APLICAŢII LA REZOLVAREA ECUAŢIILOR FUNCŢIONALE NELINIARE CONSIDERATE ÎN SPAŢII SEMIORDONATE

DE

B. JANKÓ

Comunicare prezentată la sesiunea Filialei Cluj a Academiei R.P.R., din 16—18 aprilie 1957.

Lucrarea de faţă este în strînsă legătură cu generalizarea metodei lui S. A. Ciaplîghin [1], care se aplică la rezolvarea aproximativă a ecuaţiilor diferenţiale ordinare de ordinul n. Aici soluţia căutată se aproximează cu două şiruri de soluţii aproximative, şirul aproximaţiilor superioare fiind monoton descrescător iar şirul aproximaţiilor inferioare monoton crescător. Metoda lui S. A. Ciaplîghin a fost generalizată de A. N. Baluev [2], apoi de S. N. Slughin [3] pentru cazul ecuaţiilor funcţionale neliniare considerate în spaţii semiordonate.

Considerăm spaţiile semiordonate X, Y şi operaţia neliniară P definită pe X şi cu valori în Y. În aceste spaţii s-a definit un tip de convergenţă, anume (o)-convergenţa [4]. Mulţimea elementelor $x \in X$ care satisfac inegalităţile

$$\underline{x}_0 \leqq x \leqq \overline{x}_0, \quad \underline{x}_0, \overline{x}_0 \in X,$$

se numeşte segment şi se notează $[\underline{x}_0, \overline{x}_0]$. Relaţia $[a, b] \subseteq [\underline{x}_0, \overline{x}_0]$ înseamnă $\underline{x}_0 \leqq a \leqq b \leqq \overline{x}_0$.

Ideile lui S. A. Ciaplîghin au fost extinse de către S. N. Slughin în felul următor :

Teorema I. *Fie P o operaţie neliniară definită pe segmentul $[\underline{x}_0, \overline{x}_0]$. Dacă următoarele condiţii sînt îndeplinite :*

1°. $P(\underline{x}_0) \leqq 0 \leqq P(\overline{x}_0)$,

2°. *pentru orice segment $[a, b] \subseteq [\underline{x}_0, \overline{x}_0]$ există operatori aditivi $\overline{\Gamma}_{a,b}$ şi $\underline{\Gamma}_{a,b}$ astfel ca să avem îndeplinite relaţiile*

$$\overline{\Gamma}_{a,b}(b - x) \geqq P(b) - P(x), \; \underline{\Gamma}_{a,b}(x - a) \geqq P(x) - P(a),$$

3°. *există inversele pozitive* $\overline{\Gamma}_{a,b}^{-1} \geqq 0$, $\underline{\Gamma}_{a,b}^{-1} \geqq 0$,

4°. *există operatorul aditiv* Γ *pentru care avem*

$$\Gamma \geqq \overline{\Gamma}_{a,b}, \quad \Gamma \geqq \underline{\Gamma}_{a,b}$$

pentru orice segment $[a, b]$,

5°. *există inversa* $\Gamma^{-1} \geqq 0$ *și* $\Gamma^{-1} P$ *este monoton-continuă, atunci soluția cea mai mică* $\underline{x}^*$, *respectiv cea mai mare* $\overline{x}^*$ *a ecuației* $P(x) = 0$, *considerată pe segmentul* $[\underline{x}_0, \overline{x}_0]$, *pot fi obținute cu ajutorul algoritmelor*

$$\overline{x}_{n+1} = \overline{x}_n - \overline{\Gamma}^{-1}_{\underline{x}_n, \overline{x}_n} P(\overline{x}_n), \quad \underline{x}_{n+1} = \underline{x}_n - \underline{\Gamma}^{-1}_{\underline{x}_n, \overline{x}_n} P(\underline{x}_n), \text{ unde } \overline{x}_n \searrow \overline{x}^*, \ \underline{x}_n \nearrow \underline{x}^* \ (n \to \infty).$$

Dacă mai există un operator aditiv Λ, *avînd* $\Lambda^{-1} \geqq 0$ *și*

$$P(x + \Delta x) - P(x) \geqq \Lambda(\Delta x) \quad \text{pentru orice } \Delta x > 0,$$

atunci soluția este unică: $\underline{x}^* = \overline{x}^* = x^*$.

