ASUPRA RESTULUI ÎN UNELE FORMULE LINIARE DE APROXIMARE ALE ANALIZEI*)

DE

TIBERIU POPOVICIU

Membru corespondent al Academiei R. P. R.

Multe din formulele de aproximare ale analizei sînt de forma

$$A[f] \approx B[f], \quad \text{sau} \quad A[f] = B[f] + R[f], \tag{*}$$

unde $A[f]$, $B[f]$ sînt funcționale liniare definite pe o mulțime vectorială de funcții reale și continue de o variabilă reală și al căror *rest* $R[f] = A[f] - B[f]$ se anulează pe $n+1$ funcții date f_i, $i = 0, 1, \ldots, n$. Restul $R[f]$ este de asemenea o funcțională liniară și se anulează pe orice combinație liniară a funcțiilor f_i.

Nu vom considera decît funcționale reale și prin o funcțională liniară vom înțelege o funcțională aditivă și omogenă.

Formulele obișnuite de interpolare (polinomială sau trigonometrică), de derivare și de integrare numerică etc. sînt de forma precedentă.

În aplicații este important de a se putea delimita în mod convenabil restul. Pentru aceasta, cel puțin în anumite cazuri particulare bine determinate, s-a căutat să se pună restul sub diverse forme convenabile. De ex., s-a obținut $R[f]$ sub forma unei combinații liniare date, de una sau mai multe valori ale uneia sau mai multor derivate de anumite ordine ale funcției f. De asemenea s-a exprimat restul sub formă de integrală definită. Este suficient să cităm formula lui Taylor care dă o aproximare a valorii funcției f pentru o valoare dată a lui x și al cărei rest este dat de bine cunoscuta formulă a lui Lagrange sau prin o bine cunoscută reprezentare integrală [4].

S-au făcut multe cercetări asupra restului. Ne vom mulțumi să cităm lucrările lui A. A. Markov [6]. G. D. Birkhoff [1], G. Kowalewski [5], R. v. Mises [7], J. Radon [21], E. Ya. Remez [22], A. Sard [23].

*) Această lucrare se publică și în limba franceză în revista „Mathematica" vol. 1 (24), fascicola 1.

În această lucrare vom pune în evidență o altă expresie a restului, care este mai generală, în sensul că în general ea nu necesită existența derivatelor, altele decît acelea care intervin efectiv în formula (*). Forma nouă pe care o dăm restului face să iasă mai bine în evidență structura lui. Am obținut acest rezultat cu ajutorul teoriei funcțiilor convexe de ordin superior pe care le-am studiat altă dată [12, 13]. Sub o anumită ipoteză particulară făcută asupra funcțiilor f_i, caz care totuși cuprinde un vast cîmp de aplicații, expresia pe care o găsim pentru rest este strîns legată de anumite formule de medie. Vom face cîteva considerații asupra acestor formule de medie și vom regăsi astfel o parte a rezultatelor lui D. V. Widder [28]. În acest caz este ușor să se deducă restul exprimat ca o combinație liniară de derivate, dacă bineînțeles aceste derivate există.

Am obținut unele din aceste rezultate [16] în cazul particular cînd funcțiile f_i se reduc la puterile succesive x^i, $i = 0, 1, \ldots, n$ ale lui x, deci în cazul cînd restul se anulează pentru orice polinom de gradul n. În cazul acesta am dat de asemenea aplicații la anumite formule de derivare [17] și de integrare [19] numerică.

Această lucrare este împărțită în 4 părți. În § 1 studiem noua expresie a restului în cazul cînd ea are forma pe care noi convenim a o numi simplă. În § 2 studiem formulele de medie pe care le-am semnalat. În § 3 dăm exemple pentru anumite criterii care permit să se decidă dacă restul este sau nu de formă simplă. În fine, în § 4 spunem cîteva cuvinte asupra cazului cînd restul nu este de formă simplă și încheiem acest paragraf printr-o aplicație. Rezultatele §§ 3, 4 ne arată, pe de o parte, legătura lor cu alte rezultate cunoscute, în particular cu rezultatele lui E. Ya Remez [22] și, pe de altă parte, gradul de generalitate a expresiei obținută pentru rest.

§ 1.

1. Toate funcțiile considerate în această lucrare vor fi presupuse reale și de o variabilă reală. Vom nota cu E mulțimea de definiție a funcției sau mulțimea de definiție a funcțiilor considerate simultan. Vom preciza totdeauna, dacă este necesar, structura lui E.

Notăm cu

$$V\begin{pmatrix} g_1, g_2, \ldots, g_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_m \end{pmatrix} = |g_j(x_i)|_{i,j=1,2,\ldots,m} \tag{1}$$

determinantul valorilor funcțiilor

$$g_1, g_2, \ldots, g_m \tag{2}$$

pe punctele $x_i \in E$, $i = 1, 2, \ldots, m$. În determinantul (1), $g_j(x_i)$ este elementul din linia a i-a și coloana a j-a.

Determinantul este evident nul dacă punctele x_i sau dacă funcțiile (2) nu sînt distincte.

Vom păstra notația (1) numai pentru cazul cînd punctele x_i sînt distincte. În cazul contrar vom modifica convenabil definiția determinantului (1). Această modificare constă în înlocuirea liniilor corespunzătoare fiecărui grup de puncte x_i confundate prin linii formate din valorile funcțiilor (2) și ale derivatelor lor succesive pe aceste puncte. Mai precis, fie $z_1, z_2, \ldots, z_p$ punctele distincte cu care coincid respectiv $k_1, k_2, \ldots, k_p$ ($k_1, k_2, \ldots, k_p \geqq 1$, $k_1 + k_2 + \ldots + k_p = m$) dintre punctele x_i. Atunci, pentru fiecare $i = 1, 2, \ldots, p$, există exact k_i linii formate din valorile funcțiilor (2) și ale primelor lor $k_i - 1$ derivate pe punctul z_i. Aceasta implică, bine înțeles, existența derivatelor considerate. Numărul k_i este *ordinul de multiplicitate* al punctului z_i.

Ordonînd convenabil punctele x_i, putem nota determinantul (1) astfel modificat prin

$$V\begin{pmatrix} g_1, g_2, \ldots, g_m \\ \underbrace{z_1, z_1, \ldots, z_1}_{k_1}, \underbrace{z_2, z_2, \ldots, z_2}_{k_2}, \ldots, \underbrace{z_p, z_p, \ldots, z_p}_{k_p} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

care este de ordinul $m = k_1 + k_2 + \ldots + k_p$ și în care $g_s^{(r-1)}(z_i)$ este elementul din a $(k_1 + k_2 + \ldots + k_{i-1} + r)$-a linie și a s-a coloană, $r = 1, 2, \ldots, k_i$, $i = 1, 2, \ldots, p$ ($k_1 + k_2 + \ldots + k_{i-1}$ este înlocuit cu 0 dacă $i = 1$).

Subliniem următoarele cazuri particulare:

1°. Dacă $g_i = x^{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, vom nota determinantul (1) cu $V(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Acesta este determinantul lui Vandermonde al numerelor $x_1, x_2, \ldots, x_m$ și avem

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \prod_{i<j}^{1, 2, \ldots, m} (x_j - x_i), \quad (V(x_1) = 1). \tag{4}$$

Tot în acest caz determinantul (3) se va nota cu

$V(\underbrace{z_1, z_1, \ldots, z_1}_{k_1}, \underbrace{z_2, \ldots, z_2}_{k_2}, \ldots, \underbrace{z_p, z_p, \ldots, z_p}_{k_p})$ unde presupunem că punctele z_i, $i = 1, 2, \ldots, p$, sînt distincte.

2°. În cazul cînd toate punctele x_i coincid cu x, notăm determinantul (1) modificat cu $W(g_1, g_2, \ldots, g_m)$. Acesta este wronskianul funcțiilor (2). Avem deci

$$V(\underbrace{x, x, \ldots, x}_{m}) = W(1, x, x^2, \ldots, x^{m-1}) = (m-1)!!$$

unde am pus $\alpha!! = 1!\,2! \ldots \alpha!$ $(0!! = 1)$.

2. Putem obține determinantul (3) și prin o trecere la limită dacă toate derivatele care intervin sînt continue pe E, sau cel puțin în vecinătatea punctelor z_i.

Fie m puncte distincte $x_j^{(i)}$, $j = 1, 2, \dots, k_i$, $i = 1, 2, \dots, p$ și să formăm determinantul D de ordinul m al cărui element din a $(k_1 + k_2 + \dots + k_{i-1} + r)$-a linie și a s-a coloană este diferența divizată (obișnuită) de ordinul $r-1$, $[x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_r^{(i)}; g_s]$, $r = 1, 2, \dots, k_i$, $s = 1, 2, \dots, m$. Dacă observăm că această diferență divizată tinde către $\frac{1}{(r-1)!} g_s^{(r-1)}(z_i)$ cînd punctele $x_j^{(i)}$, $j = 1, 2, \dots, r$ tind către z_i, vedem că determinantul D tinde către determinantul (3) împărțit cu $\prod_{i=1}^{p} (k_i - 1)!!$, cînd $x_j^{(i)} \to z_i$, $j = 1, 2, \dots, k_i$, $i = 1, 2, \dots, p$. În fine, dacă înmulțim determinantul D prin produsul

$$\prod_{i=1}^{p} V(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_{k_i}^{(i)}) \tag{5}$$

și dacă facem cîteva operații elementare asupra liniilor, obținem determinantul

$$V\begin{pmatrix} & & & g_1, g_2, \dots\dots, g_m & & & \\ x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_{k_1}^{(1)}, & x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_{k_2}^{(2)}, & \dots, & x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_{k_p}^{(p)} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Rezultă că determinantul (3) se obține înmulțind pe (6) cu $\prod_{i=1}^{p} (k_i - 1)!!$, împărțindu-l cu (5) și făcînd apoi punctele $x_j^{(i)}$ să tindă către z_i pentru $j = 1, 2, \dots, k_i$, $i = 1, 2, \dots, p$.

Se poate generaliza procedeul de trecere la limită prin care s-a obținut determinantul (3) plecînd de la determinantul (1). Și anume se poate obține în același fel un determinant de forma (3) plecînd de la determinanți de aceeași formă. Nu insistăm asupra acestei generalizări deoarece ea nu va fi folosită în cele ce urmează.

Ca o primă aplicație găsim formula

$$V(\underbrace{z_1, z_1, \dots, z_1}_{k_1}, \underbrace{z_2, z_2, \dots, z_2}_{k_2}, \dots, \underbrace{z_p, z_p, \dots, z_p}_{k_p}) =$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{p} (k_i - 1)!!\right] \prod_{i<j}^{1, 2, \dots, p} (z_j - z_i)^{k_i k_j}. \tag{7}$$

Avem, pe baza unei formule bine cunoscute (vezi, de ex., L. V. G o n c i a r o v [3]),

$$V\begin{pmatrix} 1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos mx, \sin mx \\ x_1, x_2, \dots\dots, x_{2m+1} \end{pmatrix} =$$

$$= 2^{-m} \prod_{i<j}^{1, 2, \dots, 2m+1} \left(2 \sin \frac{x_j - x_i}{2}\right) \tag{8}$$

din care rezultă și

$$V\begin{pmatrix} 1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos mx, \sin mx \\ \underbrace{z_1, z_1, \dots, z_1}_{k_1}, \underbrace{z_2, z_2, \dots, z_2}_{k_2}, \dots, \underbrace{z_p, z_p, \dots, z_p}_{k_p} \end{pmatrix} = \tag{9}$$

$$= 2^{-m} \left[\prod_{i=1}^{p} (k_i - 1)!!\right] \prod_{i<j}^{1, 2, \dots, p} \left(2 \sin \frac{z_j - z_i}{2}\right)^{k_i k_j}, \quad (k_1 + k_2 + \dots + k_p = 2m+1).$$

Dacă în cele ce urmează se consideră un determinant (1) cu punctele x_i nu toate distincte, îl vom considera modificat în felul explicat mai sus.

3. Dacă printre punctele x_i, pe care este definit determinantul (1) sau determinantul modificat (3), există unul care are ordinul de multiplicitate k respectiv un ordin de multiplicitate $\leqq k$, vom zice că acest punct se repetă de k, ori respectiv se repetă cel mult de k ori.

D e f i n i ț i a 1. — *Vom zice că funcțiile* (2) *formează un* **sistem de interpolare** *sau un* **sistem** (I) *pe mulțimea E (avînd cel puțin m puncte) dacă avem*

$$V\begin{pmatrix} g_1, g_2, \dots, g_m \\ x_1, x_2, \dots, x_m \end{pmatrix} \neq 0 \tag{10}$$

pentru orice grup de m puncte distincte $x_i \in E$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Proprietatea de a forma un sistem (I) pe E, pentru funcțiile (2), este mai restrictivă decît proprietatea de liniar-independență a lor (pe E). Cu alte cuvinte, orice sistem (I) este format din funcții liniar indepedente dar nu orice sistem de funcții liniar independente formează un sistem (I).

Prezintă de asemenea interes completarea definiției 1 prin

D e f i n i ț i a 2. — *Vom zice că funcțiile* (2) *formează un* **sistem** (I) **regulat de ordin** *k $(1 \leqq k \leqq m)$ pe E dacă avem* (10) *pentru orice grup de m puncte $x_i \in E$, $i = 1, 2, \dots, m$, fiecare repetîndu-se cel mult de k ori.*

Dacă $k = m$, vom zice că funcțiile (2) *formează un* **sistem** (I) **complet regulat** (pe E).

Regularitatea de ordinul k înseamnează deci că determinantul (3) este $\neq 0$ dacă $z_i \in E$, $1 \leqq k_i \leqq k$, $i = 1, 2, \dots, p$, $k_1 + k_2 + \dots + k_p = m$, punctele z_i fiind distincte.

În definiția 2 presupunem totdeauna că dacă $k > 1$, derivatele de ordinul $k-1$ ale funcțiilor (2) sînt continue pe E. În felul acesta regularitatea de ordinul $k > 1$ implică continuitatea pe E a derivatelor de ordinul $k-1$ ale funcțiilor (2). Ipoteza făcută anterior face să evităm orice dificultate. Aceasta este evident o restricție însă, după T. J. S t i e l t j e s [26], ea asigură valabilitatea trecerii la limită de la nr. **2.**

Se poate evident defini determinantul modificat (3), admițînd condiții de derivabilitate mai generale, de unde rezultă de asemenea o noțiune mai generală de regularitate, dar atunci proprietățile de trecere la limită sînt mai complicate. Vom lăsa sistematic la o parte asemenea generalizări.

Mulţimea E poate să fie oarecare. În cele ce urmează mulţimea E va fi, în general, un interval. Atunci noţiunea de derivată este cea cunoscută din analiza elementară.

Este clar că regularitatea de ordinul k implică regularitatea de orice ordin mai mic şi că regularitatea completă implică regularitatea de orice ordin $\leqq m$. În particular, noţiunile de sistem (I), şi de sistem (I) regulat de ordinul 1 sînt echivalente.

În fine, regularitatea de ordinul k este echivalentă cu una din proprietăţile următoare:

1°. Pentru orice grup de m puncte (numărate cu ordinele lor de multiplicitate) $z_i \in E$, respectiv de ordinele k_i de multiplicitate, $i = 1, 2, \ldots, p$, $k_1 + k_2 + \ldots + k_p = m$ şi pentru orice grup de m numere $y_i^{(j)}$, $j = 0, 1, \ldots, k_i - 1$, $i = 1, 2, \ldots, p$, există o combinaţie liniară a funcţiilor (2) şi una singură $\varphi(x)$ pentru care $\varphi^{(j)}(z_i) = y_i^{(j)}$, $j = 0, 1, \ldots, k_i - 1$, $i = 1, 2, \ldots, p$.

Dacă f este o funcţie astfel ca $y_i^{(j)} = f^{(j)}(z_i)$, $j = 0, 1, \ldots, k_i - 1$, $i = 1, 2, \ldots, p$, vom nota această combinaţie liniară şi cu

$$L(f|x) = L(\underbrace{z_1, z_1, \ldots, z_1}_{k_1}, \underbrace{z_2, z_2, \ldots, z_2}_{k_2}, \ldots, \underbrace{z_p, z_p, \ldots, z_p}_{k_p}; f|x). \tag{11}$$

Dacă funcţiile (2) formează un sistem (I) regulat de ordinul k şi dacă $k_i \leqq k$, $i = 1, 2, \ldots, p$, combinaţia liniară (11) este bine determinată (şi unică).

Este clar că dacă f se reduce la o combinaţie liniară a funcţiilor (2) şi dacă condiţia precedentă este verificată, avem $L(f|x) = f$.

2°. O combinaţie liniară a funcţiilor (2) nu se poate anula pe m puncte, dintre care fiecare se repetă cel mult de k ori, fără să fie identic nulă.

Se zice că o funcţie se anulează de k ori pe un punct, dacă această funcţie şi primele sale $k - 1$ derivate sînt nule pe acest punct.

Formula (7) ne arată că funcţiile x^i, $i = 0, 1, \ldots, m - 1$, formează un sistem (I) complet regulat pentru orice număr natural m şi pe o mulţime oarecare E.

De asemenea formula (9) ne arată că funcţiile 1, $\cos ix$, $\sin ix$, $i = 1, 2, \ldots, m$, formează un sistem (I) complet regulat, pentru orice număr natural m şi pe orice interval care nu conţine un subinterval închis de lungime 2π, deci, în particular pe intervalul $[0, 2\pi)$, închis la stînga şi deschis la dreapta.

4. Dacă funcţiile (2) sînt continue, putem găsi rezultate mai complete. Astfel, avem

TEOREMA 1. — *Dacă funcţiile* (2): 1°. *sînt continue pe intervalul E,* 2°. *formează un sistem* (I) *regulat de ordinul k pe E,*

determinantul (1) *nu schimbă de semn, cît timp punctele x_i, dintre care fiecare se repetă cel mult de k ori, nu schimbă ordinea lor de mărime relativă* (de ex., atît timp cît funcţiile g_i rămîn în ordinea indicată de şirul (2) iar punctele x_i rămîn în ordinea crescătoare a indicilor lor, $x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_m$).

În conformitate cu definiţiile precedente, pentru $k > 1$ (dar nu pentru $k = 1$) condiţia 2° a enunţului implică continuitatea funcţiilor (2).

Să presupunem întîi că $k = 1$. Pentru demonstraţie, să presupunem contrariul. Putem găsi atunci punctele

$$x_1' < x_2' < \ldots < x_m', \quad x_1'' < x_2'' < \ldots < x_m'', \tag{12}$$

astfel ca să avem

$$V\begin{pmatrix} g_1, g_2, \ldots, g_m \\ x_1', x_2', \ldots, x_m' \end{pmatrix} > 0, \quad V\begin{pmatrix} g_1, g_2, \ldots, g_m \\ x_1'', x_2'', \ldots, x_m'' \end{pmatrix} < 0. \tag{13}$$

Punctele

$$x_i = \lambda x_i'' + (1 - \lambda) x_i', \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{14}$$

rămîn distincte pentru $0 \leqq \lambda \leqq 1$ şi determinantul (1) este o funcţie de λ perfect determinată şi continuă pe $[0, 1]$.

O proprietate bine cunoscută a funcţiilor continue ne arată că există un λ, $0 < \lambda < 1$ astfel ca determinantul (1), unde punctele x_i sînt date de (14), să fie egal cu zero. Aceasta este în contradicţie cu ipoteza că funcţiile (2) formează un sistem (I).

Să mai observăm că din (12) rezultă că, pentru $0 \leqq \lambda \leqq 1$, punctele (14) verifică de asemenea inegalităţile $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$ rămînînd într-un interval de lungime $\leqq \max(x_m' - x_1', x_m'' - x_1'')$. Dacă în plus $0 < \lambda < 1$ şi $x_1' \neq x_1''$, $x_m' \neq x_m''$, punctele x_i sînt în *interiorul* celui mai mic interval care conţine punctele x_i', x_i''.

Să presupunem acum $k > 1$. Pentru demonstraţie, să presupunem iarăşi contrariul. Putem atunci găsi punctele $u_1 \leqq u_2 \leqq \ldots \leqq u_m$, dintre care fiecare se repetă cel mult de k ori şi punctele $v_1 \leqq v_2 \leqq \ldots \leqq v_m$, dintre care de asemenea fiecare se repetă cel mult de k ori, astfel ca

$$V\begin{pmatrix} g_1, g_2, \ldots, g_m \\ u_1, u_2, \ldots, u_m \end{pmatrix} > 0, \quad V\begin{pmatrix} g_1, g_2, \ldots, g_m \\ v_1, v_2, \ldots, v_m \end{pmatrix} < 0. \tag{15}$$

Putem atunci găsi punctele variabile (12), tinzînd respectiv la punctele u_i şi v_i, astfel ca produsul determinanţilor (13), prin nişte funcţii care rămîn pozitive, să tindă către determinanţii (15) respectivi. Rezultă că şi de data aceasta este posibil să găsim punctele (12) astfel ca să avem (13). Demonstraţia revine deci la aceea a cazului precedent.

Teorema 1 este deci complet demonstrată.

