REDUCEREA UNEI FORME BILINEARE LA O FORMĂ CANONICĂ

DE

D. V. IONESCU

Într-o notă din Buletinul Academiei poloneze de Ştiinţe, din 1957, M. Altman [1] a dat o generalizare a metodei lui Jacobi pentru forme bilineare. Ne permitem să arătăm că am prezentat la prima sesiune ştiinţifică a Societăţii de ştiinţe matematice şi fizice din R.P.R., în 1955 [2], o lucrare care conţine ca un caz particular reducerea unei forme bilineare la o formă canonică. În această notă dăm o altă metodă pentru obţinerea formei canonice.

Să considerăm forma bilineară

$$\Phi = \sum_{i,k=1}^{n} a_{i,k} x_i y_k \tag{1}$$

şi fie

$$X_k = \sum_{j=1}^{n} a_{j,k} x_j, \qquad Y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} y_j \tag{2}$$

unde $i,\ k = 1,\ 2, \ldots, n$.

Fie r rangul matricei $||a_{ik}||_1^n$ şi să presupunem că notaţiile au fost astfel alese, încît determinanţii

$$\Delta_h = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1h} \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{h1} & \ldots & a_{hh} \end{vmatrix} \tag{3}$$

să nu fie nuli, ceea ce este totdeauna posibil, unde $h = 1, 2, \ldots, r$.

În acest caz se demonstrează că

$$\Phi = \frac{-1}{\Delta_r}\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} & Y_1 \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} & Y_r \\ X_1 & \ldots & X_r & 0 \end{vmatrix} \tag{4}$$

Aplicînd algoritmul lui Gauss (vezi [3]) pentru a rezolva ecuațiile lineare (2) în y_k și x_i, aceste ecuații se pot scrie sub forma

$$\begin{aligned} a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \ldots + a_{1n} y_n &= Y_1 \\ a_{22}^{(1)} y_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)} y_n &= Y_2^{(1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n2}^{(1)} y_2 + \ldots + a_{nn}^{(1)} y_n &= Y_n^{(1)} \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + \ldots + a_{n1} x_n &= X_1 \\ a_{22}^{(1)} x_2 + \ldots + a_{n2}^{(1)} x_n &= X_2^{(1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{2n}^{(1)} x_2 + \ldots + a_{nn}^{(1)} x_n &= X_n^{(1)} \end{aligned}$$

unde

$$a_{ik}^{(1)} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1k} \\ a_{i1} & a_{1k} \end{vmatrix}}{\Delta_1}, \quad X_k^{(1)} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1k} \\ X_1 & X_k \end{vmatrix}}{\Delta_1}, \quad Y_i^{(1)} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & Y_1 \\ a_{i1} & Y_i \end{vmatrix}}{\Delta_1}$$

Se demonstrează atunci că

$$\Phi = \frac{-1}{\Delta_r}\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 & Y_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \ldots & a_{2r}^{(1)} & Y_2^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ 0 & a_{r2}^{(1)} & \ldots & a_{rr}^{(1)} & Y_r^{(1)} \\ X_1 & X_2^{(1)} & \ldots & X_r^{(1)} & 0 \end{vmatrix}$$

Continuînd algoritmul lui Gauss, se ajunge la identitatea

$$\Phi = \frac{-1}{\Delta_r}\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 & Y_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & 0 & \ldots & 0 & Y_2^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \ldots & 0 & Y_3^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{rr}^{(r-1)} & Y_r^{(r-1)} \\ X_1 & X_2^{(1)} & X_3^{(2)} & \ldots & X_r^{(r-1)} & 0 \end{vmatrix} \tag{5}$$

unde $Y_h^{(h-1)}$ şi $X_h^{(h-1)}$ sînt membrii ai doilea ai ecuaţiilor lineare

$$\begin{aligned} a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \ldots + a_{1n} y_n &= Y_1 \\ a_{22}^{(1)} y_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)} y_n &= Y_2^{(1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{rr}^{(r-1)} y_r + \ldots + a_{rn}^{(r-1)} y_n &= Y_r^{(r-1)} \end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + \ldots + a_{n1} x_n &= X_1 \\ a_{22}^{(1)} x_2 + \ldots + a_{n2}^{(1)} x_n &= X_2^{(1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{rr}^{(r-1)} x_r + \ldots + a_{nr}^{(r-1)} x_n &= X_r^{(r-1)} \end{aligned}$$

obţinute prin algoritmul lui Gauss.

Se demonstrează că

$$X_k^{(k-1)} = \frac{P_k(x)}{\Delta_k}, \quad Y_i^{(i-1)} = \frac{Q_i(x)}{\Delta_i}, \quad a_{hh}^{(h-1)} = \frac{\Delta_h}{\Delta_{h-1}} \tag{6}$$

unde

$$P_k(x) = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{k-1,1} & \ldots & a_{k-1,k} \\ X_1 & \ldots & X_k \end{vmatrix}, \quad Q_i(y) = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,i-1} & Y_1 \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & \ldots & a_{i,i-1} & Y_i \end{vmatrix} \tag{7}$$

Dezvoltînd determinantul din identitatea (5), se obţine forma canonică a formei bilineare (1)

$$\Phi = \frac{X_1 Y_1}{a_{11}} + \frac{X_2^{(1)} Y_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} + \ldots + \frac{X_r^{(r-1)} Y_r^{(r-1)}}{a_{rr}^{(r-1)}}$$

care cu ajutorul formulelor (6) şi (7) se scrie sub forma definitivă

$$\Phi = \frac{P_1(x)\, Q_1(y)}{\Delta_0 \Delta_1} + \frac{P_2(x)\, Q_2(y)}{\Delta_1 \Delta_2} + \ldots + \frac{P_r(x)\, Q_r(y)}{\Delta_{r-1} \Delta_r}. \tag{8}$$

Se vede uşor că $P_k(x)$ nu depinde de $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$, că $Q_i(y)$ nu depinde de $y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}$ şi că

$$\frac{D(P_1, \ldots, P_r)}{D(x_1, \ldots, x_r)} = \frac{D(Q_1, \ldots, Q_r)}{D(y_1, \ldots, y_r)} = \Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_r \neq 0,$$

ceea ce dovedeşte că formele lineare $P_k(x)$ şi $Q_i(y)$ sînt linear independente.