T e o r e m a II. *Fie definit pe segmentul* $[\underline{x}_0, \overline{x}_0]$ *operația* P *și operatorul aditiv* Γ *avînd* $\Gamma^{-1} \geqq 0$, *iar*

$$P(x + \Delta x) - P(x) \leqq \Gamma(\Delta x) \tag{1}$$

pentru orice $\Delta x > 0$, *apoi fie* $\Gamma^{-1} P$ *monoton-continuă și* $P(\underline{x}_0) \leqq 0 \leqq P(\overline{x}_0)$, *atunci soluția cea mai mică* $\underline{x}^*$, *respectiv cea mai mare* $\overline{x}^*$ *a ecuației* $P(x) = 0$, *considerate pe segmentul* $[\underline{x}_0, \overline{x}_0]$, *pot fi obținute prin următoarea metodă de iterație*

$$\overline{x}_{n+1} = \overline{x}_n - \Gamma^{-1} P(\overline{x}_n), \quad \underline{x}_{n+1} = \underline{x}_n - \Gamma^{-1} P(\underline{x}_n)$$

unde $\overline{x}_n \searrow \overline{x}^*$ *și* $\underline{x}_n \nearrow \underline{x}^*$, $(n \to \infty)$.

Scopul acestui articol este de a construi operatorii $\overline{\Gamma}_{a,b}$, $\underline{\Gamma}_{a,b}$ folosind diferențele divizate, obținînd astfel noi metode de iterație; în cadrul lui ne mărginim la cazul cînd *elementele spațiului X sînt funcții de variabile reale*. Fie apoi $P(x)$ definit pe X cu valori în X.

Definiții. Diferența divizată de ordinul întîi a operației $P(x)$ pentru $x_0, x_1 \in X$ o definim astfel:

$$\frac{P(x_0) - P(x_1)}{x_0 - x_1},$$

unde se presupune $x_0 < x_1$. Această diferență divizată o notăm: $[x_0, x_1; P]$. Diferența divizată de ordinul al doilea se definește în felul următor:

$$[x_0, x_1, x_2; P] = \frac{[x_0, x_1; P] - [x_1, x_2; P]}{x_0 - x_2}.$$

În cele ce urmează vom presupune că $x_0 < x_1 < x_2$.

Vom zice că operația $P(x)$ este monoton crescătoare pe segmentul $[\xi, \eta]$, $\xi, \eta \in X$, dacă $[x_0, x_1; P] > 0$ pentru orice $x_0, x_1 \in [\xi, \eta]$ și $x_0 < x_1$. Vom spune că $P(x)$ este convexă pe segmentul $[\xi, \eta]$, dacă $[x_0, x_1, x_2; P] > 0$

pentru orice $x_0, x_1, x_2 \in [\xi, \eta]$, unde presupunem de asemenea că $x_0 < x_1 < x_2$.

În cele ce urmează vom construi operatorii $\overline{\Gamma}_{a,b}$ și $\underline{\Gamma}_{a,b}$ folosind diferențele divizate de ordinul întîi ale operației P. Astfel ajungem la cîteva teoreme analoage teoremelor lui A. N. B a l u e v [2], figurînd însă în locul derivatelor diferențe divizate de același ordin.

TEOREMA 1. *Considerăm date elementele* $\underline{x}_0, \overline{x}_0 \in X$, *unde* $\underline{x}_0 \leq \overline{x}_0$; *fie apoi definită* $P(x)$ *pe segmentul* $[\underline{x}_0, \overline{x}_0] \subseteq X$ *și cu valori în* X. *Dacă în afară de acestea mai avem îndeplinite condițiile*

1°. $P(\underline{x}_0) \leqq 0 \leqq P(\overline{x}_0)$,

2°. *operația* $P(x)$ *este monoton-continuă pe* $[\underline{x}_0, \overline{x}_0]$,

3°. $[x_1, x_2; P] \leqq \Gamma$ *pentru orice* $x_1 < x_2$ *și* $x_1, x_2 \in [\underline{x}_0, \overline{x}_0]$ *iar* $\Gamma > 0$ *-și finit, unde* $[x_1, x_2; P]$, $\Gamma \in X$,

