CITEVA OBSERVAŢII ÎN LEGĂTURĂ CU O ECUAŢIE DIOFANTIANĂ

DE

KISS ERNEST

Comunicare prezentată la sesiunea universităţilor „V. Babeş" şi „Bolyai" Cluj, din 24—29 mai 1958.

În anul 1940, N. Nakayama s-a ocupat cu stabilirea celui mai mic număr natural n pentru care ecuaţia $\frac{a}{b} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}$ are ca soluţii numere naturale, şi denumeşte acest număr $N(a, b)$.

El stabileşte următoarele două teoreme :

Teorema I. *$N(a, b)$ este egal cu 2, dacă şi numai dacă se găsesc trei numere naturale k_1, k_2, k_3 pentru care $b = k_1k_2(k_3 a - k_2d)$, unde $d = (a, b)$.*

Teorema II. *$N(3, b)$ este egal cu 3, dacă şi numai dacă toţi divizorii lui b sînt de forma $6k + 1$.*

Mai tîrziu P. Erdős (1950) şi Strauss enunţă teorema că $N(4, b) \leq 3$, dar dau demonstraţia numai pentru $4 < b < 5000$. Demonstraţia acestei teoreme ulterior a fost dată de Shapiro pentru $4 < b < 20000$, de R. Obláth pentru $4 < b < 106128$ şi de L. A. Rosati pentru $4 < b < 141649$.

R. Obláth efectuează descompunerile bazîndu-se pe următoarele trei teoreme :

Teorema I. *Ecuaţia diofantiană*

$$\frac{4}{b} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \tag{1}$$

se poate rezolva în numere întregi dacă $b + 1$ are un divizor prim de forma $p = 4m - 1$.

Teorema II. *Ecuaţia (1) este rezolvabilă în numere întregi dacă putem determina un număr m în aşa fel ca $b + 4m - 1$ să aibă cel puţin un divizor de forma $k(4m - 1) - 1$.*

Teorema III. *Ecuaţia (1) este rezolvabilă în numere întregi dacă* *putem determina un număr m în așa fel ca* $\frac{b+4m-1}{4} = d\delta$ *să aibă un divizor de forma* $k(4m-1)-d$.

A) În cele ce urmează demonstrăm o teoremă generală, despre care se arată imediat că cuprinde teoremele lui Nakayama și Obláth, iar ca încheiere — aplicînd această teoremă — demonstrăm valabilitatea teoremei lui Erdős pentru $4 < b < 200.000$.

TEOREMĂ. *Fracția ireductibilă* $\frac{a}{b}$ *se poate descompune în suma a două fracții cu numărătorul* 1, *dacă și numai dacă numitorul* b *are doi divizori relativ primi a căror sumă este un multiplu al numărului* a.

Condiția este suficientă.

Presupunînd

$$b = k\,b_1 b_2 \quad \text{și} \quad b_1 + b_2 = ma$$

avem

$$\frac{a}{b} = \frac{m\,a}{m\,k\,b_1 b_2} = \frac{b_1+b_2}{m\,k\,b_1\,b_2} = \frac{1}{m\,k\,b_1} + \frac{1}{m\,k\,b_2}$$

Condiția este necesară.

Presupunînd

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} \quad \text{și} \quad b_1 = b_1'd;\ b_2 = b_2'd;\ (b_1', b_2') = 1$$

vom avea

$$\frac{a}{b} = \frac{b_1'+b_2'}{d\,b_1'b_2'}$$

adică

$$b_1' + b_2' = k\,a \quad \text{și} \quad d\,b_1'\,b_2' = k\,b$$

și $(b_1', k) = 1$, căci altfel b_1' și b_2' nu ar fi relativ primi, deci $b_1' \mid b$ și $b_2' \mid b$ și astfel teorema este demonstrată.

B) Se poate arăta imediat că este destul să rezolvăm ecuația (1) în cazul $b = 6,\ 8,\ 9$ și $b = p$ număr prim, deci trebuie să considerăm numai cazurile $b = 6k-1$ și $b = 6k+1$.