5. Combinaţia liniară (11) se poate scrie

$$L(f|x) = f(x) - \frac{V\begin{pmatrix} g_1, g_2, \ldots, g_m, f \\ x_1, x_2, \ldots, x_m, x \end{pmatrix}}{V\begin{pmatrix} g_1, g_2, \ldots, g_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_m \end{pmatrix}}, \tag{16}$$

unde x_i sînt punctele z_i, cu ordinele lor de multiplicitate, într-o ordine oarecare. Formula (16) are un sens precis dacă x nu coincide cu unul din punctele x_i. În cazul contrar convenim să înlocuim al doilea termen al membrului al doilea prin zero. Această convenţie este necesară pentru a evita confuziile cu definiţia determinantului (1) în cazul cînd punctele x_i nu sînt toate distincte.

Din formula (16) rezultă

$$L(f|x) - L(g|x) = f(x) - g(x) - \frac{V\begin{pmatrix} g_1, g_1, \ldots, g_m, f-g \\ x_1, x_2, \ldots, x_m, x \end{pmatrix}}{V\begin{pmatrix} g_1, g_2, \ldots, g_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_m \end{pmatrix}}.$$

În particular, dacă punctele x_i sînt distincte şi funcţiile (2) sînt continue, deducem inegalitatea

$$|L(f|x) - L(g|x)| \leqq M \max_{i=1,2,\ldots,m} (|f(x_i) - g(x_i)|), \tag{17}$$

unde $M(> 0)$ este maximul, în cel mai mic interval închis care conţine punctele x_i, al funcţiei continue

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{m} \left| V\begin{pmatrix} g_1, g_2, \ldots, g_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+1}, \ldots, x_m, x \end{pmatrix} \right|}{\left| V\begin{pmatrix} g_1, g_2, \ldots, g_m \\ x_1, x_2, \ldots, x_m \end{pmatrix} \right|},$$

unde determinanţii care intervin (la numărător) sînt definiţi de membrul al doilea al formulei (1).

Putem uşor generaliza acest rezultat în cazul cînd punctele x_i nu sînt distincte.

Deducem atunci

TEOREMA 2. — *Dacă*: 1°. *funcţiile* (2) *sînt continue şi formează un sistem* (I) *pe intervalul* E, 2°. *combinaţia liniară* φ *a acestor funcţii se anulează pe* $m - 1$ *puncte distincte* x_i, $i = 1, 2, \ldots, m-1$, *fără să fie identic nulă pe* E,

funcţia φ (este continuă şi) *schimbă de semn trecînd printr-un punct* x_i (care nu coincide cu o extremitate a lui E).

Se presupune, bineînţeles, $m > 1$.

Această proprietate este bine cunoscută. Pentru a fi complet, vom da demonstraţia ei.

Să presupunem că, contrar enunţului, φ nu schimbă de semn trecînd prin punctul x_1, care nu coincide cu unul din extremităţile lui E. Putem atunci găsi punctele x_1', x_1'' astfel ca : 1°. $x_1' < x_1 < x_1''$, 2°. nici unul din punctele x_i, $i = 2, 3, \ldots, m-1$ nu aparţine intervalului închis $[x_1', x_1'']$, 3°. $\varphi(x_1')\varphi(x_1'') > 0$. Să considerăm inegalitatea (17) relativă la punctele $x_1', x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$, la funcţia φ şi la combinaţia liniară φ_1 a funcţiilor

(2) care ia aceleaşi valori ca şi φ pe punctele $x_1', x_2, x_3, \ldots, x_{m-1}$ şi pentru care $\varphi_1(x_1) = -\varepsilon \operatorname{sg} \varphi(x_1'')$, unde ε este un număr pozitiv $< \frac{1}{2M} |\varphi(x_1'')|$. Avem atunci

$$|\varphi_1(x_1'') - \varphi(x_1'')| = |L(\varphi_1|x_1'') - L(\varphi|x_1'')| \leqq M\varepsilon < \frac{|\varphi(x_1'')|}{2}.$$

Rezultă că $\operatorname{sg} \varphi_1(x_1'') = \operatorname{sg} \varphi(x_1'')$.

Se vede acum că φ_1, fără a fi identic nul, se anulează pe punctele $x_2, x_3, \ldots, x_{m-1}$ şi încă cel puţin o dată pe fiecare din intervalele deschise (x_1', x_1), (x_1, x_1''). Aceasta este în contradicţie cu faptul că funcţiile (2) formează un sistem (I).

Teorema 2 este demonstrată.

6. Să presupunem că cele $n + 2$ funcţii

$$f_0, f_1, \ldots, f_n, f_{n+1} \tag{18}$$

sînt definite şi formează un sistem (I) pe E. Se vede uşor că atunci primele $n + 1$ dintre aceste funcţii

$$f_0, f_1, \ldots, f_n, \tag{19}$$

sînt liniar independente pe E.

Zicem [13] că funcţia f este *convexă*, respectiv *concavă în raport cu şirul* (19) *de funcţii, dacă*

$$V\begin{pmatrix} f_0, f_1, \ldots, f_n, f \\ x_1, x_2, \ldots, x_{n+2} \end{pmatrix} > 0 \text{ resp. } < 0, \tag{20}$$

pentru orice sistem $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2}$ *de* $n + 2$ *puncte ale lui* E.

Dacă funcţia f este convexă sau concavă în raport cu şirul (19), termenii şirului împreună cu această funcţie formează un sistem (I) (pe E). Reciproc, dacă funcţiile (18) sînt continue şi formează un sistem (I), funcţia f_{n+1} şi, în general, una oarecare dintre aceste funcţii, este convexă sau concavă în raport cu orice şir format cu celelalte $n + 1$ funcţii.

În cele ce urmează vom presupune că numărul întreg n este $\geqq 0$.

Se poate da un sens definiţiei precedente şi în cazul $n = -1$. Atunci şirul (19) dispare şi convexitatea, respectiv concavitatea funcţiei f revine la pozitivitatea respectiv negativitatea ei pe E.

Noţiunea de convexitate astfel introdusă generalizează aceea de convexitate de ordin superior (de ordinul n) [12], care se obţine în cazul particular

$$f_i = x^i, \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{21}$$

În acest caz funcţia

$$f_{n+1} = x^{n+1} \tag{21'}$$

este convexă în raport cu şirul funcţiilor (21), intervalul E fiind oarecare.

7. Inegalitățile de definiție (20) nu sînt simetrice față de punctele x_i și distincția între convexitate și concavitate depinde de ordinea în care intervin funcțiile (19). Acesta este motivul pentru care în definiție am subliniat faptul că convexitatea și concavitatea sînt în raport cu *șirul* și nu în raport cu *mulțimea* funcțiilor (1).

Observăm că dacă f este convexă respectiv concavă, funcția $-f$ este concavă respectiv convexă. Mulțimea funcțiilor convexe (sau concave) în raport cu șirul (19) rămîne invariabilă sau se schimbă în mulțimea funcțiilor concave (sau convexe) prin o permutare a funcțiilor (19).

Pentru a înlătura aceste asimetrii introducem notația

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f] = V\begin{pmatrix} f_0, & f_1, & \ldots, & f_n, & f \\ x_1, & x_2, & \ldots, & & x_{n+2} \end{pmatrix} : V\begin{pmatrix} f_0, & f_1, & \ldots, & f_n, & f_{n+1} \\ x_1, & x_2, & \ldots, & & x_{n+2} \end{pmatrix}, \tag{22}$$

unde presupunem că funcțiile (18) formează un sistem (I) și că punctele x_i sînt distincte. Atunci expresia (22) are un sens perfect determinat și este simetrică în raport cu punctele x_i. În cazul particular (21), (21′) această expresie se reduce la diferența divizată a funcției f pe nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$. Vom continua să întrebuințăm pentru expresia (22) denumirea de *diferență divizată* și pentru punctele x_i denumirea de *noduri* (ale acestei diferențe divizate sau pe care această diferență divizată este definită). În notația (22) am omis să punem în evidență funcțiile (18) deoarece niciodată nu vom întîlni simultan în considerațiile noastre două sisteme (18) diferite.

Diferențele divizate astfel definite se bucură de niște proprietăți care sînt exprimate prin formulele

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f] = \begin{cases} 0, & i = 0, 1, \ldots, n, \\ 1, & i = n+1, \end{cases} \tag{23}$$

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; \alpha f + \beta g] = \alpha\, [x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f] + \beta\, [x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; g], \tag{24}$$

oricare ar fi funcțiile f, g, constantele α, β și punctele distincte $x_i \in E$, $i = 1, 2, \ldots, n+2$. Formula (24) exprimă proprietatea de liniaritate a diferenței divizate.

8. Cu ajutorul diferențelor divizate, definiția convexității se poate enunța (sub o formă ceva mai precisă) în felul următor:

D e f i n i ț i a 3. — *Funcția f este* **convexă, neconcavă, neconvexă** *resp.* **concavă** *în raport cu funcțiile* (19) *dacă*

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f] > 0, \geqq 0, \leqq 0, \text{ resp. } < 0, \tag{25}$$

punctele $x_i \in E$, $i = 1, 2, \ldots, n+2$ fiind distincte și oarecari.

Se vede că definiția este independentă de ordinea funcțiilor (19) și că distincția între funcțiile convexe și funcțiile concave este precizată de alegerea funcției f_{n+1} care este, *ipso facto*, convexă. Vom vedea mai jos, la studiul restului $R[f]$, că introducerea diferențelor divizate satisface la exigențe care întrec mult simpla dorință a noastră de a restabili simetria anumitor formule considerate mai sus.

Convexitatea (concavitatea) este un caz particular al neconcavității (neconvexității). Însă pentru ceea ce urmează este util să se facă o distincție netă între funcțiile neconcave (neconvexe) în general și între funcțiile numai convexe (concave).

Dacă f este convex respectiv neconcav, $-f$ este concav respectiv neconvex și reciproc.

Combinația liniară cu toți coeficienții pozitivi respectiv toți negativi, a unui număr finit (cel puțin 1) de funcții neconcave este neconcavă, respectiv neconvexă. Dacă una cel puțin dintre funcțiile considerate este convexă, combinația liniară considerată este convexă respectiv concavă.

Limita unui șir convergent (pe E) de funcții neconcave (neconvexe) este o funcție neconcavă (neconvexă).

O funcție f poate să fie în același timp neconcavă și neconvexă. Funcțiile care verifică această proprietate sînt acelea și numai acelea a căror diferență divizată este nulă pe orice grup de $n+2$ puncte ale lui E. Pentru ca această proprietate să fie verificată este necesar și suficient ca f să se reducă la o combinație liniară a funcțiilor (19). Condiția este evident suficientă. Dar ea este și necesară. Într-adevăr, deoarece funcțiile (19) sînt liniar independente, există $n+1$ puncte distincte x_i, $i = 1, 2, \ldots, n+1$,

astfel ca $V\begin{pmatrix} f_0, & f_1, & \ldots, & f_n \\ x_1, & x_2, & \ldots, & x_{n+1} \end{pmatrix} \neq 0$ [20]. Avem $V\begin{pmatrix} f_0, & f_1, & \ldots, & f_n, & f \\ x_1, & x_2, & \ldots, & x_{n+1}, & x \end{pmatrix} = 0$,

pentru $x \in E$, de unde rezultă proprietatea.

Dintre celelalte proprietăți ale funcțiilor convexe semnalăm

TEOREMA 3. — *Dacă*: 1°. *funcțiile* (18) *sînt continue și formează un sistem* (I) *pe intervalul E*, 2°. *funcția f este continuă însă nu este nici convexă și nici concavă pe E*,

se pot găsi $n+2$ puncte distincte $x_i \in E$, $i = 1, 2, \ldots, n+2$, astfel ca să avem $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f] = 0$.

Într-adevăr, dacă funcția nu este nici convexă și nici concavă, atunci ea este sau neconcavă sau neconvexă și atunci proprietatea este evidentă sau se pot găsi două grupe de cîte $n+2$ puncte distincte $x_i' \in E$ și $x_i'' \in E$, $i = 1, 2, \ldots, n+2$, astfel ca diferențele divizate

$$[x_1', x_2', \ldots, x_{n+2}'; f], \quad [x_1'', x_2'', \ldots, x_{n+2}''; f] \tag{26}$$

să fie diferite de zero și de semne contrare. Este destul atunci să aplicăm teorema 1, ținînd seamă de formula de definiție (22) a diferențelor divizate.

Deducem de asemenea proprietatea mai generală exprimată de

TEOREMA 4. — *Dacă*: 1°. *funcțiile* (18) *sînt continue și formează un sistem* (I) *pe intervalul E*, 2°. *funcția f este continuă pe E*, 3°. *C este un număr cuprins între valorile A, B ale diferențelor divizate* (26),

se pot găsi $n+2$ puncte distincte $x_i \in E$, $i = 1, 2, \ldots, n+2$, astfel ca să avem $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f] = C$.

Dacă C coincide cu A sau cu B, ceea ce are în mod necesar loc dacă $A=B$, proprietatea este evidentă. În cazul contrar avem $(A-B)\,(B-C)<0$. Ţinînd seamă de (23), (24) se verifică uşor că funcţia $f-Cf_{n+1}$ nu este nici convexă şi nici concavă. Este suficient apoi să aplicăm teorema 3 acestei din urmă funcţii.

Din observaţiile făcute la demonstraţia teoremei 1, rezultă că dacă $x'_1<x'_2<\ldots<x'_{n+2}$, $x''_1<x''_2<\ldots<x''_{n+2}$, se pot alege punctele x_i, astfel ca să avem $x_1<x_2<\ldots<x_{n+2}$ şi $x_{n+2}-x_1\leqq \max\,(x'_{n+2}-x'_1,\ x''_{n+2}-x''_1)$, iar dacă $(A-C)\,(B-C)<0$ să avem în plus şi $\min\,(x'_1, x''_1)<x_i<$ $<\max\,(x'_{n+1}, x''_{n+2})$, $i=1,2,\ldots,n+2$.

9. Dacă funcţiile (18) formează un sistem (I) regulat de ordinul k, putem lua formula (22) pentru a defini orice diferenţă divizată ale cărei noduri distincte se repetă cel mult de k ori. Pentru a pune în evidenţă multiplicitatea nodurilor vom nota această diferenţă divizată şi cu

$$[\underbrace{z_1, z_1, \ldots, z_1}_{k_1}, \underbrace{z_2, z_2, \ldots, z_2}_{k_2}, \ldots, \underbrace{z_p, z_p, \ldots, z_p}_{k_p}; f], \tag{27}$$

unde nodurile z_i de ordinele de multiplicitate respective k_i, $i=1,2,\ldots,p$, sînt distincte.

Rezultatele de la nr. **2** ne arată că diferenţa divizată (27) este limita diferenţei divizate

$$[x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{k_1}^{(1)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_{k_2}^{(2)}, \ldots, x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \ldots, x_{k_p}^{(p)}; f]$$

pe noduri distincte, dacă $x_j^{(i)}\to z_i$, $j=1,2,\ldots,k_i$, $i=1,2,\ldots,p$.

În particular, presupunînd că funcţiile (18) formează un sistem (I) complet regulat, avem

$$[\xi, \xi, \ldots, \xi; f]=\left[\frac{W(f_0, f_1, \ldots, f_n, f)}{W(f_0, f_1, \ldots, f_n, f_{n+1})}\right]_{x=\xi}. \tag{28}$$

Diferitele proprietăţi ale diferenţelor divizate definite pe noduri distincte se pot extinde la diferenţele divizate pe noduri nu toate distincte, definite în felul arătat mai sus. De exemplu, formulele (23), (24) rămîn evident valabile.

Observăm că dacă funcţiile (18) formează un sistem (I) complet regulat şi dacă funcţiile (19) sînt soluţii (în mod necesar liniar independente) ale ecuaţiei diferenţiale liniare şi omogene de ordinul $n+1$,

$$D[y]=y^{(n+1)}+\varphi_1(x)\,y^{(n)}+\ldots+\varphi_{n+1}(x)\,y=0,$$

avem $W(f_0, f_1, \ldots, f_n, f)=W(f_0, f_1, \ldots, f_n)D[f]$ şi formula (28) devine

$$[\xi, \xi, \ldots, \xi; f]=\left[\frac{D[f]}{D[f_{n+1}]}\right]_{x=\xi}. \tag{29}$$

Diferenţa divizată (27) există, pe baza definiţiei date, numai dacă determinantul V de la numărătorul membrului al doilea al formulei (22) există în sensul de la nr. **2**. În cele ce urmează vom presupune că funcţia f are toate derivatele care intervin, continue. Cu această ipoteză diferenţa divizată (27) există în condiţiile de mai sus.

Se pot defini diferenţe divizate mai generale pe noduri nu toate distincte, prin treceri la limită convenabile. Aceste treceri la limită se pot face prin intermediul limitelor diferenţelor divizate obişnuite (cele corespunzătoare cazului particular (21), (21′)). De fapt, în acest fel procedăm în această lucrare. Se poate proceda şi direct, fără a trece prin cazul particular (21), (21′). Toate aceste chestiuni sînt într-o strînsă legătură cu definiţia şi existenţa derivatelor directe de ordin superior ale unei funcţii.

Pentru a da un exemplu, să observăm că în cazul particular (21), (21′), cîtul (29) se reduce la $\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$ şi acest rezultat este valabil, în virtutea convenţiei noastre, dacă f are o derivată de ordinul $n+1$ *continuă*, cel puţin pe punctul ξ. Dacă însă pentru primul membru al lui (29) (rămînînd în cazul particular (21), (21′)) adoptăm ca definiţie limita diferenţei divizate $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, \xi; f]$ cînd punctele x_i, $i=1,2,\ldots,n+1$ tind către ξ, formula (29) rămîne valabilă, asa cum a arătat T. J. Stieltjes [26], numai sub ipoteza *existenţei* derivatei de ordinul $n+1$ a funcţiei pe punctul ξ (funcţia f este presupusă definită şi mărginită pe E).

În cele ce urmează vom lăsa în mod sistematic la o parte asemenea generalizări.

10. Fie $R[f]$ o funcţională liniară, definită pe un spaţiu vectorial $\mathcal{F}$ format din funcţii f continue pe intervalul E.

Presupunem că funcţiile (18) formează un sistem (I) şi aparţin lui $\mathcal{F}$. În particular deci ele sînt continue pe E.

Dacă funcţionala liniară $R[f]$ se anulează pe funcţiile (19), ea este nulă pe orice combinaţie liniară a acestor funcţii. O astfel de funcţională este, de exemplu,

$$K\,.\,[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+2}; f], \tag{30}$$

unde K este un număr independent de funcţia f iar ξ_i sînt $n+2$ puncte distincte ale intervalului E.

Vom introduce acum

Definiţia 4. — *Vom zice că funcţionala liniară* $R[f]$, *definită pe* $\mathcal{F}$, *este de forma simplă dacă, pentru orice* $f\in\mathcal{F}$, *ea este de forma* (30), *unde* K *este un număr diferit de zero, independent de funcţia* f, *iar* ξ_i *sînt* $n+2$ *puncte distincte ale lui* E (care pot depinde în general de funcţia f).

Avem atunci

TEOREMA 5. — *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca funcţionala liniară* $R[f]$ *să fie de forma simplă, este ca să avem* $R[f]\neq 0$ *pentru orice funcţie* $f\,(\in\mathcal{F})$ *convexă în raport cu funcţiile* (19).

Condiţia este necesară. Într-adevăr, dacă $R[f]$ este de forma simplă, din (23) rezultă întîi că $R[f_{n+1}] = K \neq 0$. Din formula

$$R[f] = R[f_{n+1}][\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+2}; f] \tag{31}$$

rezultă apoi că $R[f] \neq 0$ dacă f este convex.

Condiţia este suficientă. Dacă avem $R[f] \neq 0$ pentru orice funcţie convexă, aceeaşi proprietate este adevărată şi pentru orice funcţie concavă. Într-adevăr, dacă f este concav, funcţia $-f$ este convexă şi avem

$$R[f] = -R[-f] \neq 0.$$

Fie $f \in \mathcal{F}$ şi să considerăm funcţia auxiliară

$$\varphi = R[f] \cdot f_{n+1} - R[f_{n+1}] \cdot f \tag{32}$$

Avem $\varphi \in \mathcal{F}$ şi $R[\varphi] = 0$. Rezultă că φ nu este nici convex şi nici concav. În virtutea teoremei 3 se pot găsi $n+2$ puncte distincte ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n+2$, astfel ca să avem $[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+2}; \varphi] = 0$. Ţinînd seama de (23), (24), din (32) se deduce formula (31).

Teorema 5 este deci demonstrată.

Dacă $R[f]$ este de forma simplă, el se anulează pe funcţiile (19). Se poate deduce această proprietate direct din faptul că $R[f] \neq 0$ pentru orice funcţie convexă sau concavă. Pentru a demonstra proprietatea, să presupunem contrariul, deci că $R[f_i] \neq 0$ pentru un i, $0 \leq i \leq n$. Dacă punem $f = f_i$ în (32), obţinem o funcţie φ care este convexă sau concavă. Egalitatea $R[\varphi] = 0$ este atunci în contradicţie cu ipoteza.

O demonstraţie analoagă ne arată că dacă $R[f] \neq 0$ pentru orice funcţie convexă, avem mai exact $R[f_{n+1}]R[f] > 0$ pentru aceste funcţii. Cu alte cuvinte $R[f]$ îşi păstrează semnul, care este semnul lui $R[f_{n+1}]$, pentru orice funcţie convexă, deci păstrează semnul contrar pentru orice funcţie concavă.

La fel se vede că dacă $R[f]$ este de forma simplă, avem $R[f_{n+1}]\, R[f] \geq 0$ pentru orice funcţie f neconcavă şi avem inegalitatea contrară pentru orice funcţie neconvexă.

§ 2.