4°. *aproximațiile* $\underline{x}_n, \overline{x}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *se construiesc cu ajutorul formulelor de iterație*

$$\underline{x}_n = \underline{x}_{n-1} - \frac{1}{\Gamma} \cdot P(\underline{x}_{n-1}), \quad \overline{x}_n = \overline{x}_{n-1} - \frac{1}{\Gamma} \cdot P(\overline{x}_{n-1})$$[1] ,

atunci ecuația funcțională $P(x) = 0$ *are cel puțin o soluție pe segmentul* $[\underline{x}_0, \overline{x}_0]$. *Dintre acestea* $\overline{x}^*$ *fiind cea mai mare, iar* $\underline{x}^*$ *cea mai mică soluție, avem relațiile*

$$\overline{x}^* = (o)\text{-}\lim_{n\to\infty} \overline{x}_n, \quad \underline{x}^* = (o)\text{-}\lim_{n\to\infty} \underline{x}_n,$$

și aproximațiile $\underline{x}_n, \overline{x}_n$ *satisfac inegalitățile*

$$\underline{x}_{n-1} \leqq \underline{x}_n \leqq \underline{x}^* \leqq \overline{x}^* \leqq \overline{x}_n \leqq \overline{x}_{n-1}; \quad P(\underline{x}_n) \leqq 0 \leqq P(\overline{x}_n).$$

Această teoremă rezultă imediat din teorema II a lui S. N. Slughin. Dacă mai există condiția $0 < \gamma \leqq [x_1, x_2; P]$, $\gamma \in X$ pentru orice $x_1 < x_2$ unde $x_1, x_2 \in [\underline{x}_0, \overline{x}_0]$, atunci pe baza teoremei I a lui Slughin rezultă unicitatea soluției, $\underline{x}^* = \overline{x}^*$.

O b s e r v a ț i e. Dacă ecuația funcțională este de forma $P(x) \equiv \equiv Lx + F(x) = 0$, L fiind un operator aditiv iar F o operație neliniară, atunci în loc de elementul $\Gamma \in X$ de la teorema noastră nr. 1 se poate alege un operator $\widetilde{\Gamma}$ de forma $\widetilde{\Gamma}\Delta x = L\Delta x + M.\Delta x$, unde $M \in X$ și $[x_1, x_2; F] \leqq M$. Dacă în afară de acestea $\widetilde{\Gamma}^{-1} \geqq 0$ și $\widetilde{\Gamma}^{-1} P$ este monoton-continuă, atunci ne putem folosi de formulele de iterație

$$\underline{x}_{n+1} = \underline{x}_n - \widetilde{\Gamma}^{-1} P(\underline{x}_n), \quad \overline{x}_{n+1} = \overline{x}_n - \widetilde{\Gamma}^{-1} P(\overline{x}_n).$$

TEOREMA 2. *Fie date elementele* $\underline{x}_0, \overline{x}_0 \in X$; *fie apoi îndeplinite condițiile*

---

[1] Aici punctul înseamnă produsul obișnuit a două funcții din spațiul X.

1°. $P(\underline{x}_0) < 0 < P(\bar{x}_0)$ *pentru* $\underline{x}_0 < \bar{x}_0$,

2°. *operația* $P(x)$ *este monoton-continuă pe* $[\underline{x}_0, \bar{x}_0]$,

3°. $[\bar{x}_0, \bar{x}_{-1}; P] > 0$ *și finită, unde* $\bar{x}_{-1} > \bar{x}_0$, $\bar{x}_{-1} \in X$,

4°. $P(x)$ *este convexă pe* $[\underline{x}_0, \bar{x}_{-1}]$,

5°. *aproximațiile* $\underline{x}_{n+1}$, *respectiv* $\bar{x}_{n+1}$ *sînt date de algoritmul*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{[\bar{x}_0, \bar{x}_{-1}; P]} \cdot P(x_n),$$

atunci ecuația $P(x) = 0$ *admite cel puțin o soluție pe segmentul* $[\underline{x}_0, \bar{x}_0]$; $\bar{x}^*$ *fiind cea mai mare iar* $\underline{x}^*$ *cea mai mică soluție, avem*

$$\underline{x}^* = (o)\text{-}\lim_{n\to\infty} \underline{x}_n, \quad \bar{x}^* = (o)\text{-}\lim_{n\to\infty} \bar{x}_n, \quad \text{și}$$

$$\underline{x}_n < \underline{x}_{n+1} < \underline{x}^* \leqq \bar{x}^* < \bar{x}_{n+1} < \bar{x}_n; \; P(\underline{x}_{n+1}) < 0 < P(\bar{x}_{n+1}).$$

