_2} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \frac{q^*_{n1}}{a_n} & \frac{q^*_{n2}}{a_n} & \ldots & \frac{q^*_{nm}}{a_n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & b'_{11} & b'_{12} & \ldots & b'_{1m} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & b'_{21} & b'_{22} & \ldots & b'_{2m} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & b'_{m1} & b'_{m2} & \ldots & b'_{mm} \end{vmatrix}$$

Înmulţind elementele liniilor 1-a, a 2-a, ..., a n-a cu $p^*_{11}, p^*_{12}, \ldots, p^*_{1n}$ şi adunînd la elementele liniei a $(n+1)$-a, acestea devin

$$p^*_{11}, p^*_{12}, \ldots, p^*_{1n}, b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1m}.$$

Făcînd operații analoage pentru liniile de rang $n+2$, $n+3, \ldots, n+m$ obținem

$$C^* = (D^*)^m \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \frac{q^*_{11}}{a_1} & \frac{q^*_{12}}{a_1} & \ldots & \frac{q^*_{1m}}{a_1} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \frac{q^*_{21}}{a_2} & \frac{q^*_{22}}{a_2} & \ldots & \frac{q^*_{2m}}{a_2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \frac{q^*_{n1}}{a_n} & \frac{q^*_{n2}}{a_n} & \ldots & \frac{q^*_{nm}}{a_n} \\ p^*_{11} & p^*_{12} & \ldots & p^*_{1n} & b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1m} \\ p^*_{21} & p^*_{22} & \ldots & p^*_{2n} & b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ p^*_{m1} & p^*_{m2} & \ldots & p^*_{mn} & b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

sau

$$C^* = (D^*)^{m-1} \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 & q^*_{11} & q^*_{12} & \ldots & q^*_{1m} \\ 0 & a_2 & \ldots & 0 & q^*_{21} & q^*_{22} & \ldots & q^*_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & a & q^*_{n1} & q^*_{n2} & \ldots & q^*_{nm} \\ p^*_{11} & p^*_{12} & \ldots & p^*_{1n} & b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1m} \\ p^*_{21} & p^*_{22} & \ldots & p^*_{2n} & b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ p^*_{m1} & p^*_{m2} & \ldots & p^*_{mn} & b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mm} \end{vmatrix} \tag{15}$$

Din formulele (13) și (14) se deduce că

$$\frac{\overline{C}}{(\overline{D})^m} = \frac{C}{D^m} \quad \text{și} \quad \frac{\overline{\overline{C}}}{(\overline{\overline{D}})^m} = \frac{C}{D^m}$$

adică $\frac{C}{D^m}$ *este un invariant pentru transformările* T_1, T_2, T_1', T_2'. Vom avea atunci

$$\frac{C}{D^m} = \frac{C^*}{(D^*)^m}$$

și ținînd seama de formula (15), deducem că

$$\frac{C}{D^m} = \frac{\Delta^*}{D^*} \tag{16}$$

unde Δ^* este determinantul din membrul al doilea al formulei (15).

Să considerăm acum determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & q_{11} & q_{12} & \ldots & q_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & q_{21} & q_{22} & \ldots & q_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & q_{n1} & q_{n2} & \ldots & q_{nm} \\ p_{11} & p_{12} & \ldots & p_{1n} & b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \ldots & p_{2n} & b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ p_{m1} & p_{m2} & \ldots & p_{mn} & b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

Fie $\overline{D}$ determinantul care se obține schimbînd în D două linii sau două coloane între ele. Notăm cu $\overline{\Delta}$ determinantul care se obține făcînd aceeași transformare ca și în D pe linii sau pe coloane. Vom avea

$$\overline{D} = -D, \qquad \overline{\Delta} = -\Delta.$$

Fie acum $\overline{\overline{D}}$ determinantul care se obține adunînd la elementele unei linii a lui D, elementele altei linii înmulțite cu un factor λ, sau care se obține adunînd la elementele unei coloane a lui D, elementele altei coloane înmulțite cu un factor μ. Notăm cu $\overline{\overline{\Delta}}$ determinantul care se obține din Δ făcînd aceeași transformare ca și în D, pe linii sau pe coloane. Vom avea

$$\overline{\overline{D}} = D, \qquad \overline{\overline{\Delta}} = \Delta.$$

Din aceste formule rezultă că

$$\frac{\overline{\Delta}}{\overline{D}} = \frac{\Delta}{D}, \qquad \frac{\overline{\overline{\Delta}}}{\overline{\overline{D}}} = \frac{\Delta}{D}$$

adică $\frac{\Delta}{D}$ *este un invariant pentru transformările* T_1, T_2, T_1', T_2'.

Rezultă că

$$\frac{\Delta}{D} = \frac{\Delta^*}{D^*} \tag{17}$$

unde D^* este forma canonică a lui D, iar Δ^* este determinantul din membrul al doilea al formulei (15).

Formulele (16) și (17) ne arată atunci că

$$\frac{C}{D^m} = \frac{\Delta}{D},$$

de unde rezultă că

$$C = D^{m-1}\Delta$$

și cu aceasta, identitatea (12) a lui Sylvester este demonstrată.

Cazul $j = n - 1$, $m = 1$ este banal, determinantul C se reduce la un singur element c_{11}. Formula (12) a lui Sylvester este în acest caz o identitate banală, factorul D^{m-1} din membrul al doilea care apare ca 0^0 trebuind să fie socotit egal cu 1.

КАНОНИЧЕСКАЯ ФОРМА ОДНОГО ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

(Краткое содержание)

Известно, что элементарными преобразованиями T_1, T_2 и T_1', T_2', произведенными над строками и столбцами, матрица $A = \| a_{ik} \|_1^n$ сводится к канонической форме A^*. Назовем канонической формой определителя $D = |A|$ определитель $D^* = |A^*|$.

В настоящей работе даны применения канонической формы определителя, причем доказывается формула (4) для взаимного определителя Δ (порядка j) определителя D. Доказывается также тождество (12) Сильвестера.

Доказательства опираются на следующую идею:

Пусть требуется вычислить определитель Δ, соответствующий некоторому определителю D. Если найден инвариант $f(D, \Delta)$ преобразований T_1, T_2, T_1', T_2', тогда из равенства

$$f(D, \Delta) = f(D^*, \Delta^*)$$

выводится Δ, так как Δ^* можно легко вычислить.

LA FORME CANONIQUE D'UN DÉTERMINANT ET SES APPLICATIONS

(*Résumé*)

On sait que par des transformations élémentaires T_1, T_2 et T'_1, T'_2, effectuées sur les lignes et les colonnes d'une matrice $A = ||a_{ik}||_1^n$, on ramène celle-ci à la forme canonique A^*. On appelle forme canonique du déterminant $D = |A|$, le déterminant $D^* = |A^*|$.

Dans ce travail, on fait des applications de la forme canonique d'un déterminant, en démontrant la formule (4) pour le déterminant réciproque Δ, d'ordre j, d'un déterminant D, et en démontrant l'identité (12) de *Sylvester*.

Les démonstrations données sont basées sur l'idée suivante :

Supposons que nous ayons à calculer un déterminant Δ qui correspond à un déterminant D quelconque. Si l'on peut mettre en évidence un invariant $f(D, \Delta)$ pour les transformations T_1, T_2, T'_1, T'_2, alors de l'égalité

$$f(D, \Delta) = f(D^*, \Delta^*)$$

on peut tirer Δ, en calculant facilement Δ^*.