11. Restul $R[f]$, în cazul cînd este de formă simplă, se exprimă, prin formula (31), cu o diferenţă divizată. Structura restului depinde deci de structura diferenţei divizate (22). Structura acestei diferenţe divizate este precizată de o importantă teoremă de medie datorită lui D. V. Widder [28]. Această teoremă are loc sub o ipoteză suplimentară făcută asupra funcţiilor (19), ipoteză pe care o vom semnala mai jos.

Vom regăsi rezultatele lui D. V. Widder pe o cale diferită. Rezultatele noastre, care sînt suficiente pentru studiul restului, sînt puţin mai generale, dar nu permit să se regăsească decît o parte din rezultatele lui D. V. Widder, în cazul particular examinat de acest autor.

Ipoteza suplimentară despre care am vorbit mai sus constă în aceea că *funcţiile* (19) *formează un sistem* (I). Aceasta nu este o consecinţă a faptului că funcţiile (18) formează un sistem (I) (a se vedea, de ex., exemplul dat la nr. **16**). Pentru a evita orice dificultate, vom presupune în cele ce urmează că funcţiile (18) sînt continue.

12. Vom utiliza formula următoare

$$\begin{aligned} &V\begin{pmatrix} f_0, f_1, \ldots, f_n \\ x_2, x_3, \ldots, x_{n+2} \end{pmatrix} V\begin{pmatrix} f_0, f_1, \ldots, f_n, f \\ x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{n+3} \end{pmatrix} = \\ &= V\begin{pmatrix} f_0, f_1, \ldots, f_n \\ x_2, x_3, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{n+3} \end{pmatrix} V\begin{pmatrix} f_0, f_1, \ldots, f_n, f \\ x_1, x_2, \ldots, x_{n+2} \end{pmatrix} + \\ &+ V\begin{pmatrix} f_0, f_1, \ldots, f_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{n+2} \end{pmatrix} V\begin{pmatrix} f_0, f_1, \ldots, f_n, f \\ x_2, x_3, \ldots, x_{n+3} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{33}$$

Pentru a demonstra această formulă, să considerăm determinantul de ordinul $2n+3$

$$|a_{r,s}| \quad r, s = 1, 2, \ldots, 2n+3, \tag{34}$$

unde $a_{r,s}$ este elementul din linia a r-a şi coloana a s-a şi unde

$$a_{s,s} = \begin{cases} f_{s-1}(x_r), & r = 1, 2, \ldots, n+3 \\ 0, & r = n+4, n+5, \ldots, 2n+3 \end{cases} \Bigg\} \; s = 1, 2, \ldots, n+2,$$

$$\qquad\; \begin{cases} f_{s-n-3}(x_r), & r = 1, i, n+3, \\ 0, & r = 2, 3, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n+2 \end{cases}$$

$$a_{r,r} = \begin{cases} f_{s-n-3}(x_{r-n-2}), & r = n+4, n+5, \ldots, n+i+1, \\ f_{s-n-3}(x_{r-n-1}), & r = n+i+2, n+i+3, \ldots, 2n+3, \end{cases}$$

$$s = n+3, n+4, \ldots, 2n+3.$$

Acest determinant este egal cu zero. Pentru a vedea acest lucru este destul de a-l transforma, adunînd întîi linia a $(n+2+j)$-a la a j-a pentru $j = 2, 3, \ldots, i-1$ şi linia a $(n+1+j)$-a la a j-a pentru $j = i+1, i+2, \ldots, n+2$ şi pe urmă scăzînd coloana a s-a din a $(n+2+s)$-a pentru $s = 1, 2, \ldots, n+1$. În felul acesta toate elementele situate în ultimele $n+1$ coloane şi primele $n+3$ linii devin nule.

Dacă dezvoltăm determinantul (34) după formula lui Laplace după primele $n+2$ coloane, obţinem formula (33).

Formula (33) este valabilă pentru $2 \leq i \leq n+2$. Este uşor de văzut cum o putem scrie pentru $i = 2$ şi pentru $i = n+2$.

Dacă punctele x_i, $i = 1, 2, \ldots, n+3$ sînt distincte, ţinînd seamă de (2), din formula (33) deducem

$$\begin{aligned} &[x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{n+3}; f] = \\ &= A\,[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f] + B\,[x_2, x_3, \ldots, x_{n+3}; f] \end{aligned} \tag{35}$$

unde, ţinînd seamă de faptul că funcţiile (19) formează un sistem (I), avem

$$A = \frac{V\begin{pmatrix} f_0, f_1, \ldots, f_n \\ x_2, x_3, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{n+3}\end{pmatrix} V\begin{pmatrix} f_0, f_1, \ldots, f_n, f_{n+1} \\ x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}\end{pmatrix}}{V\begin{pmatrix} f_0, f_1, \ldots, f_n \\ x_2, x_3, \ldots, x_{n+2}\end{pmatrix} V\begin{pmatrix} f_0, f_1, \ldots, f_n, f_{n+1} \\ x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{n+3}\end{pmatrix}} \tag{36}$$

$$B = \frac{V\begin{pmatrix} f_0, f_1, \ldots, f_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{n+2}\end{pmatrix} V\begin{pmatrix} f_0, f_1, \ldots, f_n, f_{n+1} \\ x_2, x_3, \ldots, x_{n+3}\end{pmatrix}}{V\begin{pmatrix} f_0, f_1, \ldots, f_n \\ x_2, x_3, \ldots, x_{n+2}\end{pmatrix} V\begin{pmatrix} f_0, f_1, \ldots, f_n, f_{n+1} \\ x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{n+3}\end{pmatrix}}. \tag{37}$$

Dacă în (35) punem $f = f_{n+1}$, găsim $A + B = 1$. Dar dacă $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+3}$ $(1 < i < n + 3)$, teorema 1 ne arată că coeficienţii A, B, care sînt independenţi de funcţia f, sînt pozitivi. Rezultă că dacă $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+3}$ $(1 < i < n + 3)$, diferenţa divizată $[x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{n+3}; f]$ este o medie aritmetică generalizată (cu ponderi pozitive) a diferenţelor divizate $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f]$, $[x_2, x_3, \ldots, x_{n+3}; f]$.

În particular, în cazul (21), (21′) regăsim formula mediei diferenţelor divizate obişnuite

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{n+3}; f] =$$
$$= \frac{(x_i - x_1)[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f] + (x_{n+3} - x_i)[x_2, x_3, \ldots, x_{n+3}; f]}{x_{n+3} - x_1}.$$

13. Din formula (35) a mediei deducem proprietatea mai generală exprimată de

TEOREMA 6. – *Dacă* $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$ *sînt* $m \geqq n + 2$ *puncte ale lui* E, *diferenţa divizată* $[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n+2}}; f]$ $(1 = i_1 < i_2 < \ldots < i_{n+2} = m)$ *pe* $n + 2$ *dintre aceste puncte este o medie aritmetică generalizată* (cu ponderi pozitive convenabile) *a diferenţelor divizate*

$$[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n+1}; f], \quad i = 1, 2, \ldots, m - n - 1 \tag{38}$$

pe cîte $n + 2$ *puncte consecutive din şirul punctelor* x_i.

Avem deci

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n+2}}; f] = \sum_{i=1}^{m-n-1} A_i [x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n+1}; f], \tag{39}$$

coeficienţii A_i fiind pozitivi, independenţi de funcţia f şi de sumă egală cu 1.

Demonstraţia nu prezintă nici o dificultate. Ea se poate face exact ca şi în cazul particular (21), (21′) [14], prin inducţie completă asupra numărului m al punctelor x_i. Pozitivitatea coeficienţilor este o consecinţă

a acestei demonstraţii dacă $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$ (şi a faptului că $i_1 = 1$, $i_{n+2} = m$).

Pe lîngă ipotezele teoremei 6 se deduc şi inegalităţile

$$\min_{i=1,2,\ldots,m-n-1} ([x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n+1}; f]) \leqq [x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n+2}}; f] \leqq$$
$$\leqq \max_{i=1,2,\ldots,m-n-1} ([x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n+1}; f]). \tag{40}$$

Egalităţile nu pot avea loc decît în acelaşi timp şi anume dacă şi numai dacă diferenţele divizate (38) au o aceeaşi valoare C, deci dacă şi numai dacă pentru funcţia $f - Cf_{n+1}$, aceste diferenţe divizate sînt toate nule. Ştim că pentru aceasta este necesar şi suficient ca funcţia f să depindă liniar de funcţiile f_i, $i = 0, 1, \ldots, n + 1$ pe punctele x_i, $i = 1, 2, \ldots, m$.

14. Rezultatele precedente permit să demonstrăm, sub aceleaşi ipoteze,

TEOREMA 7. – *Dacă funcţia* f *este continuă pe intervalul* E *şi dacă* x_i, $i = 1, 2, \ldots, n + 2$ *sînt* $n + 2$ *puncte distincte ale lui* E, *putem găsi, în interiorul celui mai mic interval care conţine punctele* x_i, *un punct* ξ *astfel că în orice vecinătate a acestui punct există* $n + 2$ *puncte distincte* $x'_i \in E$, $i = 1, 2, \ldots, n + 2$ *pentru care avem egalitatea*

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f] = [x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n+2}; f]. \tag{41}$$

Vom demonstra întîi că în (41) putem alege punctele x'_i în interiorul celui mai mic interval care conţine punctele x_i şi într-un interval de lungime mai mică decît un număr pozitiv ε dat oarecare.

Putem de la început să presupunem că $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2}$ $(n \geqq 0)$. Împărţim fiecare din intervalele $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 1, 2, \ldots, n + 1$ în m părţi egale, m fiind un număr natural > 2 şi care verifică inegalitatea

$$m > \frac{n+1}{\varepsilon} \max_{j=1,2,\ldots,n+1} (x_{j+1} - x_j). \tag{42}$$

Fie $y_1 < y_2 < \ldots < y_{(n+1)m+1}$ toate punctele de diviziune astfel obţinute. Avem deci $x_i = y_{(i-1)m+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n + 2$ şi, ţinînd seamă de (42),

$$y_{i+n+1} - y_i \leqq \frac{n+1}{m} \max_{j=1,2,\ldots,n+1} (x_{j+1} - x_j) < \varepsilon \tag{43}$$

$$i = 1, 2, \ldots, (n + 1)m - n.$$

Fie $[y_r, y_{r+1}, \ldots, y_{r+n+1}; f]$ una din cele mai mici şi $[y_s, y_{s+1}, \ldots, y_{s+n+1}; f]$ una din cele mai mari dintre diferenţele divizate $[y_i, y_{i+1}, \ldots, y_{i+n+1}; f]$, $i = 1, 2, \ldots, (n + 1)m - n$. Formula (40) ne dă

$$[y_r, y_{r+1}, \ldots, y_{r+n+1}; f] \leqq [x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f] \leqq$$
$$\leqq [y_s, y_{s+1}, \ldots, y_{s+n+1}; f]. \tag{44}$$

Vom distinge două cazuri :

Cazul 1. Egalitățile nu au loc în (44). Atunci pe baza teoremei 4, pentru

$$A = [y_r, y_{r+1}, \dots, y_{r+n+1}; f] \quad B = [y_s, y_{s+1}, \dots, y_{s+n+1}; f],$$
$$C = [x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f]$$

proprietatea rezultă dacă ținem seama de observația făcută cu ocazia demonstrării teoremei 1 și ținînd seamă de (43). Ipotezele teoremei 1 sînt aici satisfăcute.

Cazul 2. Inegalitățile (44) devin ambele niște egalități. Avem atunci $[x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f] = [y_2, y_3, \dots, y_{n+3}; f]$, unde $x_1 < y_2 < y_{n+3} < x_{n+2}$ și proprietatea rezultă încă din (43).

Se demonstrează acum ușor existența punctului ξ. Raționamentul precedent ne arată că se pot găsi șirurile de $n+2$ puncte $x_1^{(j)} < x_2^{(j)} < \dots < x_{n+2}^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots$ astfel că, presupunînd $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+2}$, să avem

$$[x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f] = [x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_{n+2}^{(j)}; f],$$
$$j = 0, 1, \dots; x_i^{(0)} = x_i; i = 1, 2, \dots, n+2$$

și

$$x_1^{(j)} < x_1^{(j+1)}, \; x_{n+2}^{(j+1)} < x_{n+2}^{(j)}, \; x_{n+2}^{(j+1)} - x_1^{(j+1)} \leqq \frac{1}{2}(x_{n+2}^{(j)} - x_1^{(j)}), \; j = 0, 1, \dots$$

Punctul comun ξ al intervalelor închise $[x_1^{(j)}, x_{n+2}^{(j)}]$, $j = 1, 2, \dots$ verifică proprietatea căutată.

Se vede că punctul ξ se bucură și de proprietatea că se pot totdeauna găsi punctele x_i' astfel ca ξ să fie în interiorul celui mai mic interval care conține aceste puncte (zicem că ξ *separă* punctele x_i').

Proprietatea exprimată de teorema 7, cel puțin în cazul particular (21), (21'), se datorește lui A. C a u c h y [2].

15. Putem completa teorema 7, observînd că *putem totdeauna alege punctele x_i' astfel ca ele să fie echidistante.* Aplicînd proprietatea funcției $f - [x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f]\, f_{n+1}$, se vede că este suficient să demonstrăm că dacă avem

$$[x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; f] = 0, \quad x_1 < x_2 < \dots < x_{n+2}, \tag{45}$$

putem găsi $n+2$ puncte echidistante x_i', $i = 1, 2, \dots, n+2$, cuprinse în intervalul închis $[x_1, x_{n+2}]$ astfel ca să avem (41).

Vom distinge două cazuri :

Cazul 1. Printre diferențele divizate pe noduri echidistante și cuprinse în $[x_1, x_{n+2}]$, există cel puțin una care este pozitivă și cel puțin una care este negativă. În acest caz proprietatea rezultă deoarece prin procedeul întrebuințat la demonstrarea teoremei 1, se poate construi o diferență divizată pe noduri echidistante și care să fie nulă.

Cazul 2. Toate diferențele divizate pe noduri echidistante și cuprinse în $[x_1, x_{n+2}]$ sînt de același semn. Vom arăta că atunci funcția f, presupusă

continuă, este neconcavă sau neconvexă pe $[x_1, x_{n+2}]$. Pentru fixarea ideilor, să presupunem că diferențele divizate pe noduri echidistante sînt toate $\geqq 0$ (sau toate $\leqq 0$). Din teorema 6 rezultă că toate diferențele divizate pe noduri care se divid rațional (rapoartele mutuale ale distanțelor dintre noduri sînt raționale) sînt $\geqq 0$ (sau $\leqq 0$). Din continuitatea funcției f rezultă atunci că *toate* diferențele divizate sînt $\geqq 0$ (sau $\leqq 0$). Funcția f este deci neconcavă (sau neconvexă) pe $[x_1, x_{n+2}]$.

Proprietatea căutată rezultă atunci din

L e m a 1. — *Dacă funcția continuă f este neconcavă pe intervalul $[x_1, x_{n+2}]$ și dacă avem (45), toate diferențele divizate ale funcției pe noduri aparținînd lui $[x_1, x_{n+2}]$, sînt nule.*

Pentru demonstrare să presupunem că proprietatea nu este adevărată. Există atunci puncte distincte x_i' astfel ca $[x_1', x_2', \dots, x_{n+2}'; f] > 0$. Reunirea mulțimilor de puncte x_i, x_i', $i = 1, 2, \dots, m+2$ formează un șir de cel puțin $n+3$ și cel mult $2n+4$ puncte distincte ale intervalului $[x_1, x_{n+2}]$. Aplicînd teorema 6, împreună cu consecințele ei relative la cazurile cînd egalitatea are loc în (40), succesiv șirurilor parțiale $x_1', x_2', \dots, x_{n+2}'$; $x_1, x_2, \dots, x_{n+2}$, se ajunge la o contradicție cu (45).

În fine, dacă ținem seamă de rezultatele lui D. V. W i d d e r [28], putem afirma că egalitatea (41) poate fi realizată cu noduri x_i' echidistante, distanța δ a două noduri consecutive fiind suficient de mică. În cazul cînd intervalul $E \supset [x_1, x_{n+2}]$, teorema de medie a lui D. V. W i d d e r afirmă că se poate realiza rezultatul precedent cu noduri x_i' echidistante pentru care distanța δ este mai mică decît un număr fix independent de funcția f.

16. Înainte de a merge mai departe să observăm că teorema 7 poate să nu aibă loc dacă funcțiile (19) nu formează un sistem (I).

Să considerăm funcțiile $f_i = x^{i+1}$ $i = 0, 1, \dots, n$ pe un interval E care conține punctul 0. Aceste funcții nu formează un sistem (I). Funcția $f_{n+1} = 1$ este convexă sau concavă (convexă dacă n este impar și concavă dacă n este par), în sensul definiției nesimetrice a convexității. Avem $[x_1, x_2, \dots, x_{n+2}; x^{n+2}] = (-1)^{n+2} x_1 x_2, \dots, x_{n+2}$. Dacă deci pentru funcția continuă x^{n+2} avem egalitatea (41), unde unul dintre punctele x_i coincide cu 0, unul din punctele x_i' va coincide în mod necesar cu 0. Rezultă ușor că teorema 7 nu se aplică.

17. Rezultatele acestui § se pot extinde și la cazul cînd nodurile nu sînt distincte.

Să presupunem că nu numai funcțiile (18) dar și funcțiile (19) formează un sistem (I) regulat de ordinul k.

Teorema 6 se poate extinde la cazul cînd punctele $x_1 \leqq x_2 \leqq \dots \leqq x_m$ $(m \geqq n+2)$ nu sînt toate distincte și același punct se repetă cel mult de k ori. Pentru cele ce urmează va fi destul să ne ocupăm de extensiunea formulei (35) și vom arăta că *această formulă rămîne valabilă dacă*

$x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_{n+3}$, *acelaşi punct repetîndu-se cel mult de k ori*. Mai mult încă, coeficienţii respectivi A, B, de sumă egală cu 1, rămîn independenţi de funcţia f şi *sînt pozitivi dacă* $x_1 < x_i < x_{n+3}$ (ceea ce implică $1 < i < n+3$).

Formula căutată se scrie

$$[\underbrace{z_1, z_1, \ldots, z_1}_{k'_1}, \underbrace{z_2, z_2, \ldots, z_2}_{k'_2}, \ldots, \underbrace{z_p, z_p, \ldots, z_p}_{k'_p}; f] =$$

$$= A^* [\underbrace{z_1, z_1, \ldots, z_1}_{k''_1}, \underbrace{z_2, z_2, \ldots, z_2}_{k''_2}, \ldots, \underbrace{z_p, z_p, \ldots, z_p}_{k''_p}; f] +$$

$$+ B^* [\underbrace{z_1, z_1, \ldots, z_1}_{k'''_1}, \underbrace{z_2, z_2, \ldots, z_2}_{k'''_2}, \ldots, \underbrace{z_p, z_p, \ldots, z_p}_{k'''_p}; f],$$

unde putem presupune $p \geqq 3$ şi avem $k'_r = k''_r = k'''_r = k_r$, $r = 2, 3, \ldots$ $j-1$, $j+1, \ldots, p-1$, $2 \leqq j \leqq p-1$ (dacă $p > 3$), $k'_1 = k''_1 = k_1$, $k''_j = k'''_j = k_j$, $k'_p = k'''_p = k_p$, $k'''_1 = k_1 - 1$, $k'_j = k_j - 1$, $k''_p = k_p - 1$; $1 \leqq k_r \leqq k$, $r = 1, 2, \ldots, p$, $k_1 + k_2 + \ldots + k_p = n + 3$.

Această formulă se obţine din formulele (35) — (37), presupunînd $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+3}$ şi făcînd

$$x_{k_1 + k_2 + \ldots + k_{r-1} + s} = x_s^{(r)} \to z_r, \quad s = 1, 2, \ldots, k_r \ (k_0 = 0), \tag{47}$$

$$r = 1, 2, \ldots, p,$$

$$z_1 < z_2 < \ldots < z_p, \quad i = k_1 + k_2 + \ldots + k_j.$$

Se vede uşor cum trebuie modificată formula dacă $k_1 = 1$, $k_j = 1$ sau $k_p = 1$.

Rezultă imediat că A^*, B^* sînt independenţi de funcţia f şi că $A^* \geqq 0$, $B^* \geqq 0$, $A^* + B^* = 1$. Rămîne să se demonstreze că $A^* \neq 0$, $B^* \neq 0$. Pentru coeficientul A^* acest lucru rezultă observînd că, cu ajutorul notaţiilor (47), el se obţine din membrul al doilea al formulei (36) împărţind cei 4 determinanţi (1) care figurează la numărător şi la numitor prin expresia (5) ($m = n + 3$) multiplicată respectiv cu

$$\frac{V(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{k_1-1}^{(1)})}{V(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{k_1}^{(1)})} \cdot \frac{V(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \ldots, x_{k_j-1}^{(j)})}{V(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \ldots, x_{k_j}^{(j)})}, \quad \frac{V(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \ldots, x_{k_p-1}^{(p)})}{V(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \ldots, x_{k_p}^{(p)})}$$

$$\frac{V(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{k_1-1}^{(1)})}{V(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{k_1}^{(1)})} \cdot \frac{V(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \ldots, x_{k_p-1}^{(p)})}{V(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \ldots, x_{k_p}^{(p)})}, \quad \frac{V(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \ldots, x_{k_j-1}^{(j)})}{V(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \ldots, x_{k_j}^{(j)})}$$

şi trecînd la limită. Mai sus determinanţii lui Vandermonde care nu au sens (pentru $k_1 = 1$, $k_j = 1$ sau $k_p = 1$) sînt înlocuiţi cu 1. Dacă se efectuează aceste împărţiri, pe de o parte nu se schimbă valoarea coeficientului A şi, pe de altă parte, fiecare dintre determinanţii (1) astfel împărţiţi tinde către o limită bine determinată şi diferită de zero. Rezultă că $A^* \neq 0$. Se demonstrează în acelaşi fel că $B^* \neq 0$. Demonstraţia ne mai arată că coeficienţii A^*, B^* ai formulei (46) sînt bine determinaţi prin condiţia ca să fie independenţi de funcţia f. Este uşor a se scrie valorile acestor coeficienţi cu ajutorul determinanţilor (3).