Teorema aceasta rezultă din teorema II, deoarece în cazul de față avem

$$\Gamma \Delta x = [\bar{x}_0, \bar{x}_{-1}; P].\Delta x.$$

TEOREMA 3. *Dacă avem îndeplinite condițiile*

1°. *pentru* $\underline{x}_0 < \bar{x}_0$ *avem* $P(\underline{x}_0) < 0 < P(\bar{x}_0)$,

2°. $P(x)$ *este monoton-crescătoare și convexă pe segmentul* $[\underline{x}_{-1}, \bar{x}_{-1}]$, *unde* $\underline{x}_{-1}$, $\bar{x}_{-1} \in X$, *iar* $[\bar{x}_{-1}, \bar{x}_0; P] < +\infty$,

3°. $P(x)$ *este monoton-continuă pe* $[\underline{x}_0, \bar{x}_0] \subseteq [\underline{x}_{-1}, \bar{x}_{-1}]$,

4°. *aproximațiile* $\underline{x}_{n+1}$, $\bar{x}_{n+1}$ *se obțin folosind formulele*

$$\underline{x}_{n+1} = \underline{x}_n - \frac{1}{[\underline{x}_n, \bar{x}_n; P]} \cdot P(\underline{x}_n); \quad \bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{1}{[\bar{x}_n, \bar{x}_{n-1}; P]} \cdot P(\bar{x}_n),$$

atunci pentru ecuația funcțională $P(x) = 0$ *există o soluție unică* $x^* \in [\underline{x}_0, \bar{x}_0]$, *unde*

$$x^* = (o)\text{-}\lim_{n\to\infty} \underline{x}_n = (o)\text{-}\lim_{n\to\infty} \bar{x}_n \quad \text{și}$$

$$\underline{x}_n < \underline{x}_{n+1} < x^* < \bar{x}_{n+1} < \bar{x}_n; \; P(\underline{x}_{n+1}) < 0 < P(\bar{x}_{n+1}).$$

Această teoremă se demonstrează analog ca și teorema I a lui Slughin. În cazul de față însă rolul operatorilor $\bar{\Gamma}_{\underline{x}_n, \bar{x}_n}$, $\underline{\Gamma}_{\underline{x}_n, \bar{x}_n}$ și Γ îl joacă diferențele divizate $[\bar{x}_n, \bar{x}_{n-1}; P]$, $[\underline{x}_n, \bar{x}_n; P]$ și $[\bar{x}_0, \bar{x}_{-1}; P]$. Remarcăm aici că operatorii $\bar{\Gamma}_{\underline{x}_n, \bar{x}_n}$ și $\underline{\Gamma}_{\underline{x}_n, \bar{x}_n}$ pot depinde, în afară de $\underline{x}_n$, $\bar{x}_n$, și de alte aproximații, cum se întîmplă în cazul de mai sus.

Observații. 1. Dacă diferențele divizate de ordinul I și II ale operației $P(x)$ „păstrează un semn constant" (adică rămîn întotdeauna

mai mari, respectiv mai mici decît elementul zero), atunci teorema noastră nr. 3 rămîne valabilă.

2. În cazul ecuațiilor de tip $P(x) = Lx + F(x) = 0$, în loc de diferențele divizate $[\underline{x}_n, \bar{x}_n; P]$, $[\bar{x}_n, \bar{x}_{n-1}; P]$ ne putem folosi de operatorii $\bar{\Gamma}_{\underline{x}_n, \bar{x}_{n-1}}$, $\underline{\Gamma}_{\underline{x}_n, \bar{x}_n}$ construiți în felul următor:

$$\bar{\Gamma}_{\bar{x}_n, \bar{x}_{n-1}} \Delta x = L\Delta x + [\bar{x}_n, \bar{x}_{n-1}; F].\Delta x; \; \underline{\Gamma}_{\underline{x}_n, \bar{x}_n} \Delta x = L\Delta x + [\underline{x}_n, \bar{x}_n; F].\Delta x.$$

Aplicații. Pentru ilustrarea teoremelor și observațiilor de mai sus dăm cîteva aplicații:

A) Considerăm ecuația funcțională

$$f(t, x(t)) = g(t),$$

f fiind o funcție care depinde de argumentele t și $x(t) \in X$, iar $g(t) \in X$ este o funcție dată.