Dînd lui k valori din clasele de resturi de modulul 8, 5, 7 și 11, în unele cazuri găsim soluții generale, rămînînd a se rezolva ecuațiile unde b este de forma $b = 18480\,k + x$, unde x este unul dintre numerele următoare:

1	169	289	361	529	841	961	1129	1201	1369	1681
1849	2041	2209	2521	2641	2689	2809	3049	3361	3481	3529
3721	3889	4321	4369	4489	5041	5161	5209	5329	5569	5881
6001	6169	6241	6409	6889	7009	7561	7681	7849	7921	8089
8521	8761	9241	9409	9529	9601	9769	10081	10201	10441	10609
10921	11089	11281	11449	11761	11881	11929	12049	12289	12601	12721
12769	12961	13129	13561	13609	13729	13801	14281	14401	14449	14569
14809	15241	15409	15481	16129	16249	16801	16921	16969	17089	17161
17329	18001									

Vom avea pentru $b = 18480\,k + x$:

$$\frac{4}{18480k+x} = \frac{1}{4620k+\frac{x+4m-1}{4}} + \frac{4\,m-1}{(18480k+x)(4620k+\frac{x+4m-1}{4})} \qquad (2)$$

și descompunerea se efectuează pe baza teoremei mai sus stabilite.

Observare. Pe baza egalității (2) se poate vedea aplicabilitatea teoremelor lui Nakayama și Obláth, și se observă imediat că ele sînt conținute în teorema demonstrată mai sus.

Ca aplicație dăm descompunerea fracției $\frac{4}{b}$ în trei fracții primare pentru cazul b prim și $141.649 < b < 200.000$, indicînd în fiecare caz o valoare m pentru care descompunerea se efectuează:

b	m	b	m	b	m	b	m	b	m
141 649	3	141 961	2	142 969	8	144 169	5	146 169	9
146 449	3	146 521	2	148 201	2	149 521	1	149 689	1
150 649	4	150 889	1	151 201	4	151 561	6	151 729	2
153 001	2	153 841	6	154 081	2	154 849	2	155 521	1
155 689	3	156 361	4	156 601	1	157 081	3	158 449	3
158 761	3	159 721	4	159 769	6	160 441	3	160 969	6
161 569	2	161 641	1	162 239	3	162 649	2	163 249	8
163 321	3	164 089	3	164 809	3	165 001	1	166 609	2
166 849	1	167 449	3	167 521	2	169 009	1	169 129	2
169 369	1	169 681	1	170 641	2	170 689	2	170 809	2
171 481	3	171 529	3	171 889	6	172 321	2	172 489	5
172 561	3	173 209	6	174 169	3	174 241	6	175 081	2
176 089	8	176 401	3	176 521	2	177 409	1	177 601	3
178 249	2	178 609	3	178 921	3	179 041	1	179 089	4
179 281	4	181 729	3	183 289	3	184 321	4	184 969	8
185 089	2	185 161	1	185 641	2	186 481	1	186 649	2
186 841	5	187 009	8	187 441	3	188 281	3	189 169	3
189 961	2	190 129	6	190 369	3	191 689	1	192 889	1
194 569	4	195 241	3	196 081	1	196 561	7	196 681	3
197 521	1	197 569	6	198 409	3	198 529	2	199 081	1
200 041	3								

Universitatea „Bolyai" — Cluj,
Catedra de Analiză și Algebră

BIBLIOGRAFIE

1. R. Obláth, *Sur l'équation diophantienne* $\frac{4}{n} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$. Mathesis, 59 (1950), 308–316.

2. P. Erdős. *Az* $\frac{a}{b} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}$ *határozatlan egyenletről* [Despre ecuația diofantiană . . .], Mat.-fiz. lapok., 3 (1950), 192–210.

3. N. Nakayama, *On the Decomposition of a Rational Number into „Stammbrücke"*. The Tohoku Math. Journ., 46 (1940), 1—21.

4. A. Rosati, *Sull'equazione diofantea* $\frac{4}{b} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$. Boll. Unione mat. ital., 14 p. (1954), 59—63.

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ДИОФАНОВОГО УРАВНЕНИЯ

(Краткое содержание)

Дается простое доказательство теоремы:

Несократимую дробь $\frac{a}{b}$ тогда, и только тогда, можно разложить в сумму двух дробей, имеющих числитель 1, когда знаменатель b допускает двумя взаимно простыми делителями, сумма которых является кратным числа a.

Показывается, что эта теорема содержит теоремы Н. Накаямы и Р. Облата.

В качестве приложения доказывается теорема Эрдеша-Штраусса при $141\,649 < b < 200\,000$.

QUELQUES REMARQUES SUR UNE ÉQUATION DIOPHANTIENNE

(*Résumé*)

On donne une démonstration simple du théorème :

La fraction irréductible $\frac{a}{b}$ peut être décomposée en une somme de deux fractions avec le numérateur 1, si le dénominateur possède deux diviseurs relativement premiers dont la somme est un multiple du nombre a, et seulement dans ce cas.

On montre que ce théorème contient les théorèmes de *N. Nakayama* et *R. Obláth*.

Comme application, on démontre la valabilité du théorème *Erdős-Strauss* pour $141\,649 < b < 200\,000$.