18. Putem extinde teorema 7 la cazul cînd punctele x_i nu sînt toate distincte. Într-adevăr, presupunînd pe mai departe că funcţiile (18) şi (19) sînt continue şi formează cîte un sistem (I) regulat de ordinul k, *teorema 7 rămîne adevărată dacă printre punctele x_i acelaşi punct se repetă cel mult de k ori*.

Pentru a demonstra această proprietate, în virtutea chiar a teoremei 7, este suficient să demonstrăm

L e m a 2. — *Dacă, pe lîngă ipotezele precedente, printre punctele x_i există exact p puncte distincte, cu $2 \leqq p \leqq n+1$,*

se pot găsi $n+2$ puncte x'_i, $i = 1, 2, \ldots, n+2$, astfel ca: 1°. fiecare se repetă cel mult de k ori, 2°. există printre ele cel puţin $p+1$ distincte, 3°. sînt cuprinse toate în cel mai mic interval închis care conţine punctele x_i, 4°. egalitatea (41) este verificată.

Pentru simplificarea limbajului vom zice că o diferenţă divizată ale cărei noduri, aranjate în ordinea lor crescătoare, au succesiv ordinele de multiplicitate $k_1, k_2, \ldots, k_p$ ($k_1 + k_2 + \ldots k_p = n+2$), este de tipul $(k_1, k_2, \ldots, k_p)$. Condiţiile 1°, 2° ale lemei înseamnează că diferenţa divizată pe nodurile x_i fiind de tipul $(k_1, k_2, \ldots, k_p)$, cu $1 \leqq k_i \leqq k$, $i = 1, 2, \ldots, p$, $2 \leqq p \leqq n+1$, se pot găsi punctele x'_i astfel ca diferenţa divizată pe aceste puncte să fie de tipul $(k'_1, k'_2, \ldots, k'_q)$, cu $1 \leqq k'_i \leqq k$, $i = 1, 2, \ldots, q$, $q \geqq p+1$.

Să considerăm deci diferenţa divizată pe nodurile x_i şi fie $(k_1, k_2, \ldots, k_p)$ tipul, iar C valoarea acestei diferenţe divizate. Să intercalăm între primele două noduri distincte un al $(n+3)$-lea nod, diferit de toate celelalte. Să aplicăm formula mediei (46) şirului de $n+3$ puncte astfel obţinute, noul nod fiind acela care este eliminat în diferenţa divizată din membrul întîi. În membrul al doilea figurează diferenţele divizate

$$[u_1, u_2, \ldots, u_{n+2}; f], \quad [v_1, v_2, \ldots, v_{n+2}; f], \tag{48}$$

$$u_1 \leqq u_2 \leqq \ldots \leqq u_{n+2}, \ v_1 \leqq v_2 \leqq \ldots \leqq v_{n+2}, \ u_1 < u_{n+2}, \ v_1 < v_{n+2},$$

care sînt respectiv de tipul $(k_1, 1, k_2, k_3, \ldots, k_{p-1}, k_p - 1)$ şi $(k_1 - 1, 1, k_2, k_3, \ldots, k_p)$, unde trebuie suprimat $k_1 - 1$ dacă $k_1 = 1$, şi $k_p - 1$ dacă $k_p = 1$.

Trebuie acum să distingem trei cazuri:

Cazul 1. Diferenţele divizate (48) au valori diferite. Atunci una are o valoare $A < C$ şi cealaltă o valoare $B > C$. Ţinînd seamă de felul cum o diferenţă divizată (27) se obţine ca limită de diferenţe divizate pe noduri distincte, rezultă că putem găsi diferenţele divizate

$$[u'_1, u'_2, \ldots, u'_{n+2}; f], \quad [v'_1, v'_2, \ldots, v'_{n+2}; f] \tag{49}$$

pe noduri distincte şi ale căror valori sînt numerele A', B' respectiv oricît de aproape de numerele A, B, deci în particular, astfel ca $A' < C < B'$.

Se poate uşor constata că putem chiar lua nodurile primei diferenţe divizate (49) în intervalul (u_1, u_{n+2}) şi nodurile celei de a doua diferenţe divizate în intervalul (v_1, v_{n+2}). Aplicînd teorema 4 diferenţelor divizate (49), putem găsi o diferenţă divizată avînd valoarea C. Se vede că condiţiile 2°, 4° ale lemei sînt verificate.

Cazul 2. Avem $k_1 + k_p > 2$ şi cele două diferenţe divizate (48) sînt egale. Atunci ambele sînt egale cu C şi sau prima (dacă $k_p > 1$) sau a doua (dacă $k_1 > 1$) verifică condiţiile 2° şi 4° ale lemei.

Cazul 3. Avem $k_1 = k_p = 1$ şi cele două diferenţe divizate (48) sînt egale cu C. Avem atunci o diferenţă divizată egală cu C şi de tipul $(1, 1, k_2, k_3, \ldots, k_{p-1})$. Cu această diferenţă divizată se procedează în mod analog. Se vede atunci că dacă $k_{p-1} > 1$, cădem peste cazul *1* sau *2* iar dacă $k_{p-1} = 1$ se construieşte o diferenţă divizată egală cu C şi de tipul $(1, 1, 1, k_2, k_3, \ldots, k_{p-2})$. Deoarece cel puţin un k_i este > 1, după un număr finit de operaţii de acest fel se cade asupra cazului *1* sau *2*.

Astfel condiţiile 2° şi 4° ale lemei sînt realizate. Să observăm că în timpul demonstraţiei, pe de o parte nu se întrece niciodată ordinul k de multiplicitate şi, pe de altă parte, nu se iese niciodată din cel mai mic interval care conţine punctele x_i. Deci şi condiţiile 1° şi 3° ale lemei sînt verificate.

Lema 2 este deci demonstrată.

Din cele ce preced rezultă şi

TEOREMA 8. — *Dacă funcţiile* (18) *şi funcţiile* (19) *sînt continue şi formează sisteme* (I) *regulate de ordinul k pe intervalul E şi dacă funcţia f este continuă şi convexă, neconcavă, neconvexă resp. concavă în raport cu funcţiile* (19),

prima, a doua, a treia respectiv a patra inegalitate (25) *rămîne adevărată dacă nodurile x_i nu sînt toate confundate şi fiecare se repetă cel mult de k ori.*

De altfel pentru funcţiile neconcave şi pentru funcţiile neconvexe, proprietatea rezultă simplu prin o trecere la limită şi rămîne adevărată dacă funcţiile (18) şi (19) formează sisteme (I) complet regulate, chiar dacă punctele x_i sînt toate confundate.

Teorema 8 rezultă din extensiunea teoremei 7 dată în acest număr.

19. Teorema 7, extinsă în felul de mai sus, permite să se lege structura unei funcţionale liniare de forma simplă de proprietăţile diferenţiale ale funcţiilor pe care ea este definită. Astfel avem

TEOREMA 9. — *Dacă*: 1°. *funcţiile* (18) *şi* (19) *formează sisteme* (I) *complet regulate pe intervalul E,* 2°. *funcţionala liniară $R[f]$ este de forma simplă,* 3°, *funcţia $f \in \mathcal{F}$ are o derivată continuă de ordinul $n+1$ pe interiorul lui E,*

se poate găsi, în interiorul lui E, un punct ξ astfel ca să avem

$$F[f] = R[f_{n+1}]\,[\xi, \xi, \ldots, \xi; f]. \tag{50}$$

Demonstraţia rezultă imediat din teorema 7 şi din proprietăţile limită ale diferenţelor divizate cu noduri multiple. Punctul ξ este unul din acelea care verifică teorema 7.

Diferenţa divizată din membrul al doilea a lui (50) se poate calcula cu ajutorul formulei (28) sau cu acela al formulei (29).

Nu avem intenţia de a aprofunda mai mult aceste chestiuni în această lucrare. Reamintim numai că, în cazul particular (21), (21'), am dat o generalizare teoremei 7 [18] care permite să se precizeze încă mai mult legătura dintre proprietăţile restului $R[f]$ şi proprietăţile diferenţiale de diferite ordine ale funcţiei f.

§ 3.

20. În acest § vom examina cîteva criterii care permit să se decidă dacă o funcţională liniară $R[f]$ este sau nu de forma simplă. Vom face apoi aplicaţii la restul cîtorva formule de aproximare (*).

Combinaţia liniară (11) poate să fie întrebuinţată pentru a găsi o formulă de aproximare de forma (*).

Fie $A[f]$ o funcţională liniară definită pe spaţiul vectorial $\mathcal{F}$ format din funcţii continue definite pe intervalul E şi care au derivate continue pe E de toate ordinele care intervin. Vom presupune că funcţiile (18) şi (19) aparţin lui $\mathcal{F}$ şi, pentru a simplifica lucrurile, că ele formează sisteme (I) complet regulate. De altfel pentru valabilitatea cîtorva din rezultatele care urmează, o regularitate de un ordin mai mic decît $n+2$ resp. $n+1$ este în general suficientă.

Vom lua ca aproximare pentru $A[f]$ funcţionala definită şi liniară pe $\mathcal{F}$,

$$B[f] = A[L(f\,|\,x)], \tag{51}$$

unde $L(f\,|\,x)$ este dat de (11), relativ la funcţiile (19).

Acest procedeu de aproximare este bine cunoscut şi a fost mult studiat, mai cu seamă în diferite cazuri particulare.

Avem

$$L(f\,|\,x) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=0}^{k_i-1} \varphi_{i,j}(x) f^{(j)}(z_i), \quad (f^{(0)}(x) = f(x), \quad (k_1 + k_2 + \ldots + k_p = n+1),$$

punctele z_i, $i = 1, 2, \ldots, p$ fiind distincte şi $\varphi_{i,j}$, $j = 0, 1, \ldots, k_i - 1$, $i = 1, 2, \ldots, p$ fiind combinaţii liniare bine determinate ale funcţiilor (19). Avem atunci

$$B[f] = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=0}^{k_i-1} a_{i,j} f^{(j)}(z_i), \tag{52}$$

unde $a_{i,j} = A[\varphi_{i,j}]$, $j = 0, 1, \ldots, k_i - 1$, $i = 1, 2, \ldots, p$.

Există un caz particular important cînd restul $R[f]$ al formulei de aproximare astfel obţinut este de formă simplă. Avem anume

TEOREMA 10. — *Dacă*: 1°. *funcţionala liniară $A[f]$ este pozitivă,* 2°. *ordinele de multiplicitate k_i ale tuturor punctelor z_i care se găsesc în interiorul intervalului E, sînt pare,*

restul $R[f]$ al formulei de aproximare (*), *construită în felul arătat mai sus, este de formă simplă.*

Funcţionala $A[f]$ este pozitivă dacă avem $A[f] \geqq 0$, pentru orice funcţie f (continuă) nenegativă, egalitatea fiind adevărată (dacă şi) numai dacă $f = 0$ pe E.

Formula (16) ne dă

$$f(x) - L(f|x) = \psi(x)[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, x; f], \tag{53}$$

punctele x_i avînd aceeaşi semnificare ca şi în (16). În această formulă avem

$$\psi(x) = V\begin{pmatrix} f_0, f_1, \ldots, f_n, f_{n+1} \\ x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, x \end{pmatrix} : V\begin{pmatrix} f_0, f_1, \ldots, f_n \\ x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \end{pmatrix}$$

dacă x este diferit de unul din nodurile x_i.

Formula (53) este adevărată pentru orice $x \in E$, cu condiţia de a înlocui membrul al doilea prin 0 dacă x coincide cu unul dintre nodurile x_i. Avem

$$R[f] = A[f - L(f|x)] = A[\psi[x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, x; f]]$$

şi restul este de formă simplă deoarece: 1°. diferenţa divizată care figurează în membrul al doilea al formulei (53) este, în virtutea teoremei 8, pozitivă dacă f este o funcţie convexă, afară de cel mult $n+1$ puncte (punctele x_i) ale lui E. 2°. funcţia nu este identic nulă şi nu schimbă de semn pe E; această proprietate rezultă din teorema 2 prin o trecere la limită, 3°. funcţia $f - L(f|x)$ este continuă pe E. Rezultă că această din urmă funcţie nu este identic nulă şi că nu schimbă de semn pe E dacă f este o funcţie convexă. Teorema 10 rezultă imediat.

Restul este de forma (30) şi dacă a $(n+1)$-a derivată a lui f există şi este continuă pe interiorul lui E, chiar de forma indicată în teorema 9. Constanta $K = R[f_{n+1}]$ se poate calcula şi cu ajutorul formulei $K = R[\psi]$, sau cu ajutorul formulei $K = R[\psi + \varphi]$, unde φ este o combinaţie liniară a funcţiilor (19).

Este uşor de generalizat rezultatul precedent în cazul cînd se presupune că funcţiile (18) şi (19) formează sisteme (I) regulate de ordinul $k \geqq \max(k_1, k_2, \ldots, k_p)$. În fine, este clar că o proprietate analoagă subsistă pentru o funcţională $A[f]$ negativă, pentru care deci avem $A[f] \leqq 0$ pentru orice funcţie f nenegativă, egalitatea fiind adevărată numai pentru $f = 0$.

Observăm că numeroase formule clasice de aproximare, de exemplu formule aşa-zise de cuadratură numerică (sau mecanică), sînt de forma precedentă Vom reaminti cîteva dintre aceste formule mai jos.

21. Formula de cuadratură numerică bine cunoscută

$$A[f] = \int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{2\pi}{m+1} \sum_{i=0}^{m} f\left(\frac{2i\pi}{m+1}\right) + R[f], \tag{54}$$

unde m este un număr natural şi f o funcţie continuă pe intervalul închis $[0, 2\pi]$, este de forma precedentă.

În acest caz $R[f]$ este nul pe funcţiile

$$f_0 = 1,\ f_{2i-1} = \cos ix,\ f_{2i} = \sin ix, \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{55}$$

la care se reduc acum funcţiile (19). Am demonstrat deja că funcţiile (55) formează un sistem (I) complet regulat pe intervalul $[0, 2\pi)$. Această proprietate este echivalentă cu faptul că un polinom trigonometric de gradul m nu poate avea $2m+1$ rădăcini distincte sau nu în intervalul $[0, 2\pi)$, fără să fie identic nul.

Să considerăm şi funcţia

$$f_{2m+1} = x. \tag{55'}$$

Atunci funcţiile (55), (55′) împreună formează de asemenea un sistem (I) complet regulat pe $[0, 2\pi)$. Într-adevăr, o combinaţie liniară neidentic nulă φ a funcţiilor (55), (55′) nu poate avea mai mult de $2m+1$ rădăcini distincte sau nu în $[0, 2\pi)$. În cazul contrar, derivata φ', care este un polinom trigonometric de gradul m, ar avea cel puţin $2m+1$ rădăcini distincte sau nu în $[0, 2\pi)$. Ar rezulta că $\varphi' = 0$, deci că φ este o constantă $\neq 0$, ceea ce este imposibil.

Formula (54) este de forma precedentă. Pentru a o obţine este suficient a lua funcţia $L(f|x)$ (polinom de interpolare trigonometrică de tip Lagrange-Hermite) relativă la nodul simplu 0 şi la nodurile *duble* $\frac{2i\pi}{m+1}$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Este uşor de verificat că (54) este singura formulă de forma

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = Af(0) + \sum_{i=1}^{m}\left[\alpha_i f\left(\frac{2i\pi}{m+1}\right) + \beta_i f'\left(\frac{2i\pi}{m+1}\right)\right] + R[f]$$

în care A, α_i, β_i sînt independenţi de funcţia f şi restul căreia se anulează pe funcţiile (55).

Restul formulei (54) este de forma simplă şi avem

$$R[f] = \frac{2\pi^2}{m+1}[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2m+2}; f]$$

funcţia f fiind continuă pe $[0, 2\pi]$ şi avînd o derivată continuă pe $(0, 2\pi)$. Punctele $\xi_i \in (0, 2\pi)$, $i = 1, 2, \ldots, 2m+2$ sînt distincte.

Dacă f are o derivată continuă de ordinul $2m+1$ pe $(0, 2\pi)$, regăsim restul dat de J. R a d o n [21]. În cazul nostru

$$[\xi, \xi, \ldots, \xi; f] = \frac{1}{(m!)^2}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2}{dx^2} + 1^2\right)\left(\frac{d^2}{dx^2} + 2^2\right)\cdots\left(\frac{d^2}{dx^2} + m^2\right)f\right]_{x=\xi}$$

22. Formula (54) este analoaga trigonometrică a formulei de integrare numerică clasică a lui Gauss,

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f(\zeta_i) + R[f] \tag{56}$$

unde ζ_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ sînt rădăcinile, toate reale, distincte și cuprinse în $(-1, 1)$, ale polinomului

$$P(x) = \frac{m!}{(2m)!} \cdot \frac{d^m}{dx^m} (x^2 - 1)^m$$

și al cărui rest se anulează pe orice polinom de gradul $2m - 1$. Formula (56) este relativă la cazul particular (21), (21') și pentru a o obține este suficient a lua funcția $L(f|x)$ (polinomul de interpolare al lui Lagrange-Hermite) relativă la nodurile *duble* ζ_i, $i = 1, 2, \ldots, m$. În virtutea teoremei 10 restul este de formă simplă și avem ($n = 2m - 1$),

$$R[x^{n+1}] = R[P^2] = \int_{-1}^{1} P^2 dx = \frac{2^{2m+1}(m!)^4}{(2m+1)[(2m)!]^2}.$$

Restul este deci de forma

$$R[f] = \frac{2^{2m+1}(m!)^4}{(2m+1)[(2m)!]^2} [\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2m+1}; f], \tag{57}$$

funcția fiind continuă pe $[-1, 1]$ și avînd o derivată continuă pe $(-1, 1)$. Punctele $\xi_i \in (-1, 1)$, $i = 1, 2, \ldots, 2m+1$ sînt distincte.

Existența și continuitatea derivatei funcției f în studiul simplicității restului formulelor (54) și (56) sînt impuse de metoda particulară prin care am obținut această simplicitate. Se poate demonstra că ipoteza existenței derivatei este superfluă, ceea ce vom arăta efectiv mai jos pentru formula lui Gauss.

23. Să considerăm o funcțională liniară de forma

$$R[f] = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=0}^{k_i-1} c_{i,j} f^{(j)}(z_i), \tag{58}$$

unde $n+2 \geqq k_1, k_2, \ldots, k_p \geqq 1, k_1+k_2+\ldots+k_p = m \geqq n+2, z_1 < z_2 < \ldots < z_p$ sînt puncte ale intervalului E și $c_{i,j}$, sînt coeficienți independenți de funcția f. Spațiul de definiție $\mathcal{F}$ al funcționalei este format din funcțiile ale căror derivată de ordinul $\max(k_1 - 1, k_2 - 1, \ldots, k_p - 1)$ există și este continuă pe E. Presupunem că funcțiile (18) și (19) aparțin lui $\mathcal{F}$ și formează sisteme regulate de ordinul $\max(k_1, k_2, \ldots, k_p)$.

Fie $x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_m$ punctele z_i contate cu ordinele lor de multiplicitate respective. Funcționala (58) poate să se scrie și sub forma

$$R[f] = R_1[f] + \sum_{i=1}^{m-n-1} \mu_i [x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n+1}; f],$$

unde μ_i sînt coeficienți independenți de funcția f.

$R_1[f]$ este o expresie analoagă cu (58), unde însă nu figurează decît valorile funcției f și ale derivatelor sale succesive pe primele $n+1$ noduri $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ (distincte sau nu). Dacă unul din aceste din urmă noduri se repetă de k ori, în $R_1[f]$ figurează liniar (eventual cu coeficienți nuli) numai valoarea funcției și a primelor sale $k-1$ derivate pe acest punct.

Dacă observăm că în diferența divizată (27) (unde z_i sînt distincți) coeficienții lui $f^{(k_i-1)}(z_i)$, $i = 1, 2, \ldots, p$ sînt totdeauna diferiți de zero, vedem că *coeficienții* μ_i *și funcționala liniară* $R_1[f]$ *sînt determinați complet de funcționala liniară* (58).

Pentru ca funcționala liniară (58) să fie nulă pe funcțiile (19), este necesar și suficient ca $R_1[f]$ să fie nul identic. Condiția este evident suficientă (formula (23)). Ea este și necesară deoarece se pot anula succesiv coeficienții lui $R_1[f]$, alegînd pentru f o combinație liniară convenabilă a funcțiilor (19).

De aici rezultă întîi formula $R_1[f] = R[L(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}; f|x)]$ și apoi

L e m a 3. — *Pentru ca funcționala liniară* (58) *să fie nulă pe funcțiile* (19), *este necesar și suficient ca ea să fie de forma*

$$R[f] = \sum_{i=1}^{m-n-1} \mu_i [x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n+1}; f], \tag{59}$$

unde coeficienții μ_i *sînt bine determinați și independenți de funcția* f.