Dacă avem îndeplinite condițiile

1°. $f(t, \underline{x}_0(t)) < g(t) < f(t, \bar{x}_0(t))$, unde $\underline{x}_0(t)$, $\bar{x}_0(t) \in X$ fiind soluțiile aproximative pentru care avem $\underline{x}_0(t) < \bar{x}_0(t)$,

2°. funcția $f(t, x(t))$ este definită pe $[\underline{x}_0(t), \bar{x}_0(t)]$ cu valori în X și este continuă față de argumentul $x(t)$ pe segmentul dat,

3°. $0 < [\bar{x}_0(t), \bar{x}_{-1}(t); f] < +\infty$, unde $\bar{x}_0(t) < \bar{x}_{-1}(t)$; $\bar{x}_{-1}(t) \in X$,

4°. $f(t, x(t))$ este convexă pe segmentul $[\bar{x}_0(t), \bar{x}_{-1}(t)]$,

5°. aproximațiile $\underline{x}_{n+1}(t)$, $\bar{x}_{n+1}(t)$ se obțin conform algoritmului

$$x_{n+1}(t) = x_n(t) - \frac{1}{[\bar{x}_0(t), \bar{x}_{-1}(t); f]} [f(t, x_n(t)) - g(t)],$$

atunci ecuația $f(t, x(t)) = g(t)$ admite cel puțin o soluție pe segmentul $[\underline{x}_0(t), \bar{x}_0(t)]$.

Dacă $[x_1(t), x_2(t); f] \geqq \Lambda(t) > 0$, $x_1(t) < x_2(t)$; $x_1(t), x_2(t) \in [\underline{x}_0(t), \bar{x}_0(t)]$, atunci avem o singură soluție pe segmentul considerat. La această soluție tind monoton aproximațiile $\bar{x}_n$, respectiv $\underline{x}_n$ (vezi teorema 2).

B) Considerăm ecuația

$$P(x) \equiv x' + f(t, x) = 0 \qquad x(t_0) = \alpha_0$$

la care funcția $f(t, x)$ nu admite în general derivata f_x.

Dacă avem îndeplinite condițiile:

1°. $P(\underline{x}_0) < 0 < P(\bar{x}_0)$, unde $\bar{x}_0(t)$ și $\underline{x}_0(t)$ sînt două soluții aproximative pentru care avem $\bar{x}_0(t_0) = \underline{x}_0(t) = \alpha_0$ și $\underline{x}_0(t) < \bar{x}_0(t)$ pentru $t > t_0$,

2°. funcția $f(t, x)$ este definită și continuă în raport de t și $x(t)$ pe segmentul $[\underline{x}_0(t), \bar{x}_0(t)]$, iar $t \in [t_0, T]$, 3°. operatorul aditiv $\widetilde{\Gamma}$ se alege astfel

$$\widetilde{\Gamma}\Delta x = (\Delta x)' + K(t)\,\Delta x \quad \text{unde} \quad \frac{f(t,\ x+\Delta x) - f(t,\ x)}{\Delta x} \leqq K(t),$$

$K(t)$ fiind continuă și $\Delta x > 0$ $(t > t_0)$, $\Delta x(t_0) = 0$,

4°. aproximațiile superioare $\overline{x}_{n+1}$, respectiv inferioare $\underline{x}_{n+1}$ se construiesc folosind formula

$$x_{n+1} = x_n - e^{-\int_{t_0}^{t} K(t)dt} \int_{t_0}^{t} P(x_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} K(t)dt}\, dt,$$

atunci ecuația considerată are cel puțin o soluție pe segmentul dat.

Dacă mai există operatorul

$$\Lambda\Delta x = (\Delta x)' + k(t)\,.\,\Delta x$$

unde $\Delta x > 0$ $(t > t_0)$ și $\Delta x(t_0) = 0$, iar funcția $k(t)$ este continuă pentru care avem $k(t) \leqq \dfrac{f(t,\ x+\Delta x) - f(t,\ x)}{\Delta x}$, atunci ecuația dată are o singură soluție pe segmentul considerat [5], la care converg monoton aproximațiile $\overline{x}_n$ respectiv $\underline{x}_n$. (Vezi observația de la teorema 1.)