Cînd forma bilineară (1) este simetrică, adică $a_{ik} = a_{ki}$, avem $P_i(x) = Q_i(x)$ şi formula (8) devine

$$\Phi = \frac{Q_1(x)\,Q_1(y)}{\Delta_0 \Delta_1} + \frac{Q_2(x)\,Q_2(y)}{\Delta_1 \Delta_2} + \ldots + \frac{Q_r(x)\,Q_r(y)}{\Delta_{r-1} \Delta_r}. \tag{9}$$

În cazul particular al formelor patratice $x_k = y_k$, formula precedentă dă formula clasică a lui Jacobi de descompunere a unei forme patratice într-o sumă de patrate

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, x_i\, x_k = \frac{Q_1^2(x)}{\Delta_0 \Delta_1} + \frac{Q_2^2(x)}{\Delta_1 \Delta_2} + \ldots + \frac{Q_r^2(x)}{\Delta_{r-1} \Delta_r}. \tag{10}$$

Dacă forma biliniară (1) este cu coeficienţi şi nedeterminate complexe şi în plus hermitică, adică $a_{ik} = \overline{a_{ki}}$, ea se poate scrie sub forma

$$\Phi_1 = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, \overline{x_i}\, y_k.$$

Se demonstrează că în acest caz avem

$$P_i(x) = \overline{Q_i(x)}$$

şi formula de descompunere (8) devine

$$\Phi_1 = \frac{\overline{Q_1(x)}\,Q_1(y)}{\Delta_0 \Delta_1} + \frac{\overline{Q_2(x)}\,Q_2(y)}{\Delta_1 \Delta_2} + \ldots + \frac{\overline{Q_r(x)}\,Q_r(y)}{\Delta_{r-1} \Delta_r}$$

determinanţii Δ_i fiind reali.

Cînd $x_i = y_i$, formula precedentă dă descompunerea unei forme patratice hermitice într-o sumă de patrate

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, \overline{x_i}\, x_k = \frac{|Q_1(x)|^2}{\Delta_0 \Delta_1} + \frac{|Q_2(x)|^2}{\Delta_1 \Delta_2} + \ldots + \frac{|Q_r(x)|^2}{\Delta_{r-1} \Delta_r}. \tag{11}$$

BIBLIOGRAFIE

1. Altman M., *A generalisation of Jacobi's method for bilinear forms.* Bull. de l'Acad. Polon. des Sci., 1957, tom. V, p. 99–104.
2. Ionescu D. V., *O identitate importantă şi descompunerea unei forme bilineare într-o sumă de produse.* Gazeta matematică şi fizică, Seria A, 1955, p. 303–312 (referat în *Referativnîi Jurnal — Matematika*, 1957, ref. nr. 1146).
3. Gantmacher F. R., *Teoria matricelor*, Moscova, 1953, c. II, p. 28 (trad. litograf. din l. rusă).

СВЕДЕНИЕ БИЛИНЕЙНОЙ ФОРМЫ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

(Краткое содержание)

В одной заметке из Бюллетеня Польской Академии Наук за 1957 г. М. Альтман [1] дал обобщение метода Якобы для билинейных форм. На первой научной сессии Общества математических и физических наук РНР в 1955 г. [2] была представлена работа, содержащая частный случай сведения билинейной формы к коническому виду. В этой заметке приводится новый метод получения канонической формы.

Сначала доказывается тождество (5) для билинейной формы (1), откуда следует каноническая форма (8), где $P(x)$, $Q(x)$ и Δ_i даны формулами (7) и (3). В качестве частного случая получается формула (10), представляющая классическое разложение Якоби для квадратической формы, а также формула (11), представляющая разложение хермитовой квадратической формы в сумму квадратов.

RÉDUCTION D'UNE FORME BILINÉAIRE À UNE FORME CANONIQUE

(*Résumé*)

Dans une note du Bulletin de l'Académie polonaise des Sciences, de 1957, *M. Altman* [1] a donné une généralisation de la méthode de *Jacobi* pour les formes bilinéaires. Je me permets de signaler que j'ai présenté à la première session scientifique de la Société des Sciences mathématiques et physiques de la R.P.R., en 1955 [2], un travail qui comprend comme cas particulier la réduction d'une forme bilinéaire à une forme canonique, et dans cette note je donne en résumé la méthode que j'ai employée.

On démontre d'abord pour la forme bilinéaire (1), l'identité (5), d'où résulte la forme canonique (8), les $P_i(x)$, $Q_i(y)$ et Δ_i étant donnés par les formules (7) et (3). On obtient comme cas particulier la formule (10) qui est la décomposition classique de *Jacobi* de la forme quadratique et la formule (11) qui est la décomposition d'une forme quadratique hermitienne en une somme de carrés.