De aici deducem

TEOREMA 11. — *Dacă*: 1°. *funcțiile* (18) *și* (19) *formează sisteme* (I) *complet regulate pe intervalul* E, 2°. *funcționala liniară* (58) *este nulă pe funcțiile* (19), 3°. *în expresia* (59) *a acestei funcționale liniare, coeficienții* μ_i *sînt de același semn* (toți $\geqq 0$ sau toți $\leqq 0$), 4°. *presupunînd* $x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_m$, *avem*

$$\sum_{i=1}^{m-n-1} \mu_i (x_{i+n+1} - x_i) \neq 0,$$

funcționala liniară (58) *este de forma simplă*.

Presupunem aici $m > n+2$. Condiția 4° înseamnă că cel puțin unul dintre coeficienții μ_i este $\neq 0$ și în același timp nodurile $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n+1}$, corespunzătoare unui astfel de coeficient, nu sînt toate confundate. Demonstrația teoremei 11 rezultă ușor. Într-adevăr, pentru o funcție convexă toți termenii sumei (59) sînt de același semn și unul cel puțin este $\neq 0$.

Rezultatul este valabil de asemenea și pentru $m = n+2$, suprimînd în teoremă condiția 3°.

Se vede ușor că condiția $n+2 \geqq k_1, k_2, \ldots, k_p$ este esențială. În particular, această condiție este îndeplinită de funcționala liniară (59). În cazul însă cînd condiția nu este îndeplinită, funcționala liniară (58) poate să nu fie de forma indicată și deci teorema 11 poate să nu aibă loc.

24. În cazul particular (21), (21') putem da rezultate mai complete. În acest caz putem distinge convexități de ordinele succesive $n = -1, 0, 1, \ldots$ și noțiunea de simplicitate a unei funcționale liniare este legată de gradul său de exactitate.

Se zice că funcționala liniară $R[f]$ (sau formula de aproximare corespunzătoare care are acest rest) are *gradul de exactitate* (întregul) $n \geqq -1$ dacă $R[x^i] = 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $R[x^{n+1}] \neq 0$. Aici punem $n = -1$ dacă $R[1] \neq 0$ și $n = \infty$ dacă $R[x^i] = 0$ pentru $i = 0, 1, \ldots$ Gradul de exactitate (finit sau nu) este totdeauna bine determinat. În cele ce urmează considerăm numai funcționale liniare avînd un grad de exactitate finit și care sînt definite, în particular pe orice polinom. Pentru ca o astfel de funcțională liniară să aibă un grad de exactitate finit, este necesar și suficient ca ea să nu fie nulă pe orice polinom. De exemplu, funcționala liniară (58), presupusă neidentic nulă (mai exact cu coeficienți $c_{i,j}$ nu toți nuli), are un grad de exactitate finit. Într-adevăr, fără a restrînge generalitatea, se poate presupune că unul dintre coeficienții c_{i,k_i-1}, $i = 1, 2, \ldots, p$ este $\neq 0$. Fie, pentru fixarea ideilor, $c_{r,k_r-1} \neq 0$. Se poate atunci vedea ușor că $R\left[\frac{1}{x-z_r} \prod_{i=1}^{p} (x-z_i)^{k_i}\right] \neq 0$.

Pentru ca o funcțională liniară să poată fi de forma simplă este necesar ca ea să aibă un grad de exactitate finit.

Vom demonstra

TEOREMA 12. — *Presupunînd $x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_{n+3}$, pentru ca funcționala liniară*

$$R[f] = \mu_1 [x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f] + \mu_2 [x_2, x_3, \ldots, x_{n+3}; f], \tag{60}$$

(*coeficienții μ_1, μ_2 fiind independenți de funcția f) să fie de forma simplă, este necesar și suficient ca una din condițiile*:

1°. *Nodurile x_i nu sînt toate confundate și $\mu_1 = -\mu_2 \neq 0$.*

2°. $(x_{n+2} - x_1)\mu_1 + (x_{n+3} - x_2)\mu_2 \neq 0$, $\mu_1\mu_2 \geqq 0$, *să fie verificată.*

Din condiția 2° rezultă de asemenea că nodurile nu sînt toate confundate. Mai mult, dacă primele $n+2$ resp. ultimele $n+2$ noduri sînt confundate, coeficientul μ_2 resp. coeficientul μ_1 este $\neq 0$.

Pentru a demonstra teorema este necesar și suficient să se verifice că în cazurile 1° și 2° ale enunțului, funcționala este de forma simplă, pe cînd în celelalte cazuri posibile ea nu este de forma simplă. Aceste cazuri posibile sînt următoarele:

3°. *Nodurile x_i sînt toate confundate.*

4°. *Nodurile x_i nu sînt toate confundate și* $\mu_1\mu_2 \geqq 0$,

$$(x_{n+2} - x_1)\mu_1 + (x_{n+3} - x_2)\mu_2 = 0.$$

5°. *Nodurile nu sînt toate confundate și* $\mu_1\mu_2 < 0$, $\mu_1 + \mu_2 \neq 0$.

Vom examina fiecare din cele 5 cazuri.

1°. În acest caz expresia (60) se poate scrie $\mu_2(x_{n+3} - x_1)[x_1, x_2, \ldots, x_{n+3}; f]$. Ea este de grad de exactitate $n+1$ și este de forma simplă, în virtutea teoremei 8.

2°. Proprietatea rezultă din teorema 11.

3°. Pe baza definiției diferențelor divizate pe noduri nu toate distincte, expresia (60) este de forma $(\mu_1 + \mu_2)\,[\underbrace{x_1, x_1, \ldots, x_1}_{n+2}; f]$. Atunci funcționala liniară este: 3'°. sau identic nulă, deci nu este de forma simplă, 3''°. sau are gradul de exactitate n, dar se anulează pe funcția $|x - x_1|\,(x - x_1)^{n+1}$ care este convexă de ordinul n, deci nu este de forma simplă.

4°. Unul cel puțin dintre coeficienții μ_1, μ_2 este nul și funcționala liniară (60) este: 4'°. sau identic nulă, 4''° sau de forma 3° precedentă. Nici în acest caz funcționala nu este de forma simplă.

5°. Gradul de exactitate este n și putem nota cu $z_1 < z_2 < \ldots < z_p$ nodurile distincte, k_i fiind ordinul de multiplicitate a lui z_i. Avem $1 \leqq k_1, k_2, \ldots, k_p \leqq n+2$, $k_1 + k_2 + \ldots + k_p = n+3$. Să considerăm funcțiile

$$\psi_1 = -\left(\frac{x - \lambda_1 - |x - \lambda_1|}{2}\right)^{n+2} \qquad \psi_2 = \left(\frac{x - \lambda_2 + |x - \lambda_2|}{2}\right)^{n+2} \tag{61}$$

care sînt neconcave de ordinul n și aparțin mulțimii de definiție $\mathcal{F}$ a funcționalei liniare (60), astfel cum această mulțime a fost definită la nr. **23.** Într-adevăr, funcțiile (61) au (peste tot) derivate continue de ordinul $n+1$. Vom calcula pe $R[\psi_1]$ și pe $R[\psi_2]$, presupunînd că $\lambda_1 \in (z_1, z_2)$ și $\lambda_2 \in (z_{p-1}, z_p)$. Este inutil de a reproduce aici în detaliu acest calcul. Avem

$$R[\psi_1] = \sum_{i=1}^{k_1-1} M_i(\lambda_1 - z_1)^{n+2-i}, \quad (z_1 < \lambda_1 < z_2)$$

$$R[\psi_2] = \sum_{i=1}^{k_p-1} N_i(z_p - \lambda_2)^{n+2-i}, \quad (z_{p-1} < \lambda_2 < z_p),$$

unde

$$M_{k_1-1} = \frac{\binom{n+2}{k_1-1}\mu_1}{\left[\prod_{i=2}^{p-1}(z_i - z_1)^{k_i}\right](z_p - z_1)^{k_p-1}}, \quad N_{k_p-1} = \frac{\binom{n+2}{k_p-1}\mu_2}{\left[\prod_{i=2}^{p-1}(z_p - z_i)^{k_i}\right](z_p - z_1)^{k_1-1}},$$

ceilalți coeficienți M_i, N_i, independenți de λ_1 și λ_2, avînd valori care este inutil să fie calculate aici.

Observăm că M_{k_1-1}, N_{k_p-1} sînt diferiți de zero și de același semn cu μ_1, μ_2 respectiv. Se vede atunci că putem găsi un λ_1 suficient de aproape de z_1 și un λ_2 suficient de aproape de z_p astfel ca să avem $R[\psi_1] \cdot R[\psi_2] < 0$. Dintr-o observație făcută la nr. **10** rezultă că funcționala liniară (60) nu poate să fie de forma simplă.

Teorema 12 este complet demonstrată.

Construcţia funcţiilor (61) depinde, într-o oarecare măsură, de spaţiul $\mathcal{F}$. Dacă acest spaţiu este mai restrîns, de ex. dacă el nu conţine decît funcţii indefinit derivabile pe E, trebuie să înlocuim funcţiile (61) prin altele convenabile. Putem evita această modificare prin criterii analoage cu acelea studiate mai jos (vezi nr. **30**).

25. Rămînînd în cazul particular (21), (21′), dacă $R[f]$ este o funcţională liniară definită pe $\mathcal{F}$, $R^*[f] = R[f']$ este o funcţională liniară definită pe mulţimea $\mathcal{F}^*$ a funcţiilor continue şi derivabile a căror derivată aparţine lui $\mathcal{F}$. Se vede uşor că dacă $R[f]$ este de grad de exactitate $n\ (\geqq -1)$, $R^*[f]$ este de grad de exactitate $n+1$.

Avem şi

TEOREMA 13. — *Sub ipotezele precedente, pentru ca $R[f]$ să fie de forma simplă, este necesar şi suficient ca $R^*[f]$ să fie de forma simplă.*

Demonstraţia este imediată. Este suficient să observăm că derivata unei funcţii convexe de ordinul n este o funcţie convexă de ordinul $n-1$ şi că toate primitivele unei asemenea funcţii sînt funcţii convexe de ordinul $n+1$.

26. Pentru a face o aplicaţie, să considerăm formula de cuadratură numerică

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i f^{(i)}(a) + \sum_{i=0}^{l-1} \beta_i f^{(i)}(c) + \sum_{i=0}^{m-1} \gamma_i f^{(i)}(b) + R[f] \tag{62}$$

unde f este o funcţie continuă pe $[a, b]$ avînd derivatele scrise continue şi $a < c < b$.

Să presupunem că restul formulei (62) este nul pe orice polinom de gradul $n-1 = k+l+m-1 \geqq 0$. Atunci formula intră în categoria celor studiate la nr. **20**. Numerele k, l, m pot fi nule, ceea ce însemnează că suma corespunzătoare (deci punctul a, c sau b corespunzător) nu intervine în membrul al doilea al formulei (62).

Cazuri particulare ale formulei (62) au fost studiate de către diverşi autori şi în particular de K. P e t r [10, 11], G. N. W a t s o n [27], N. O b r e s c h k o f f [9]. Metoda acestor autori este diferită de cea expusă aici.

În virtutea teoremei 10, restul este de formă simplă dacă l este par, în particular deci dacă $l = 0$. Vom regăsi acest rezultat mai jos cu ajutorul teoremelor 12 şi 13.

Se vede uşor că $R[f]$ are un grad de exactitate finit care este egal cu $n-1$ sau cu n. Funcţionala liniară $R^*[f] = R[f']$ este de forma (58), cu noduri nu toate confundate, numărul total al lor fiind $n+2$ dacă $l = 0$ şi $n+3$ dacă $l > 0$. Putem dar discuta simplicitatea restului cu ajutorul teoremelor 12 şi 13.

$R[f]$ este de grad de exactitate n dacă şi numai dacă

$$P(c) = \int_a^b (x-a)^k (x-c)^l (b-x)^m dx = 0. \tag{63}$$

Această ecuaţie algebrică (de gradul l) în c nu are nici o rădăcină reală în (a, b) (de altfel pe toată axa reală) dacă l este par, şi are o singură rădăcină reală c^* care este în (a, b) dacă l este impar. Se obţine acest rezultat observînd că ecuaţia derivată $P'(c) = 0$ este de aceeaşi formă. $R[f]$ este deci de grad de exactitate n dacă şi numai dacă l este impar şi $c = c^*$.

Teorema 11 ne arată că dacă $l = 0$, $R^*[f]$ este de grad de exactitate n şi este de forma simplă. Deci $R[f]$ este de grad de exactitate $n-1$ şi de forma simplă. La fel se vede că dacă l este impar şi $c = c^*$, el este de grad de exactitate n şi este de forma simplă.

Pentru a studia celelalte cazuri posibile, trebuie calculaţi coeficienţii μ_1, μ_2 ai formulei (60) corespunzătoare lui $R^*[f]$. Nişte calcule, pe care nu le reproducem în detaliu, ne dau

$$\mu_1 = (-1)^{l+m} k!\,(c-a)^{l+1}(b-c)^m \alpha_{k-1},\quad \mu_2 = -m!\,(b-a)^k (b-c)^{l+1} \gamma_{m-1},$$

unde

$$\alpha_{k-1} = \frac{(-1)^l}{(k-1)!\,(c-a)^l (b-a)^m} \int_a^b (x-a)^{k-1}(x-c)^l (b-x)^m dx, \quad (k>0)$$

$$\gamma_{m-1} = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!\,(b-a)^k (b-c)^l} \int_a^b (x-a)^k (x-c)^l (b-x)^{m-1} dx, \quad (m>0)$$

$$\alpha_{-1} = 1,\ \gamma_{-1} = -1,\ (0! = 1).$$

Aplicînd teorema 12, vedem că dacă $l > 0$ şi dacă restul $R[f]$ este de grad de exactitate $n-1$, el este de forma simplă dacă şi numai dacă $\mu_1\mu_2 > 0$. Această condiţie este verificată dacă l este un număr par.

Dacă l este impar şi $k > 0$, există în (a, b) o valoare c_1 a lui c şi una singură pentru care $\mu_1 = 0$ şi dacă $m > 0$ o valoare c_2 a lui c şi una singură pentru care $\mu_2 = 0$.

Avem $c_1 < c^* < c_2$. Pentru a demonstra prima inegalitate este suficient să observăm că pentru polinomul (63) avem

$$P(a) > 0, \quad P(c_1) = \int_a^b (x-a)^{k-1}(x-c^*)^{l+1}(b-x)^m dx > 0.$$

La fel se demonstrează a doua inegalitate.

Se vede imediat că dacă $c_1 < c < c_2$ avem $\mu_1\mu_2 < 0$, şi dacă $c \leqq c_1$ sau $c_2 \leqq c$ avem $\mu_1\mu_2 \geqq 0$. Rezultatele subsistă şi dacă $k = 0$ luînd $c_1 = a$, şi dacă $m = 0$ luînd atunci $c_2 = b$.

Restul $R[f]$ al formulei (62) este deci de forma simplă numai în următoarele trei cazuri :

1°. l impar, $c = c^*$.

2°. l impar, $a < c \leqq c_1$ sau $c_2 \leqq c < b$.

3°. l par.

În cazul 1° restul are forma

$$R[f] = K^*[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k+l+m+2}\,;\, f]$$

iar în cazurile 2° și 3° este de forma

$$R[f] = K[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k+l+m+1}\,;\, f],$$

unde ξ_i sînt, de fiecare dată, puncte distincte ale intervalului (a, b) și

$$K^* = \int_a^b (x-a)^k (x-c)^{l+1} (x-b)^m\, dx, \quad K = \int_a^b (x-a)^k (x-c)^l (x-b)^m\, dx.$$

În cazul „simetric" $k = m$, avem $c^* = \frac{1}{2}(a+b)$ și $c_1 + c_2 = a + b$.

În cazul $l = 1$, avem

$$c_1 = \frac{(m+1)\,a + kb}{m+k+1}, \quad c^* = \frac{(m+1)\,a + (k+1)\,b}{m+k+2}, \quad c_2 = \frac{ma + (k+1)\,b}{m+k+1}.$$

Se poate demonstra că în toate cazurile de simplicitate a restului simplicitatea are loc și dacă funcția este presupusă numai continuă pe $[a, b]$, avînd pe punctele a, c, b derivatele care figurează efectiv în membrul al doilea al formulei (62). Ipoteza continuității derivatei de ordinul $\max(k-1, l-1, m-1)$ a fost impusă numai de definiția pe care am adoptat-o pentru diferențele divizate pe noduri multiple și de criteriul pe care ne-am bazat pentru a demonstra simplicitatea restului.

27. În cazul particular (21), (21'), vom relua, precizîndu-l și completîndu-l, un criteriu pe care l-am dat deja [15].

Fie

$$\varphi_{n+1,\lambda} = \left(\frac{x - \lambda + |x - \lambda|}{2}\right)^n \tag{64}$$

unde n este un număr natural. Aceasta este o funcție neconcavă de ordinul n pentru orice x. Derivata sa de ordinul k există dacă $0 \leq k \leq n-1$ și este continuă pentru orice x. Avem, de altfel,

$$\varphi^{(k)}_{n+1,\lambda} = \frac{n!}{(n-k)!}\,\varphi_{n+1-k,\lambda} \quad (0 \leq k \leq n-1). \tag{65}$$

Fie n un număr natural și să împărțim intervalul finit și închis $[a, b]$ în $m > 2n$ părți egale prin punctele

$$\lambda_i = a + ih,\ i = 0, 1, \ldots, m,\ h = \frac{b-a}{m} \quad (\lambda_0 = a,\ \lambda_m = b). \tag{66}$$

Notăm cu

$$D^i_j[f] = [\lambda_i, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_{i+j}\,;\, f], \quad i = 0, 1, \ldots, m-j,\ j = 0, 1, \ldots, m \tag{67}$$

diferențele divizate (obișnuite) ale funcției f pe puncte (66) consecutive.

Să considerăm funcțiile

$$\psi_m = f_m + Q_m, \tag{68}$$

unde

$$f_m = (n+1)h \sum_{i=0}^{m-n-1} D^i_{n+1}[f]\, \varphi_{n+1,\lambda_{i+n}} \tag{69}$$

$$Q_m = \frac{(-1)^n}{n!\,h^n}\left\{\sum_{r=0}^{n} (-1)^r f(\lambda_r)\left[\sum_{i=0}^{r}(-1)^i \binom{n+1}{r-i}(x - \lambda_{i+n})^n\right]\right\} \tag{70}$$

Funcția (68) este continuă și are o derivată continuă de ordinul $n-1$ (deci de orice ordin $\leq n-1$) pentru orice x. Ea se reduce la un polinom de gradul n în fiecare din intervalele $[\lambda_i, \lambda_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$. ψ_m este ceea ce am numit altă dată o *funcție elementară de ordinul* n.

Am demonstrat [15] că dacă f este continuu pe $[a, b]$, șirul $\{\psi_m\}$ converge uniform pe întreg intervalul $[a, b]$ către f pentru $m \to \infty$. Această proprietate de convergență o vom completa pentru cazul cînd funcția f este derivabilă de un anumit număr de ori.

28. Înainte de a enunța și de a demonstra teorema 14, pe care o vom stabili-o mai jos, este necesar să facem cîteva calcule preliminare.

Formula de recurență $D^i_j[f] = \frac{1}{jh}\{D^{i+1}_{j-1}[f] - D^i_{j-1}[f]\}$ permite să stabilim diferite relații între diferențele divizate (67). Astfel avem

$$(n+1)\,hD^i_{n+1}[f] = \frac{(-1)^{n+1-k}\,k!}{n!\,h^{n-k}} \sum_{j=0}^{n+1-k} (-1)^j \binom{n+1-k}{j} D^{i+j}_k[f]. \tag{71}$$

Aici k este un întreg astfel ca $0 \leq k \leq n+1$. Pentru cele ce urmează va fi suficient să presupunem că $0 \leq k \leq n-1$.

Ținînd seamă de formula (71), funcția (69) devine

$$f_m = \frac{(-1)^{n+1-k}\,k!}{n!\,h^{n-k}} \sum_{r=0}^{m-k} D^r_k[f]\left[(-1)^r \sum_{i=r-n-1+k}^{r} (-1)^i \binom{n+1-k}{r-i} \varphi_{n+1,\lambda_{i+n}}\right], \tag{72}$$

unde $\varphi_{n+1,\lambda_{i+n}} = 0$ pentru $i < 0$ și pentru $i > j$ dacă $x \in [\lambda_{j+n}, \lambda_{j+n+1}]$, $j = -n, -n+1, \ldots, m-n-1$.