C) Considerăm din nou ecuația $P(x) \equiv x' + f(t,\ x) = 0$, cu condiția la limită $x(t_0) = \alpha_0$.

Dacă avem satisfăcute condițiile

1°. presupunem îndeplinite proprietățile 1°—2° de la cazul **B**),

2°. funcția $f(t, x)$ este monoton-crescătoare și convexă față de x pe segmentul $[\underline{x}_0(t),\ \overline{x}_{-1}(t)]$, unde $[\underline{x}_0(t),\ \overline{x}_0(t)] \subseteq [\underline{x}_{-1}(t),\ \overline{x}_{-1}(t)]$,

3°. operatorii $\overline{\Gamma}_{\overline{x}_n,\, \overline{x}_{n-1}}$, $\underline{\Gamma}_{\underline{x}_n,\, \overline{x}_n}$ se aleg astfel :

$$\overline{\Gamma}_{\overline{x}_n,\, \overline{x}_{n-1}}\Delta x = (\Delta x)' + [\overline{x}_n,\ \overline{x}_{n-1}\,;\ f]\,.\,\Delta x\,;\ \underline{\Gamma}_{\underline{x}_n,\, \overline{x}_n}\Delta x = (\Delta x)' + \\ + [\underline{x}_n,\ \overline{x}_n\,;\ f]\,.\Delta x, \qquad \Delta x(t_0) = 0,$$

4°. aproximațiile se construiesc pe baza formulelor

$$\overline{x}_{n+1} = \overline{x}_n - e^{-\int_{t_0}^{t} [\overline{x}_n,\ \overline{x}_{n-1};f]\,dt} \int_{t_0}^{t} P(\overline{x}_n)\, e^{\int_{t_0}^{t} [\overline{x}_n,\ \overline{x}_{n-1};\ f]\,dt}\, dt,$$

$$\underline{x}_{n+1} = \underline{x}_n - e^{-\int_{t_0}^{t} [\underline{x}_n,\ \overline{x}_{n-1};f]\,dt} \int_{t}^{t} P(\underline{x}_n)\, e^{\int_{t_0}^{t} [\underline{x}_n,\ \overline{x}_n\,;\ f]\,dt}\, dt,$$

atunci ecuația diferențială dată admite o singură soluție — pe segmentul considerat — la care tind monoton aproximațiile superioare, respectiv inferioare (vezi observația 2 de la teorema nr. 3).

Academia R.P.R. — Filiala Cluj,
Institutul de calcul

BIBLIOGRAFIE

1. S. A. Ciaplîghin, *Izbrannîe trudî po mehanike i matematike*, Moscova, 1954, p. 490—503 și 526—538.
2. A. N. Baluev, *K abstraktnoi teorii metoda S. A. Ciaplîghina.* D A N, **83**, 781 (1952)
3. S. N. Slughin, *Priblijennoie reșenie operatornîh uravnenii na asnove metoda S. A. Ciaplîghina.* D A N, **103**, 1, 565 (1955).
4. L. V. Kantorovici, B. Z. Vulih, A. G. Pinsker, *Funkționalnîi analiz v poluuporiadocennîh prostranstvah*, Moscova—Leningrad, 1950.
5. S. N. Slughin, *Primenenie metoda Ciaplîghinskovo tipa priblijennogo reșeniia operatornîh uravnenii*, D A N, **110**, 5, 739 (1956).

ПРИМЕНЕНИЯ К РЕШЕНИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПОЛУУПОРЯДОЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

(Краткое содержание)

В функциональном полуупорядочном пространстве X вводим понятие разделенной разности для нелинейного оператора P, определенного в X. Воспользовавшись вместо производных (в смысле Гато) разделенными разностями такого же порядка, получаем несколько теорем, аналогичных теоремам А. Н. Балуева [2], и новые способы решения нелинейных функциональных уравнений.

APPLICATIONS À LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES NON LINÉAIRES CONSIDÉRÉES DANS LES ESPACES DEMI-ORDONNÉS

(Résumé)

Dans un espace demi-ordonné X on a introduit la notion de différence divisée pour l'opération non linéaire P définie dans X. En employant à la place des dérivés (au sens de Gâteaux) des différences divisées du même ordre, on a obtenu quelques théorèmes analogues aux théorèmes de A. N. Baluev [2], en obtenant aussi de nouveaux procédés pour la résolution des équations fonctionnelles non linéaires.