Pentru a simplifica, întroducem notațiile

$$P_{r,u,v} = (-1)^r \sum_{i=u}^{v} (-1)^i \binom{n+1-k}{r-i}(x - \lambda_{i+n})^n. \tag{73}$$

Ținînd seamă de (73), găsim

$$f_m = 0, \text{ pentru } x \in [\lambda_0, \lambda_n]$$

$$f_m = \frac{(-1)^{n+1-k}\,k!}{n!\,h^{n-k}}\left[\sum_{r=0}^{n-k} D^r_k[f]\, P_{r,0,r} - \sum_{r=j+1}^{n-k} D^r_k[f]\, P_{r,j+1,r} + \right.$$

$$+\left.\sum_{r=n+1-k}^{n+1-k+j} D_k^r[f]\, P_{r,r-n-1+k,j}\right], \text{ pentru } x \in [\lambda_{j+n}, \lambda_{j+n+1}],$$

$$j = 0, 1, \ldots, n-k-1,$$

$$f_m = \frac{(-1)^{n+1-k}\, k!}{n!\, h^{n-k}} \left[\sum_{r=0}^{n-k} D_k^r[f]\, P_{k,0,r} + \sum_{r=n+1-k}^{2n-2k+1} D_k^r[f]\, P_{r,r-n-1+k,n-k}\right],$$

$$\text{pentru } x \in [\lambda_{2n-k}, \lambda_{2n-k+1}],$$

$$f_m = \frac{(-1)^{n+1-k}\, k!}{n!\, h^{n-k}} \left[\sum_{r=0}^{n-k} D_k^r[f]\, P_{r,0,r} + \sum_{r=n+1-k}^{j} D_k^r[f]\, P_{r,r-n-1+k,r} + \right.$$

$$+\left.\sum_{k=j+1}^{n+1-k+j} D_k^r[f]\, P_{r,r-n-1+k}\right], \text{ pentru } x \in [\lambda_{j+n}, \lambda_{j+n+1}],$$

$$j = n-k+1, n-k+2, \ldots, m-n-1.$$

Pentru a pune şi polinomul (70) sub o formă convenabilă, vom aplica formula de transformare

$$\sum_{r=0}^{n} c_r f(\lambda_r) = (-1)^k\, k!\, h^k \sum_{r=0}^{n-k} D_k^r[f] \left[\sum_{s=0}^{r} \binom{k+s-1}{s} c_{r-s}\right] +$$

$$+ (-1)^n \sum_{r=n+1-k}^{n} (-1)^r (n-r)!\, h^{n-r} D_{n-r}^r[f] \left[\sum_{s=0}^{r} \binom{n-r+s}{s} c_{r-s}\right].$$

Să luăm

$$c_r = (-1)^r \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \binom{n+1}{r-i} (x-\lambda_{i+n})^n,\ r = 0, 1, \ldots, n.$$

Dacă ţinem seamă de formula bine cunoscută (vezi, de ex., E. Netto [8])

$$\sum_{s=0}^{t} (-1)^s \binom{s+a}{s} \binom{b}{t-s} = \binom{b-a-1}{t}$$

deducem

$$\sum_{s=0}^{r} \binom{k+s-1}{s} c_{r-s} = (-1)^r \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \left[\sum_{s=0}^{r-i} (-1)^s \binom{k+s-1}{s} \binom{n+1}{r-i-s}\right] (x-\lambda_{i+n})^n =$$

$$= P_{r,0,r},$$

$$\sum_{s=0}^{r} \binom{n-r+s}{s} c_{r-s} = (-1)^r \sum_{i=0}^{r} (-1)^i \binom{r}{r-i} (x-\lambda_{i+n})^n,$$

de unde, în fine,

$$Q_m = \frac{(-1)^{n-k}\, k!}{n!\, h^{n-k}} \sum_{r=0}^{n-k} D_k^r(f]\, P_{r,0,r} +$$

$$+ \sum_{r=n+1-k}^{n} \left\{\frac{(n-r)!}{n!\, h^r} D_{n-r}^r[f] \left[\sum_{i=0}^{r} (-1)^i \binom{r}{r-i} (x-\lambda_{i+n})^n\right]\right\}. \tag{74}$$

Vom calcula acum derivatele funcţiei (68). Să observăm că

$$\sum_{i=0}^{r} (-1)^i \binom{r}{r-i} (x-\lambda_{i+n})^{n-k} = (-1)^r r!\, h^r D_r^n[(x-t)^{n-k}],$$

unde considerăm x ca un parametru şi t ca variabila polinomului $(x-t)^{n-k}$ a cărei diferenţă divizată se calculează pe nodurile $\lambda_n, \lambda_{n+1}, \ldots, \lambda_{n+r}$. Insă, diferenţa divizată de ordinul r a unui polinom de gradul $r-1$ este nulă identic. Rezultă că derivata de ordinul k a celei de a doua sume a membrului al doilea al formulei (74), dispare. Se vede în acelaşi fel că $P^{(k)}_{r,r-n-1+k,r} = 0$ pentru $r \geqq n+1-k$.

Avem deci

$$\psi_m^{(k)} = \frac{(-1)^{n-k}\, k!}{n!\, h^{n-k}} \sum_{r=0}^{n-k} D_k^r[f]\, P^{(k)}_{r,0,r}, \quad \text{pentru } x \in [\lambda_0, \lambda_n]$$

$$\psi_m^{(k)} = \frac{(-1)^{n+1-k}\, k!}{n!\, h^{n-k}} \left[-\sum_{r=j+1}^{n-k} D_k^r[f]\, P^{(k)}_{r,j+1,r} + \sum_{r=n+1-k}^{n+1-k+j} D_k^r[f]\, P^{(k)}_{r,r-n-1+k,j}\right]$$

$$\text{pentru } x \in [\lambda_{j+n}, \lambda_{j+n+1}],\ j = 0, 1, \ldots, n-k-1$$

$$\psi_m^{(k)} = \frac{(-1)^{n+k-k}\, k!}{n!\, h^{n-k}} \sum_{r=j+1}^{n+1-k+j} D_k^r[f]\, P^{(k)}_{r,r-n-1+k,j}$$

$$\text{pentru } x \in [\lambda_{j+n}, \lambda_{j+n+1}],\ j = n-k, n-k+1, \ldots, m-n-1.$$

Vom avea nevoie şi de nişte delimitări convenabile ale derivatelor de ordinul k ale polinoamelor (73) care intervin în aceste formule.

Pentru $0 \leqq s \leqq r \leqq n-k$, $x \in [\lambda_0, \lambda_{2n-k}]$ avem

$$|P^{(k)}_{r,s,r}| \leqq \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{i=0}^{r} \binom{n+1-k}{r-i} |x-\lambda_{i+n}|^{n-k} =$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{i=0}^{r} \binom{n+1-k}{i} |x-\lambda_{r+n-i}|^{n-k} \leqq$$

$$\leqq \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{i=0}^{r} \binom{n+1-k}{i} [\max_{x \in [\lambda_0, \lambda_{2n-k}]} |x-\lambda_{r+n-i}|^{n-k}] \leqq$$

$$\leqq \frac{n!\, h^{n-k}}{(n-k)!} (2n-k)^{n-k} (2^{n+1-k}-1).$$

Dacă deci punem

$$M = \frac{k!}{(n-k)!} (2n-k)^{n-k} (2^{n+1-k}-1) \tag{75}$$

avem, în particular,

$$|P^{(k)}_{r,0,r}| \leqq \frac{n!\,h^{n-k}}{k!} M, \qquad \text{pentru } 0 \leqq r \leqq n-k,\ x \in [\lambda_0, \lambda_n]$$

$$|P^{(k)}_{r,j+1,r}| \leqq \frac{n!\,h^{n-k}}{k!} M, \quad \text{pentru } j+1 \leqq r \leqq n-k,\ x \in [\lambda_{j+n}, \lambda_{j+n+1}],$$

$$j = 0, 1, \ldots, n-k-1.$$

Pentru $j+1 \leqq r \leqq n+1-k+j$, $x \in [\lambda_{j+n}, \lambda_{j+n+1}]$, $j = 0, 1, \ldots, m-n-1$, avem

$$|P^{(k)}_{r,r-n-1+k,j}| \leqq \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{i=r-n-1+k}^{j} \binom{n+1-k}{r-i} |x-\lambda_{i+n}|^{n-k} \leqq$$

$$\leqq \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{i=0}^{n+1-k+j-r} \binom{n+1-k}{i} \max_{x \in [\lambda_{j+n}, \lambda_{j+n+1}]} |x-\lambda_{r+k-1+i}|^{n-k} \leqq$$

$$\leqq \frac{n!\,h^{n-k}}{(n-k)!} \sum_{i=0}^{n+1-k+j-r} \binom{n+1-k}{i} (n+2-k+j-r-i)^{n-k} \leqq$$

$$\leqq \frac{n!\,h^{n-k}}{(n-k)!} (n+2-k+j-r)^{n-k} \sum_{i=0}^{n+1-k+j-r} \binom{n+1-k}{i} <$$

$$< \frac{n!\,h^{n-k}}{(n-k)!} (n+1-k)^{n-k} (2^{n+1-k}-1) \leqq \frac{n!\,h^{n-k}}{k!} M.$$

Se pot găsi și delimitări mai bune. Am dat delimitări de acest fel într-o altă lucrare [15]. Pentru cele ce urmează este suficient să se observe că *numărul* (75) *este independent de* m (și de j).

29. Putem acum demonstra

TEOREMA 14. — *Fiind dat numărul natural* n *și întregul* k *astfel ca* $0 \leqq k \leqq n-1$, *dacă funcția* f *admite o derivată de ordinul* k *continuă pe intersecția* I *a intervalului finit și închis* $[a, b]$ *cu un interval deschis, șirul derivatelor de ordinul* k $\{\psi^{(k)}_m\}$, *ale funcțiilor* (68) *converge uniform către derivata de ordinul* k, $f^{(k)}$, *a funcției* f *pentru* $m \to \infty$ *și pe orice subinterval închis al lui* I.

Derivata de ordinul 0 a unei funcții coincide cu însăși funcția.

Concluzia enunțului înseamnă că convergența este uniformă pe $[a', b'] \subseteqq [a, b]$ dacă $f^{(k)}$ este continuu pe $[a', b']$ și dacă, în plus, $a < a'$, este continuu și pe un interval $[a'', a')$ cu $a < a'' < a'$, iar dacă $b' < b$ este continuu și pe un interval $(b', b'']$ cu $b' < b'' < b$.

Pentru a face demonstrația, vom delimita diferența $f^{(k)} - \psi^{(k)}_m$.

Dacă în expresia lui $\psi^{(k)}_m$ înlocuim toate diferențele divizate $D^r_k[f]$ prin 1, funcția $f^{(k)}_m$ se anulează identic și polinomul $Q^{(k)}_m$ se reduce la

$$\frac{(-1)^{n-k}\,k!}{n!\,h^{n-k}} \sum_{r=0}^{n-k} P^{(k)}_{r,0,r} =$$

$$= \frac{(-1)^{n-k}\,k!}{(n-k)!\,h^{n-k}} \sum_{r=0}^{n-k} (-1)^r \left[\sum_{i=0}^{r} (1-)^i \binom{n+1-k}{r-i} (x-\lambda_{i+n})^{n-k}\right] =$$

$$= \frac{(-1)^{n-k}\,k!}{(n-k)!\,h^{n-k}} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \left[\sum_{i=0}^{n-k} (-1)^r \binom{n+1-k}{r-i}\right] (x-\lambda_{i+n})^{n-k} =$$

$$= \frac{k!}{(n-k)!\,h^{n-k}} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n-k}{i} (x-\lambda_{i+n})^{n-k} =$$

$$= \frac{k!}{(n-k)!} \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n-k}{i} (n-k-i)^{n-k} = k!$$

În acest calcul am ținut seamă de o observație deja făcută asupra diferențelor divizate ale unui polinom. Se vede dar că expresia este independentă de x și deci se poate lua (de ex.) $x = \lambda_{2n-k}$.

Rezultă că diferența $f^{(k)} - \psi^{(k)}_m$ se obține din $\psi^{(k)}_m$ înlocuind pe $D^r_k[f]$ prin $\dfrac{f^{(k)}}{k!} - D^r_k[f]$, $r = 0, 1, \ldots, m-k$.

Ținînd seamă de calculele făcute în nr. precedent, avem

$$|f^{(k)} - \psi^{(k)}_m| \leqq M \sum_{r=0}^{n-k} \left|\frac{f^{(k)}}{k!} - D^r_k[f]\right|, \quad \text{pentru } x \in [\lambda_0, \lambda_n]$$

$$|f^{(k)} - \psi^{(k)}_m| \leqq M \sum_{r=j+1}^{n+1-k+j} \left|\frac{f^{(k)}}{k!} - D^r_k[f]\right|, \quad \text{pentru } x \in [\lambda_{j+n}, \lambda_{j+n+1}]$$

$$j = 0, 1, \ldots, m-n-1.$$

Fie acum $[a', b']$ un subinterval închis al lui I. Să presupunem întîi că $a < a' < b' < b$ și fie atunci $a < a'' < a'$, $b' < b'' < b$, derivata de ordinul k, $f^{(k)}$ fiind continuă pe $[a'', b'']$. Să notăm cu $\omega_k(\delta)$ modulul de oscilație a lui $\dfrac{1}{k!} f^{(k)}$ pe intervalul $[a'', b'']$.

Să luăm numărul natural m destul de mare pentru ca să avem

$$m > \max\left(2n, \frac{n(b-a)}{a'-a''}, \frac{b-a}{b''-b'}, \frac{2(b-a)}{b''-a'}\right) \tag{76}$$

și să punem $j_0 = \left[\dfrac{a'-a}{h}\right] - n$, $j_1 = \left[\dfrac{b''-a}{h}\right] - n - 1$, unde $h = \dfrac{b-a}{m}$ și $[\alpha]$ însemnează cel mai mare întreg $\leqq \alpha$.

Avem atunci $0 \leqq j_0 + 1$, $j_0 \leqq j_1$ și $[a', b'] \subseteqq [\lambda_{j_0+n}, \lambda_{j_1+n+1}] \subseteqq$ $\subseteqq [\lambda_{j_0+1}, \lambda_{j_1+n+1}] \subseteq [a'', b'']$.

Dacă $j_0 \leqq j \leqq j_1$, $j + 1 \leqq r \leqq n + 1 - k + j$, nodurile diferenței divizate $D_k^r[f]$ sînt în intervalul $[\lambda_{j+1}, \lambda_{j+n+1}] \subseteqq [a'', b'']$, unde $f^{(k)}$ este continuu. Există atunci un punct ξ astfel ca

$$D_k^r[f] = \frac{1}{k!} f^{(k)}(\xi), \quad \xi \in [\lambda_{j+1}, \lambda_{j+n+1}]$$

și rezultă că

$$\left| \frac{f^{(k)}}{k!} - D_k^r[f] \right| \leqq \omega_k(nh), \quad \text{pentru } x \in [\lambda_{j+n}, \lambda_{j+n+1}].$$

Avem deci

$$|f^{(k)} - \psi_m^{(k)}| \leqq (n + 1 - k)\, M\omega_k(nh), \quad \text{pentru } x \in [\lambda_{j+n}, \lambda_{j+n+1}]$$
$$j = j_0, j_0 + 1, \ldots, j_1$$

deci, cu atît mai mult,

$$|f^{(k)} - \psi_m^{(k)}| \leqq (n + 1 - k)\, M\omega_k(nh), \quad \text{pentru } x \in [a', b'] \tag{77}$$

care, pe baza proprietăților bine cunoscute ale modulului de oscilație, al funcțiilor continue, demonstrează teorema în acest caz.

Este ușor de văzut că delimitarea (77) este valabilă și în celelalte cazuri posibile. Modificările care trebuie aduse demonstrației sînt următoarele:

Dacă $b' = b$, se suprimă termenul $\dfrac{b - a}{b'' - b'}$, în membrul al doilea al formulei (76).

Dacă $a' = a$, se suprimă termenul $\dfrac{n(b - a)}{a' - a''}$ în membrul al doilea al formulei (76) și se observă că pentru $j < 0$ numărul r este supus la condiția ca $0 \leqq r \leqq n - k$. Nodurile diferenței divizate $D_k^r[f]$ sînt atunci în intervalul $[\lambda_0, \lambda_n]$.

Teorema 14 este demonstrată.

30. Putem acum reveni la studiul criteriilor de simplicitate ale funcționalelor liniare.

Fie $[a, b]$ un interval finit și închis și să considerăm șirul neascendent de $k + 1$ intervale parțiale $[a_0, b_0] \supseteqq [a_1, b_1] \supseteqq \ldots \supseteqq [a_k, b_k]$, unde $a_0 = a$, $b_0 = b$.

Fie $\mathcal{C}_k$ spațiul funcțiilor f care admit derivate continue de ordinul i pe $[a_i, b_i]$ pentru $i = 0, 1, \ldots, k$ și să considerăm norma

$$\|f\| = \sum_{i=0}^{k} \max_{x \in [a_i, b_i]} |f^{(i)}| \tag{78}$$

a acestui spațiu.

Avem

TEOREMA 15. — *Fiind dat numărul natural n și întregul k astfel ca $0 \leqq k \leqq n - 1$, dacă funcționala liniară $R[f]$ este: 1°. definită pe $\mathcal{C}_k$, 2°. de grad de exactitate n, 3°. mărginită în raport cu norma (78), pentru ca $R[f]$ să fie de forma simplă este necesar și suficient ca să avem*

$$R[x^{n+1}]\, R[\varphi_{n+1,\lambda}] \geqq 0, \quad \text{pentru } \lambda \in [a, b], \tag{79}$$

unde funcțiile $\varphi_{n+1,\lambda}$ sînt definite de formula (64).

Să observăm că polinoamele și funcțiile $\varphi_{n+1,\lambda}$, aparțin spațiului $\mathcal{C}_k$.

Condiția este necesară. Într-adevăr, x^{n+1} este convex și $\varphi_{n+1,\lambda}$ este neconcav de ordinul n. Proprietatea rezultă din formula (31).

Condiția este și suficientă. Prin ipoteză, avem

$$|R[f]| \leqq A\|f\|, \quad f \in \mathcal{C}_k,$$

A fiind un număr independent de funcția f și $\|f\|$ norma (78).

Vom demonstra întîi că $R[\varphi_{n+1,\lambda}]$ este o funcție continuă de λ pe $[a, b]$. Într-adevăr, avem

$$|\varphi_{n+1,\lambda} - \varphi_{n+1,\lambda'}| \leqq n\, |\lambda - \lambda'|\, (b - a)^{n-1}, \quad x \in [a, b]$$

deci și $(0 \leqq i \leqq n - 1)$,

$$|\varphi_{n+1,\lambda}^{(i)} - \varphi_{n+1,\lambda'}^{(i)}| = \frac{n!}{(n - i)!} |\varphi_{n+1-i,\lambda} - \varphi_{n+1-i,\lambda'}| \leqq$$
$$\leqq \frac{n!}{(n - i - 1)!} |\lambda - \lambda'|\, (b - a)^{n-1-i}, \quad x \in [a, b].$$

Avem deci

$$|R[\varphi_{n+1,\lambda}] - R[\varphi_{n+1,\lambda'}]| = |R[\varphi_{n+1,\lambda} - \varphi_{n+1,\lambda'}]| \leqq A\, \|\varphi_{n+1,\lambda} - \varphi_{n+1,\lambda'}\|.$$

Dar,

$$\|\varphi_{n+1,\lambda} - \varphi_{n+1,\lambda'}\| \leqq \left[\sum_{i=0}^{k} \frac{n!}{(n - i - 1)!} (b - a)^{n-1-i} \right] |\lambda - \lambda'|$$

de unde proprietatea rezultă fără nici o dificultate.

Prin ipoteză, $R[x^{n+1}] \neq 0$, deci $R[\varphi_{n+1,\lambda}]$ nu schimbă de semn cînd λ parcurge intervalul $[a, b]$. Să ne reamintim că o funcție convexă de ordinul n pe $[a, b]$ are o derivată continuă de toate ordinele $\leqq n - 1$ pe (a, b). Dacă deci $f \in \mathcal{C}_k$ este convex de ordinul n, în virtutea teoremei 14 șirul $\{R[\psi_m]\}$ tinde către $R[f]$ pentru $m \to \infty$. Dar, pe baza formulelor (68) — (70), avem $R[\psi_m] = R[f] = (n + 1)\, h \sum_{i=0}^{m-n-1} D_{n+1}^i[f]\, R[\varphi_{n+1,\lambda_{i+n}}]$ și din (79) rezultă că dacă f este convex de ordinul n, avem

$$R[x^{n+1}]\, R[f] \geqq 0. \tag{80}$$

Rămîne să demonstrăm că în această formulă egalitatea nu poate avea loc. Am dat această demonstrație în altă parte [15], așa că nu mai revenim aici asupra ei.

Se deduce că pentru orice funcție $f \in \mathscr{C}_k$ convexă de ordinul n semnul $>$ este valabil în (80), deci că $R[f] \neq 0$.

Teorema 15 este deci demonstrată.

31. Fie $R[f]$ o funcțională liniară definită pe $\mathscr{C}_k$ și mărginită în raport cu norma (78). Să presupunem că $0 \leq k \leq n-1$ și că $a = a_0 = a_1 = \ldots = a_k$, $b = b_0 = b_1 = \ldots = b_k$. Atunci, după E. Ya. Remez [22], dacă $R[f]$ este de gradul de exactitate n, avem

$$R[f] = \int_a^b f^{(\mu)}(x)\, d\alpha_\mu(x), \tag{81}$$

unde μ este un întreg, $k \leq \mu \leq n+1$ și α_μ o funcție cu variația mărginită care, pentru $\mu \leq n$, verifică egalitatea $\alpha_\mu(a) = \alpha_\mu(b) = 0$. Reprezentarea (81) este valabilă dacă derivata a μ-a, $f^{(\mu)}$ este continuă pe $[a, b]$. E. Ya. Remez a demonstrat [22] și formulele

$$\alpha_{\mu+1}(x) = -\int_a^b \alpha_\mu(x)\, dx, \quad k \leq \mu \leq n, \tag{82}$$

$$R[f] = -\int_a^b f^{(\mu)}(x)\, \alpha_{\mu-1}(x)\, dx, \quad k+1 \leq \mu \leq n+1. \tag{83}$$

În particular, funcția de λ $\varphi_{n+1,\lambda}$ admite o derivată continuă de ordinul $n-1$ pe $[a, b]$. Avem deci, ținînd cont de (80), (81),

$$R[\varphi_{n+1,\lambda}] = n!\int_\lambda^b (x-\lambda)\, d\alpha_{n-1}(x) = -n!\int_\lambda^b \alpha_{n-1}(x)\, dx =$$

$$= n!\int_a^\lambda \alpha_{n-1}(x)\, dx = -n!\, \alpha_n(\lambda).$$

Din (83) rezultă deci că dacă f are o derivată de ordinul $n+1$ continuă pe $[a, b]$, avem reprezentarea

$$R[f] = \frac{1}{n!}\int_a^b R[\varphi_{n+1,\lambda}]\, f^{(n+1)}(x)\, dx. \tag{84}$$

32. Să reluăm formula (56) a lui Gauss. Am stabilit formula (57) sub ipoteza continuității funcției f pe $[-1, 1]$ și a derivatei sale pe $(-1, 1)$. Însă în cazul acesta funcționala liniară $R[f]$ este mărginită pe spațiul $\mathscr{C}_0$ al funcțiilor continue pe $[-1, 1]$, în raport cu norma $\max\limits_{x\in[-1,1]} |f|$.

Formula (57) este, în particular, adevărată pentru funcțiile $f = \varphi_{2m,\lambda}$ care sînt neconcave de ordinul $2m-1$. Se deduce că $R[\varphi_{2m,\lambda}] \geqq 0$ pentru $\lambda \in [-1, 1]$ și, aplicînd teorema 15, rezultă că *formula* (57) *este adevărată sub singura ipoteză a continuității funcției f pe intervalul $[a, b]$.*

§ 4.

33. Vom examina în acest §, fără a intra în prea multe detalii, cazul cînd funcționala liniară $R[f]$ nu este de forma simplă.

O funcțională liniară $R_1[f]$ definită pe $\mathscr{F}$ se numește o *majorantă simplă* a lui $R[f]$ dacă : 1°. ea este de forma simplă, 2°. avem $R_1[f] > R[f]$ pentru orice funcție convexă $f \in \mathscr{F}$.

Avem atunci

TEOREMA 16. — *Dacă funcționala liniară $R[f]$ definită pe $\mathscr{F}$ admite o majorantă simplă, avem*

$$R[f] = K[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+2}; f] - K'[\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_{n+2}; f], \tag{85}$$

unde : 1°. *K, K' sînt numere diferite de zero și independente de funcția f*, 2°. *punctele $\xi_i \in E$, $i = 1, 2, \ldots n+2$ pe de o parte și punctele $\xi'_i \in E$, $i = 1, 2, \ldots, n+2$ pe altă parte, sînt distincte* (ele pot depinde, în general, de funcția f).

Într-adevăr, fie $R_1[f]$ o majorantă simplă a lui $R[f]$. Avem $R[f] = R_1[f] - \{R_1[f] - R[f]\}$, unde funcționalele liniare $R_1[f]$, $R_1[f] - R[f]$ sînt de forma simplă.

Să considerăm o funcțională liniară $R[f]$ definită pe $\mathscr{F}$ și de forma (85) indicată în teorema 16. Dacă constantele K, K' sînt de semne contrare, $R[f]$ este de forma simplă. Este deci destul să examinăm cazul cînd K, K' sînt (diferite de zero și) de același semn. Fără să restrîngem generalitatea, putem atunci presupune că ei sînt pozitivi. Avem atunci

Lema 4. — *Dacă funcționala liniară $R[f]$ este definită pe spațiul $\mathscr{F}$ și dacă ea este de forma* (85), *indicată în teorema* 16, *pentru orice funcție $f \in \mathscr{F}$ cu diferența divizată mărginită,*

reprezentarea (85) *este valabilă pentru orice $f \in \mathscr{F}$* (deci și pentru elementele lui $\mathscr{F}$ care nu au diferența divizată mărginită).

Se vede ușor că lema 4 este o consecință a următoarei :

Lema 5. — *Dacă* : 1°. *$R[f]$ este o funcțională liniară definită pe $\mathscr{F}$*, 2°. *K, K' sînt două numere pozitive,*

pentru orice $f \in \mathscr{F}$ a cărui diferență divizată nu este mărginită, se pot găsi $n+2$ puncte distincte $\xi_i \in E$, $i = 1, 2, \ldots, n+2$ și $n+2$ puncte distincte $\xi'_i \in E$, $i = 1, 2, \ldots, n+2$, astfel ca să avem (85).

Să presupunem, pentru fixarea ideilor, că diferența divizată a funcției f nu este mărginită superior. În virtutea teoremei 4, dacă diferența divizată a acestei funcții ia valoarea m, ea va lua orice valoare mai mare decît m. Fie atunci m o valoare luată de diferența divizată și fie

$[\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_{n+2}; f]$ o diferență divizată care ia o valoare $> \dfrac{mK - R[f]}{K'}$ și $[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+2}; f]$ o diferență divizată care ia valoarea

$$\frac{1}{K}\{K'[\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_{n+2}; f] + R[f]\} > m.$$

Formula (85) rezultă.

Se procedează la fel dacă diferența divizată a funcției f nu este mărginită inferior.

Lema 5 este deci demonstrată.

Reamintim că noțiunea de diferență divizată, de simplicitate a funcționalelor liniare și spațiile considerate sînt în sensul de la § 1.

Este clar că, în loc de majorante simple putem întrebuința *minorante simple*. Funcționala liniară $R_1[f]$ definită pe $\mathscr{F}$ se numește o minorantă simplă pentru $R[f]$ dacă ea este de formă simplă și dacă $R_1[f] < R[f]$ pentru orice funcție concavă f.

Pentru a putea pune o funcțională liniară $R[f]$ sub forma (85), este deci suficient de a cunoaște o majorantă (sau o minorantă) simplă. De exemplu, funcționala liniară (58), care se anulează pe funcțiile (19) și care se poate deci pune sub forma (59), are ca o majorantă simplă funcționala liniară

$$\sum_{i=1}^{m-n-1} \frac{|\mu_i| + \mu_i}{2} [x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n+1}; f] + \mu [x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n+2}; f],$$

unde μ este un număr pozitiv și x'_i, $n+2$ puncte distincte ale intervalului E. Toate funcționalele liniare de forma (58) pot deci să fie puse sub forma (85), indicată în teorema 16.

34. Dacă funcționala liniară $R[f]$ este de forma (85), diferența $K - K' = R[f_{n+1}]$ are o valoare perfect determinată. Să presupunem că K, K' sînt pozitivi. Putem atunci înlocui K, K' prin $K + \varepsilon$, $K' + \varepsilon$ respectiv, ε fiind un număr pozitiv oarecare. Într-adevăr, dacă avem (85) pentru un $f \in \mathscr{F}$ dat, avem $R[f] = R_1[f] - R_2[f]$, unde $R_1[f] = K[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+2}; f] + \varepsilon[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f]$, $R_2[f] = K'[\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_{n+2}; f] + \varepsilon[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f]$, unde x_i sînt $n+2$ puncte distincte ale intervalului E. Putem privi pe $R_1[f]$, $R_2[f]$ ca niște funcționale liniare definite pe $\mathscr{F}$. Atunci ele sînt de forma simplă. Proprietatea enunțată rezultă observînd că $R_1[f_{n+1}] = K + \varepsilon$, $R_2[f_{n+1}] = K' + \varepsilon$.

Dacă $R[f]$ este de forma (85) dar nu este de forma simplă, coeficienții K, K', presupuși pozitivi, au niște margini inferioare ale căror valori prezintă interes mai ales cînd $R[f]$ este restul unei formule de aproximare. În acest sens vom examina un caz particular important în nr. următor.

35. Să presupunem iarăși că sîntem în cazul particular (21), (21') și să considerăm o funcțională liniară $R[f]$ definită și mărginită pe spațiul $\mathscr{C}_k$ considerat la nr. **30**. Avem

TEOREMA 17. — *Dacă*: 1°. *funcționala liniară* $R[f]$ *este definită pe* $\mathscr{C}_k$, *mărginită în raport cu norma* (78) *și de gradul de exactitate* n, *cu* $R[x^{n+1}] > 0$, 2°. A *este marginea superioară a lui* $R[f]$ *pentru funcțiile* $f \in \mathscr{C}_k$ *ale căror diferență divizată de ordinul* $n+1$ *rămîne cuprinsă în* $[0, 1]$ *și* $B = A - R[x^{n+1}]$,

pentru orice $\varepsilon > 0$, *funcționala liniară* $R[f]$ *este de forma* (85), *indicată de teorema* 16, *unde* $K = A + \varepsilon$, $K' = B + \varepsilon$.

Din demonstrație va rezulta că A, B sînt finiți.

Avem $A > 0$ deoarece, în particular, x^{n+1} are diferența sa divizată de ordinul $n+1$ cuprinsă în $[0, 1]$. Avem evident $B \geqq 0$.

Dacă considerăm funcțiile (69), prin formula $R_m[f] = R[f_m]$ definim o funcțională liniară care, pentru $m \to \infty$, tinde către $R[f]$ pentru orice $f \in \mathscr{C}_k$. Să punem

$$R_m^+[f] = (n+1)h \sum_{i=1}^{m-n-1} D_{n+1}^i[f] \frac{R[\varphi_{n+1, \lambda_{i+n}}] + |R[\varphi_{n+1, \lambda_{i+n}}]|}{2} \tag{86}$$

și să notăm cu $\mathscr{C}_k^*$ submulțimea lui $\mathscr{C}_k$ formată din funcțiile f care au diferențele lor divizate de ordinul $n+1$ mărginite. De altfel orice funcție definită pe $[a, b]$, avînd diferența sa divizată de ordinul $n+1$ mărginită, aparține lui $\mathscr{C}_k$. Să observăm că funcția de x, $R[\varphi_{n+1, x}]$ fiind continuă pe $[a, b]$, șirul cu termeni pozitivi

$$\left\{(n+1)h \sum_{i=1}^{m-n-1} \frac{R[\varphi_{n+1, \lambda_{i+n}}] + |R[\varphi_{n+1, \lambda_{i+n}}]|}{2}\right\} \tag{87}$$

tinde, pentru $m \to \infty$, către o limită finită și bine determinată egală cu

$$A = (n+1)\int_a^b \frac{R[\varphi_{n+1, x}] + |R[\varphi_{n+1, x}]|}{2}\, dx. \tag{88}$$

Rezultă că șirul (87) este mărginit. Dacă $f \in \mathscr{C}_k^*$, șirul $\{R_m^+[f]\}$ este de asemenea mărginit. Se poate extrage din acest șir un șir parțial convergent către funcționala $R^+[f]$. Se vede ușor că funcționala $R^+[f]$ astfel definită pe $\mathscr{C}_k^*$ este liniară și se anulează pe orice polinom de gradul n. Dar avem $R_m^+[f] > 0$, $R_m^+[f] \geqq R_m[f]$ dacă $f \in \mathscr{C}_k$ este convex, deci $R^+[f] \geqq 0$, $R^+[f] \geqq R[f]$ dacă $f \in \mathscr{C}_k^*$ este convex. Rezultă imediat că dacă ε este un număr pozitiv și $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$, $n+2$ puncte fixe ale intervalului E, funcționala liniară $R_1[f] = R^+[f] + \varepsilon[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f]$ este o majorantă simplă a lui $R[f]$. Se vede ușor că $R_1[x^{n+1}] = A + \varepsilon$, unde A este dat de formula (88).

Rămîne să se demonstreze că numărul A, dat de formula (88), coincide cu marginea superioară a lui $R[f]$ dacă f parcurge mulțimea funcțiilor a căror diferență divizată de ordinul $n+1$ rămîne cuprinsă în $[0, 1]$. Dacă f este o astfel de funcție, este clar că $R_m[f]$ nu depășește termenul general (corespunzător) al șirului (87). Trecînd la limită, rezultă că $R[f]$ nu depăşeşte pe A. Fie acum ε un număr pozitiv oarecare. Să ţinem seamă de continuitatea funcţiei de x, $R[\varphi_{n+1,x}]$, deci de continuitatea şi de nenegativitatea funcţiei de x, $\frac{1}{2}\left\{R[\varphi_{n+1,x}] + |R[\varphi_{n+1,x}]|\right\}$ şi să observăm că punctele pe care o funcţie continuă pe $[a, b]$ se anulează, formează o mulţime închisă. Rezultă că putem găsi un număr finit k de intervale disjuncte $[\alpha_i, \beta_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$, aparţinînd lui (a, b) şi astfel ca funcţia $R[\varphi_{n+1,x}]$ să fie nenegativă pe aceste intervale şi astfel ca să avem

$$(n+1)\sum_{i=1}^{k}\int_{\alpha_i}^{\beta_i} R[\varphi_{n+1,x}]\,dx > A - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{89}$$

Putem să presupunem $a < \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \ldots < \alpha_k < \beta_k < b$. Fie $M = \max\limits_{x \in [a,b]} (n+1)|R[\varphi_{n+1,x}]|$ şi să alegem punctele α_i', β_i', $i = 1, 2, \ldots, k$ astfel ca să avem $a < \alpha_1' < \alpha_1$, $\beta_k < \beta_k' < b$, $\beta_{i-1} < \beta_{i-1}' < \alpha_i' < \alpha_i$, $i = 2, 3, \ldots, k$ şi ca

$$M\sum_{i=1}^{k}(\alpha_i - \alpha_i' + \beta_i' - \beta_i) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{90}$$

Fie acum f o funcţie a cărei derivată de ordinul $n+1$ există şi este continuă pe $[a, b]$, această derivată reducîndu-se la $(n+1)!$ pe intervalele $[\alpha_i, \beta_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$, la 0 pe intervalele $[a, \alpha_1']$, $[\beta_k', b]$, $[\beta_{i-1}', \alpha_i]$, $i = 2, 3, \ldots, k$ şi la cîte o funcţie liniară pe fiecare dintre intervalele $[\alpha_i', \alpha_i]$, $[\beta_i, \beta_i']$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Funcţia f considerată aparţine lui $\mathcal{C}_k$ şi formula (29) a mediei ne arată că diferenţa sa divizată de ordinul $n+1$ rămîne cuprinsă în $[0, 1]$. Ţinînd seamă de reprezentarea (85), avem pentru această funcţie

$$R[f] = (n+1)\sum_{i=1}^{k}\int_{\alpha_i}^{\beta_i} R[\varphi_{n+1,x}]\,dx +$$

$$+ (n+1)\left\{\sum_{i=1}^{k}\int_{\alpha_i'}^{\alpha_i} R[\varphi_{n+1,x}]\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}\,dx + \sum_{i=1}^{k}\int_{\beta_i}^{\beta_i'} R[\varphi_{n+1,x}]\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}\,dx\right\}. \tag{91}$$

Însă

$$\begin{gathered}(n+1)\left|\sum_{i=1}^{k}\int_{\alpha_i}^{\alpha_i} + \sum_{i=1}^{k}\int_{\beta_i}^{\beta_i'} R[\varphi_{n+1,x}]\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}\,dx\right| \leqq \\ \leqq (n+1)\left\{\sum_{i=1}^{k}\int_{\alpha_i'}^{\alpha_i} + \sum_{i=1}^{k}\int_{\beta_i}^{\beta'} |R[\varphi_{n+1,x}]|\,dx\right\} \leqq M\sum_{i=1}^{k}(\alpha_i - \alpha_i' + \beta_i' - \beta_i) < \frac{\varepsilon}{2}.\end{gathered} \tag{92}$$

Ţinînd seamă de (89), (92), din formula (91) rezultă că $R[f] > A - \varepsilon$. Numărul A este deci marginea superioară indicată în enunţul teoremei. Teorema 17 este deci demonstrată.

În această teoremă am presupus $R[x^{n+1}] > 0$. În cazul contrar, deci dacă $R[x^{n+1}] < 0$, proprietatea şi demonstraţia sînt analoage. În acest caz $B > 0$, $A \geqq 0$.

În cazurile $A = 0$ sau $B = 0$, funcţionala $R[f]$ este de formă simplă.

Este uşor de demonstrat că dacă $f \in \mathcal{C}_k$ are o derivată de ordinul $n+1$ continuă pe $[a, b]$, avem

$$R[f] = \frac{1}{(n+1)!}\{Af^{(n+1)}(\xi) - Bf^{(n+1)}(\eta)\}, \quad \xi, \eta \in [a, b].$$

Dacă $f \in \mathcal{C}_k^*$ şi dacă d este marginea superioară a valorii absolute a diferenţei divizate de ordinul $n+1$ a lui f, avem delimitarea

$$|R[f]| \leqq (A + B)\,d.$$

36. Există şi alte forme sub care se poate pune o funcţională liniară $R[f]$, deci restul unei formule liniare de aproximare. Aceste expresii prezintă un interes mai ales atunci cînd $R[f]$ nu este de formă simplă.

Să presupunem că sîntem în cazul particular (21), (21′) şi să presupunem că $R[f]$ este o funcţională liniară definită şi de grad de exactitate n pe $\mathcal{F}$. Să considerăm o descompunere de forma

$$R[f] = R_1[f] + \{R[f] - R_1[f]\}, \tag{93}$$

unde $R_1[f]$ este o funcţională liniară definită pe $\mathcal{F}$ şi unde funcţionala liniară (definită de asemenea pe $\mathcal{F}$) $R[f] - R_1[f]$ are un grad de exactitate $n + p > n$. Atunci dacă $R_1[f]$ şi $R[f] - R_1[f]$ sînt de formă simplă, avem

$$R[f] = R[x^{n+1}]\,[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+2}; f] + K[\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_{n+p+2}'; f], \tag{94}$$

unde $K \neq 0$ este independent de funcţia f şi ξ_i, ξ_i' sînt grupe de $n+2$ resp. $n+p+2$ puncte distincte în E.

Fără a avea pretenţia de a face aici o teorie generală, vom arăta, pe două exemple, cum se poate găsi efectiv o reprezentare de forma (94) pentru restul anumitor formule de aproximare.

37. Să considerăm formula de cuadratură a lui Hardy,

$$\int_0^6 f(x)\,dx = 0{,}28\,[f(0) + f(6)] + 1{,}62\,[f(1) + f(5)] + 2{,}2f(3) + R[f].$$

Gradul de exactitate al restului $R[f]$ este 5. Un calcul simplu ne arată că $R[\varphi_{6,3}] = \frac{81}{50} > 0$, $R[\varphi_{6,5}] = -\frac{17}{150} < 0$ şi deci, în virtutea teoremei 15, *restul nu este de formă simplă*.

Pentru a pune $R[f]$ sub forma (94) este avantajos să considerăm întîi funcţionala liniară $R^*[f] = R[f']$, pe care am considerat-o deja în § precedent. Într-adevăr, este destul să găsim o descompunere de forma (94) pentru această funcţională liniară. Descompunerea corespunzătoare pentru $R[f]$, rezultă imediat.

Avem

$$R^*[f] = -63\,[0,0,1,1,3,3,5,5;f] + 190{,}8\,[0,1,1,3,3,5,5,6;f] - \\ - 63\,[1,1,3,3,5,5,6,6;f].$$

Fie

$$R_1[f] = \mu_1[0,0,1,1,3,3,5,5;f] + \mu_2[0,1,1,3,3,5,5,6;f] + \\ + \mu_3[1,1,3,3,5,5,6,6;f], \tag{95}$$

unde

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 64{,}8. \tag{96}$$

Avem atunci

$$R^*[f] - R_1[f] = 6\,(63+\mu_1)\,[0,0,1,1,3,3,5,5,6;f] - \\ - 6\,(63+\mu_3)\,[0,1,1,3,3,5,5,6,6;f] \tag{97}$$

care are un grad de exacitate > 6.

Funcţionalele liniare (95), (97) sînt de forma simplă dacă $\mu_1 = \mu_3$, μ_2 sînt nenegativi. Găsim astfel următoarea expresie a restului în formula lui Hardy,

$$R[f] = \frac{9}{700}\left\{6\,!\,[\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_7;f] - \frac{5\,(63+\mu_1)}{648}\,8\,!\left[\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_9;f\right]\right\},$$

unde f este continuu pe $[0,6]$, ξ_i sînt 7 puncte distincte iar η_i sînt 9 puncte distincte ale intervalului $(0,6)$.

Din metoda particulară de demonstraţie rezultă că în această formulă avem $0 \leqq \mu_1 \leqq 32{,}4$.

Dacă f are o derivată continuă de ordinul 8 pe $(0,6)$, avem

$$R[f] = \frac{9}{700}\left\{f^{(6)}(\xi) - \frac{5\,(63+\mu_1)}{648}\,f^{(8)}(\eta)\right\}, \quad \xi,\eta \in (0,6).$$

Dacă în această formulă punem $\mu_1 = \frac{9}{5}$, găsim restul bine cunoscut [24]

$$R[f] = \frac{9}{700}\left\{f^{(6)}(\xi) - \frac{1}{2}\,f^{(8)}(\eta)\right\}, \quad \xi,\eta \in (0,6). \tag{98}$$

Dar putem lua şi $\mu_1 = 0$ şi atunci găsim

$$R[f] = \frac{9}{700}\left\{f^{(6)}(\xi) - \frac{35}{72}\,f^{(8)}(\eta)\right\}, \quad \xi,\eta \in (0,6),$$

unde coeficientul $\frac{35}{72}$ este mai mic decît coeficientul corespondent $\frac{1}{2}$ din formula (98).

38. Ca o a doua aplicaţie, să luăm formula de cuadratură a lui Weddle,

$$\int_0^6 f(x)dx = 0{,}3\,[f(0)+f(2)+f(4)+f(6)] + 1{,}5\,[f(1)+f(5)] + 1{,}8f(3) + R[f],$$

al cărei rest este încă de grad de exactitate 5. Avem $R[\varphi_{6,3}] = \frac{3}{10} > 0$, $R[\varphi_{6,4}] = -\frac{13}{30} < 0$, deci *restul nu este de formă simplă*. Procedînd ca la exemplul precedent, avem

$$\frac{5}{18}R^*[f] = -3\,[0,0,1,1,2,2,3,3;f] - 4\,[0,1,1,2,2,3,3,4;f] + \\ + 4\,[1,2,2,3,3,4,4,5;f] - 4\,[2,3,3,4,4,5,5,6;f] - \\ - 3\,[3,3,4,4,5,5,6,6;f]$$

şi luăm

$$\frac{5}{18}R_1[f] = \mu_1\,[0,0,1,1,2,2,3,3;f] + \mu_2\,[0,1,1,2,2,3,3,4;f] + \\ + \mu_3\,[1,1,2,2,3,3,4,4;f] + \mu_4\,[1,2,2,3,3,4,4,5;f] + \\ + \mu_3\,[2,2,3,3,4,4,5,5;f] + \mu_2\,[2,3,3,4,4,5,5,6;f] + \\ + \mu_1\,[3,3,4,4,5,5,6,6;f] \tag{99}$$

unde

$$2(\mu_1+\mu_2+\mu_3) + \mu_4 = -10 \tag{100}$$

şi atunci avem

$$-\frac{5}{18}\,[R^*[f] - R_1[f]] = 16(\mu_1+3)\,[0,0,1,1,2,2,3,3,4,4;f] + \\ + 20(2\mu_1+\mu_2+10)\,[0,1,1,2,2,3,3,4,4,5;f] + \\ + 16(3\mu_1+2\mu_2+\mu_3+17)\,[1,1,2,2,3,3,4,4,5,5;f] + \\ + 20(2\mu_1+\mu_2+10)\,[1,2,2,3,3,4,4,5,5,6;f] + \\ + 16(\mu_1+3)\,[2,2,3,3,4,4,5,5,6,6;f]. \tag{101}$$

Să luăm $\mu_1 = -3$, $\mu_2 = -2$, $\mu_3 = \mu_4 = 0$. Atunci (100) este verificat şi (99), (101) sînt de forma simplă. Deducem

$$R[f] = -\frac{1}{140}\left\{6\,!\,[\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_7;f] + \frac{1}{5}\,8\,!\,[\eta_1,\eta_2,\ldots,\mu_9;f]\right\},$$

funcţia f şi punctele ξ_i, η_i verificînd aceleaşi condiţii ca şi în exemplul precedent (nr. **37**). Dacă funcţia f are o derivată continuă de ordinul 8 pe $(0,6)$, avem

$$R[f] = -\frac{1}{140}\left\{f^{(6)}(\xi) + \frac{1}{5}\,f^{(8)}(\eta)\right\}, \quad \xi,\eta \in (0,6).$$

În formula binecunoscută [24],

$$R[f] = -\frac{1}{140}\left\{ f^{(6)}(\xi) + \frac{9}{10} f^{(8)}(\eta)\right\} \qquad \xi, \eta \in (0, 6),$$

coeficientul derivatei de ordinul 8 este de 4,5 ori mai mare în valoare absolută.

Să mai observăm că dacă, pe lîngă (100), avem şi

$$20\mu_1 + 9\mu_2 + 2\mu_3 = -96, \tag{102}$$

putem scrie

$$\begin{aligned} -\frac{5}{18}\{R^*[f] - R_1[f]\} = {} & 400(\mu_1 + 3)[0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5; f] + \\ & + 120(18\mu_1 + 5\mu_2 + 74)[0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6; f] + \\ & + 400(\mu_1 + 3)[1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6; f]. \end{aligned} \tag{103}$$

Dacă luăm $\mu_1 = -\frac{51}{11}$, $\mu_2 = -\frac{4}{11}$, $\mu_3 = \mu_4 = 0$, egalităţile (100), (102) sînt verificate şi funcţionalele liniare (99), (103) sînt de forma simplă. Pentru restul $R[f]$ al formulei lui Weddle obţinem

$$R[f] = -\frac{1}{140}\left\{6!\,[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_7; f] - \frac{61}{1815}\,10!\,[\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{11}; f]\right\},$$

unde f este continuu pe $[0, 6]$, ξ_i sînt 7 puncte distincte iar η_i sînt 11 puncte distincte ale intervalului $(0, 6)$.

Dacă funcţia f are o derivată continuă de ordinul 10 pe $(0, 6)$, avem

$$R[f] = -\left\{\frac{1}{140} f^{(6)}(\xi) - \frac{61}{8115} f^{(10)}(\eta)\right\}, \qquad \xi, \eta \in (0, 6).$$

ОБ ОСТАТОЧНОМ ЧЛЕНЕ В НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ ФОРМУЛАХ ПРИБЛИЖЕНИЯ АНАЛИЗА

(Краткое содержание)

В настоящей работе мы рассмотрим формулы приближения вида (*) где $A[f]$, $B[f]$, значит и остаточный член $R[f] = A[f] - B[f]$ линейные (адитивные и однородные) функционалы, определенные на некотором пространстве $\mathcal{F}$ вещественных и непрерывных функций вещественного переменного, определенных на линейном множестве (в частности на промежутке) E. Знание структуры остаточного члена $R[f]$ важна для его надлежащего ограничения в применениях. В предположении, что этот остаточный член равен нулю на данных функциях (1), мы

изучаем новое выражение этого остаточного члена. Это выражение, в известном смысле, общее известных до сих пор и лучше обнаруживает его структуру. Мы добъёмся этого результата при помощи теории выпуклых функций, которую мы обобщили в других работах [12, 13].

Работа разделена на четыре параграфа.

В § 1 мы сперва рассмотрим снова понятие разделенной разности относительно системы (18) $n+2$ функции и определенной формулой (22). Определитель V, появляющийся во втором члене, определён формулой (1) если точки x_i различны. Функции (2) образуют систему (I) (или интерполяционную систему) если имеем (10) для всякого множества m различных точек x_i из E. Можно обобщить предыдущие понятия и определения на тот случай, когда точки x_i не все различны. С этой целью обобщают определитель (1) определителем (3), где появляются и производные функций (2) до k_i —1-ого порядка на соответствующих точках z_i, k_i -ого порядка кратности. Функции (2) образуют регулярную систему (I) k-ого порядка если имеем (10), причем все числа $k_i \leq k$ (если $k=m$, система называется, в частности, полно регулярной). При помощи такого рода предположений регулярности относительно функций (18), можно расширить понятие разделенной разности на случай не всех различных узлов.

Если функции (18) образуют систему (I), то функция f называется выпуклой, невогнутой, невыпуклой, соответственно вогнутой относительно функций (19), в зависимости от того, имеем ли (25) на всяком множестве $n+2$ различных точек. Тогда линейный функционал $R[f]$ называется *простого вида* на $\mathcal{F}$ если для всякой $f \in \mathcal{F}$ он вида (30), с постоянной $K \neq 0$, независимой от функции f. Имеем тогда.

ТЕОРЕМА 5. *Необходимое и достаточное условие для того, чтобы линейный функционал $R[f]$ был бы простого вида — иметь $R[f] \neq 0$ для всякой функции f $(\in \mathcal{F})$ выпуклой относительно функций* (19).

В § 2 мы несколько подробно изучаем некоторые теоремы о среднем, относительно разделенных разностей, на различных и не различных узлах. Мы уже изучали теоремы такого рода в других работах [12, 14, 18], в частном случае (21), (21′). Эти результаты в тесной связи с важными теоремами о среднем, принадлежащие Д. В. Виддеру [28]. Полное значение этих формул о среднем следует из найденного представления для остаточного члена $R[f]$.

В § 3 мы изучаем некоторые частные признаки, позволяющие судить о том, является линейный функционал простого вида или нет. Мы изучаем, в частности, случай, когда линейный функционал $B[f]$ из формулы (*) дан формулами (51), (52), где $L(f|x)$ — линейная интерполяционная комбинация функций (19), данная формулой вида (11). Тогда, если линейный функционал $A[f]$ положителен и если порядки кратности k_i точек z_i лежащих внутри промежутка E четны, остаточный член $R[f]$ простого вида. Формула численного интегрирования Гаусса и формула (54), остаточный член которой изучал И. Радон [21] — частные случаи предыдущей формулы. Изучение линейных функционалов вида (58) позволяет определить все случаи, в которых остаточ-

ный член в квадратурной формуле (62) — простого вида. Здесь мы в частном случае (21), (21′). В том же частном случае мы дадим признак выражений нижеприведенной теоремой.

ТЕОРЕМА 15. *Пусть даны натуральное число n и целое число k, $0 \leqq k \leqq n-1$; если линейный функционал $R[f]$ 1°. определен на $\mathcal{C}_k$; 2°. порядка точности n; 3°. ограничен относительно нормы* (78); *тогда, для того чтобы $R[f]$ был бы простого вида, необходимо и достаточно иметь* (79), *где функции $\varphi_{n+1,\lambda}$ определены* (64).

Здесь $\mathcal{C}_k$ — пространство непрерывных функций $f(x)$, имеющих непрерывные производные порядка i, $f^{(i)}(x)$ на $[a_i, b_i]$ для $i=0, 1, \ldots, k$; $0 \leqq k \leqq n-1$, $[a, b]=[a_0, b_0] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq \ldots \supseteq [a_k, b_k]$, $R[f]$ (конечного) порядка точности n если $R[x^i]=0$, $i=0, 1, \ldots, n$, $R[x^{n+1}] \neq 0$.

Этот результат получен обобщением (выраженным теоремой 14) теоремы приближения выпуклых функций высшего порядка, которую мы дали в другой работе [15].

В § 4 мы изучаем случай, когда линейный функционал $R[f]$ — не простого вида. В частности, в случае (21), (21′) имеем:

ТЕОРЕМА 17. *Если: 1°. линейный функционал $R[f]$ определен на $\mathcal{C}_k$, ограничен относительно нормы* (78) *и порядка точности n, причем $R[x^{n+1}]>0$; 2°. A — точная верхняя граница $R[f]$ для функций $f \in \mathcal{C}_k$, разделенная разность порядка $n+1$ которых лежит между 0 и 1 и если $B=A-R[x^{n+1}]$, тогда для всякого $\varepsilon>0$, линейный функционал $R[f]$ — вида* (85) *причем $K=A+\varepsilon$, $K'=B+\varepsilon$.*

Работа окончается некоторыми рассмотрениями относительно квадратурных формул Харди и Веддле, остаточный член которых — не простого вида. Пользуясь предыдущими методами, мы улучшим, между прочим, значение коэффициентов производных появляющихся в хорошо известных выражениях этих остаточных членов.

SUR LE RESTE DANS CERTAINES FORMULES LINÉAIRES D'APPROXIMATION DE L'ANALYSE

(*Résumé*)

Dans ce travail nous considérons des formules d'approximation de la forme (*), où $A[f]$, $B[f]$, donc aussi le *reste* $R[f]=A[f]-B[f]$, sont des fonctionnelles linéaires (additives et homogènes) définies sur un espace vectoriel $\mathcal{F}$ de fonctions réelles et continues d'une variable réelle définies sur un ensemble linéaire (en particulier un intervalle) E. La connaissance de la structure du reste $R[f]$ est importante en vue de sa délimitation convenable dans les applications. En supposant que ce reste s'annule sur les $n+1$ fonctions données (19), nous étudions une nouvelle expression de ce reste. Cette expression est, dans un certain sens, plus générale que

celles connues jusqu'ici et fait mieux ressortir sa structure. Nous obtenons ces résultats à l'aide de la théorie des fonctions convexes que nous avons généralisée autrefois [12, 13].

Ce travail est divisé en 4 §§.

Dans le § 1, nous reprenons d'abord la notion de différence divisée par rapport à un système (18) de $n+2$ fonctions et définie par la formule (22). Les déterminants V qui interviennent au second membre sont définies par la formule (1) si les points x_i sont distincts. Les fonctions (2) forment un système (I) (ou système d'interpolation) si nous avons (10) pour tout ensemble de m points distincts x_i de E. On peut généraliser les notions et les définitions précédentes au cas où les points x_i ne sont plus distincts. Pour cela on généralise le déterminant (1) par le déterminant (3) où interviennent aussi les dérivées des fonctions (2) jusqu'à l'ordre $k_i - 1$ sur les points z_i d'ordre de multiplicité k_i respectifs. Les fonctions (2) forment alors un système (I) régulier d'ordre k si nous avons (10), les k_i étant $\leq k$ (si $k=m$ le système est dit, en particulier, complètement régulier). En faisant des hypothèses de régularité de cette nature sur les fonctions (18), on peut étendre la définition de la différence divisée au cas où les noeuds ne sont plus tous distincts.

Si les fonctions (18) forment un système (I), la fonction f est dite convexe, nonconcave, nonconvexe resp. concave par rapport aux fonctions (19) suivant que nous avons (25) sur tout ensemble de $n+2$ points distincts. Alors la fonctionnelle linéaire $R[f]$ est dite de la *forme simple* sur $\mathcal{F}$ si pour tout $f \in \mathcal{F}$, elle est de la forme (30), où $K \neq 0$ est une constante indépendante de la fonction f. Nous avons alors le

THÉORÈME 5. — *La condition nécessaire et suffisante pour que la fonctionnelle linéaire $R[f]$ soit de la forme simple est que l'on ait $R[f] \neq 0$ pour toute fonction f $(\in \mathcal{F})$ convexe par rapport aux fonctions* (19).

Dans le § 2 nous étudions, avec certains détails, des théorèmes de la moyenne relatives aux différences divisées, sur des noeuds tous distincts ou non. Nous avons déjà étudié des théorèmes de cette sorte dans d'autres travaux [12, 14, 18], dans la cas particulier (21), (21′). Nos résultats sont étroitement liés à d'importants théorèmes dus à D. V. Widder [28]. Toute l'importance de ces formules de la moyenne résulte de la représentation que nous trouvons pour le reste $R[f]$.

Dans le § 3 nous étudions quelques critères particuliers permettant de décider si une fonctionnelle linéaire est de la forme simple ou non. En particulier nons étudions le cas où la fonctionnelle linéaire $B[f]$ de la formule (*) est donnée par les formules (51), (52), où $L(f|x)$ est la combinaison linéaire d'interpolation des fonctions (19), donnée par une formule de la forme (11). Alors si la fonctionnelle linéaire $A[f]$ est positive et si les ordres de multiplicité k_i des ponts z_i qui se trouvent à l'intérieur de l'intervalle E sont pairs, le reste $R[f]$ est bien de la forme simple. La formule d'intégration numérique de Gauss et la formule (54), dont le reste a été étudié par J. Radon [21], sont des cas particuliers de la formule précédente. L'étude des fonctionnelles linéaires de la forme (58) permet de déterminer tous les cas où le reste de la formule de quadrature

(62) est de la forme simple. Ici nous sommes dans le cas particulier (21), (21′). Toujours dans ce cas particulier, nous donnons le critère exprimé par le

THÉORÈME 15. — *Etant donnés le nombre naturel n et l'entier k,* $0 \leqq k \leqq n-1$, *si la fonctionnelle linéaire* $R[f]$ *est* : 1° *définie sur* $\mathcal{C}_k$, 2° *du degré d'exactitude n,* 3° *bornée par rapport à la norme* (78),

pour que $R[f]$ *soit de la forme simple il faut et il suffit que l'on ait* (79), *où les fonctions* $\varphi_{n+1,\lambda}$ *sont définies par* (64).

Ici $\mathcal{C}_k$ est l'espace des fonctions $f(x)$ continues et ayant des dérivées d'ordre i, $f^{(i)}(x)$ continues sur $[a_i, b_i]$ pour $i = 0, 1, \ldots, k$, $0 \leqq k \leqq n-1$, $[a, b] = [a_0, b_0] \supseteqq [a_1, b_1] \supseteqq \ldots \supseteqq [a_k, b_k]$. $R[f]$ est du degré d'exactitude n (fini) si $R[x^i] = 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $R[x^{n+1}] \neq 0$.

Ce résultat est obtenu par la généralisation (exprimée par le théorème 14) d'un théorème d'approximation sur les fonctions convexes d'ordre supérieur, que nous avons donné autrefois [15].

Dans le § 4 nous étudions le cas où la fonctionnelle linéaire $R[f]$ n'est pas de la forme simple. En particulier, si nous avons (21), (21′), nous démontrons le

THÉORÈME 17. — *Si*: 1°. *la fonctionnelle linéaire* $R[f]$ *est définie sur* $\mathcal{C}_k$, *bornée par rapport à la norme* (78) *et du degré d'exactitude n avec* $R[x^{n+1}] > 0$, 2°. *A est la borne supérieure de* $R[f]$ *pour les fonctions* $f \in \mathcal{C}_k$ *dont la différence divisée d'ordre* $n+1$ *reste comprise dans* $[0, 1]$ (donc entre 0 et 1) *et* $B = A - R[x^{n+1}]$,

pour tout $\varepsilon > 0$, *la fonctionnelle linéaire* $R[f]$ *est de la forme* (85), *avec* $K = A + \varepsilon$, $K' = B + \varepsilon$.

Nons terminons ce travail par quelques considérations sus les formules de quadrature de Hardy et de Weddle, dont les restes ne sont pas de la forme simple. En employant les méthodes précédentes, nous précisons, entre autres, les coefficients des dérivées qui interviennent dans les expressions bien connues de ces restes.

BIBLIOGRAFIE

1. Birkhoff G. D., *General mean value and remainder theorems*, Trans. Amer. Math. Soc., **7**, 107–130 (1906).
2. Cauchy A., *Sur les fonctions interpolaires*, Comptes Rendus de l'Acad. des Sci. Paris, **11**, 775–789 (1840).
3. Гончаров В. Л. *Теория интерполирования и приближения функций*, Гос. Изд. Техн. Теор. Лит., Москва, 1954.
4. Goursat E., *Cours d'analyse mathématique*, I, (s.d.).
5. Kowalewski G., *Interpolation und genäherte Quadratur*, 1932.
6. Markoff A. A., *Differenzenrechnung*, 1896.
7. Mises R. v., *Über allgemeine Quadraturformeln*, J. f. die reine u. andgew. Math. **174**, 56–67 (1936).

8. Netto E., *Lehrbuch der Combinatorik*, 1901.
9. Obrechkoff N., *Neue Quadraturformeln*, Abh. preuss. Akad. Wiss., 1940, nr. 4, 1–20.
10. Petr K., *Asupra unei formule pentru calculul numeric al integralelor definite*, Casopis, **44**, 454–455 (1915) (în l. cehă).
11. — *Observaţie asupra calculului numeric al integralelor definite*, ibid., **56**, 67–70 (1927) (în l. cehă).
12. Popoviciu T., *Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles*, Mathematica, **8**, 1–85 (1934).
13. — *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur*, (I), ibid., **12**, 81–92 (1936).
14. — *Introduction à la théorie des différences divisées*, Bull. Math. Soc. Roum. des Sci., **42**, 65–78 (1940).
15. — *Notes sur les fonctions convexes d'ordre supérieur*, (IX), ibid., **43**, 85–141 (1942).
16. — *Asupra formei restului în unele formule de aproximare ale analizei*, Lucrările Ses. Gen. ştiinţ. a Acad. R.P.R. din 1950, p. 183–185.
17. — *Asupra restului în unele formule de derivare numerică*, Studii şi Cerc. Matem., **3**, 53–122 (1952).
18. — *Folytonos függvények középértéktételeiről*, A Magyar Tud. Akad. Közl., **4**, 353–356 (1954).
19. — *Asupra unei generalizări a formulei de integrare numerică a lui Gauss*, Studii şi Cerc. Ştiinţ. Iaşi, **6**, 29–57 (1955).
20. — *Asupra unor ecuaţii funcţionale*, Studii şi Cerc. Ştiinţ. (Cluj), Seria I-a, **VI**, nr. 3–4, 37–49 (1955).
21. Radon J., *Restausdrücke bei Interpolations und Quadraturformeln durch bestimmte Integrale*, Monatshefte f. Math. u. Phys., **42**, 389–396 (1935).
22. Ремез Э. Я., *Про деякі класи лінійних функціоналів у просторах* C_p *та про остаткові члени формул наближеного аналізу*, I, Збірник Праць Інституту Математики Акад. Наук У.Р.С.Р., 3, 21–62 (1939).
23. Sard A., *Integral representation of remainders*, Duke Math. J., **15**, 333–345 (1948)
24. Steffensen J. F., *Interpolation*, New-York, 1950.
25. Stieltjes T. J., *Over Lagrange's interpolatie formulae*, Versl. an Med. der kon. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam, (2), **17**, 239 (1882).
26. — *Einige bemerkingen omtrent de differential quotienten van eene functie van eene veranderlijke*, Nieuw Arch. voor Wiskunde, **9**, 106–111 (1882).
27. Watson G. N., *Über eine Formel zur numerischen Berechnung der bestimmten Integrale*, Casopis, **65**, 1–7 (1935).
28. Widder D. V., *On the Interpolatory Properties of a Linear Combination of Continuous Functions*, Amer. J. of Math., **49**, 221–234 (1927).