DESPRE CENTRUL CERCURILOR EXÎNSCRISE ALE TRIUNGHIURILOR ÎN PLANUL HIPERBOLIC

DE

BITAY LADISLAU
(Cluj)

Lucrare prezentată la sesiunea ştiinţifică din 20—22 mai 1959 a Universităţii ,,Babeş—Bolyai'', Cluj.

Relativ la concurenţa bisectoarelor unui triunghi în planul hiperbolic se cunoaşte următoarea teoremă [1] :

Bisectoarele a două unghiuri exterioare şi bisectoarea interioară a celui de al treilea unghi al unui triunghi formează un fascicol. Centrul acestui fascicol poate fi atît un punct de la infinit, cît şi un punct ideal.

Din demonstraţia acestei teoreme se deduce uşor că în aceste cazuri triunghiului considerat i se poate exînscrie respectiv un cerc, un oriciclu respectiv un hiperciclu.

Ne propunem să rezolvăm următoarea problemă :

Fiind date în planul hiperbolic două puncte A şi B, să se determine locul punctelor C în aşa fel ca triunghiului ABC să i se exînscrie un oriciclu (latura AB să fie tangentă la acest oriciclu într-un punct interior).

Pentru a rezolva această problemă vom folosi metoda pe care am aplicat-o în lucrările anterioare [2] şi [3], care tratează probleme analoage. Această metodă constă în următoarele : considerăm o semidreaptă AA' cu originea în punctul A şi care formează un unghi oarecare α cu dreapta AB. Căutăm să determinăm pe această semidreaptă punctele locului, care la rîndul lor — variind unghiul α — vor descrie locul căutat.

Conform teoremei amintite, pe semidreapta AA' putem construi în felul următor un punct al locului (fig. 1) :

Din punctul A ducem bisectoarea exterioară $A\Omega$ a unghiului α. Dreapta $B\Omega$ face un unghi u cu dreapta AB. Dublînd acest unghi, obţinem o semidreaptă BB' cu originea în B. Această semidreaptă poate intersecta semidreapta AA' într-un punct C, poate fi paralelă sau superparalelă cu ea. Conform acestor cazuri, semidreptei AA' îi aparţine respectiv un punct al locului aflat la distanţă finită, la infinit, respectiv nu-i aparţine nici un punct al locului.

Din această construcţie reiese clar că pentru a obţine toate triunghiurile ABC cu proprietatea indicată şi situate într-un semiplan determinat de dreapta AB, este suficient să variem unghiul α între 0 şi $\pi - 2\Pi(c)$ unde am notat cu c latura AB a triunghiului.

Pentru a determina acest loc geometric, recurgem la modelul Beltrami-Klein al planului hiperbolic. Să presupunem că punctul A coincide cu centrul cercului modelului şi să luăm raza acestui cerc egală cu unitatea.

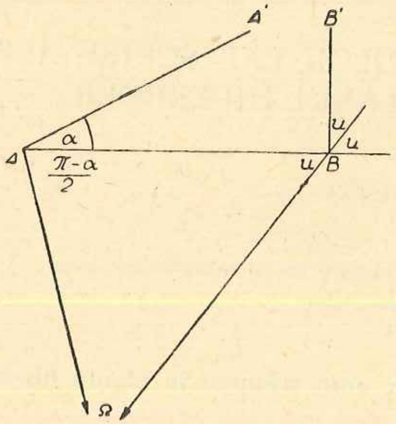


Fig. 1

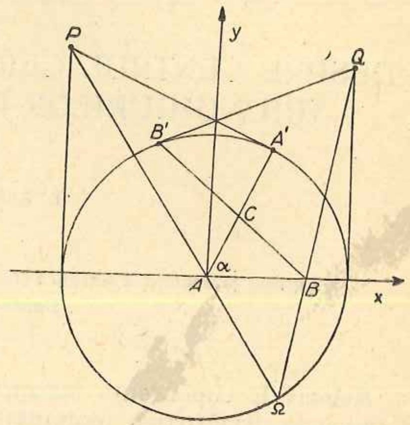


Fig. 2

Repetînd construcţia din figura 1, pe model, obţinem figura 2. Fie $(c, 0)$ coordonatele punctului B[1]). Ecuaţia dreptei AA' va fi

$$y = x \operatorname{tg} \alpha,$$

iar a dreptei BB' va fi :

$$y = \frac{2\left(c - \sin\frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}}{(2 - c^2)\sin^2\frac{\alpha}{2} - 2c\sin\frac{\alpha}{2} + 2c^2 - 1}(x - c).$$

Eliminînd pe α între aceste două ecuaţii obţinem ecuaţia locului căutat. Este mai avantajos să trecem la coordonate polare (ρ, α) :

$$\rho \sin \alpha = \frac{2\left(c - \sin\frac{\alpha}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}}{(2 - c^2)\sin^2\frac{\alpha}{2} - 2c\sin\frac{\alpha}{2} + 2c^2 - 1}(\rho\cos\alpha - c).$$

De aici, după ordonare, obţinem

$$\rho = \frac{1 - k\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin^3\frac{\alpha}{2} - 2\sin\frac{\alpha}{2} + k}, \tag{1}$$

[1]) Aici notăm cu c distanţa euclidiană şi cu $\bar{c}$ distanţa hiperbolică a segmentului AB.

unde am notat $k = \frac{1}{c}$, iar $0 < \alpha < \pi - 2\Pi(\bar{c})$. Desigur că ne interesează numai acele puncte ale curbei (1), care sînt în interiorul cercului unitar, adică acelea pentru care avem $\rho < 1$.

Să studiem variaţia curbei (1). Se observă că ρ depinde numai de $\sin\frac{\alpha}{2}$, deci (1) se poate pune sub forma mai simplă

$$\rho = \frac{1 - kz}{z^3 - 2z + k},$$

unde $z = \sin\frac{\alpha}{2}$ poate varia în intervalul $(0, c)$, avînd în vedere că

$$\sin\left[\frac{\pi}{2} - \Pi(\bar{c})\right] = \cos\Pi(\bar{c}) = c.$$

Notînd cu $\delta(z)$ diferenţa dintre numitor şi numărător avem după ordonare

$$\delta(z) = z^3 + (k - 2)z + k - 1.$$

Să studiem semnul acestui polinom. Ţinînd seamă de descompunerea

$$\delta(z) = (z + 1)(z^2 - z + k - 1),$$

$\delta(z)$ va fi nenegativ dacă $k = \frac{1}{c} \geqslant \frac{5}{4}$, şi în acest caz curba (1) se va situa în interiorul cercului unitar.

Dacă $k = \frac{1}{c} < \frac{5}{4}$, polinomul de gradul doi are două rădăcini reale şi distincte

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5 - 4k}}{2}, \tag{2}$$

ambele cuprinse în intervalul $(0, c)$. Deci semnul lui $\delta(z)$ va fi pozitiv pentru valorile lui z cuprinse în intervalele $(0, z_1)$ respectiv (z_2, c) şi negativ în intervalele (z_1, z_2). Rădăcinilor (2) le corespund cîte un punct pe circumferinţa modelului. (Locul geometric va avea două puncte la infinit în direcţiile date de (2)).

Pentru a studia concavitatea curbei, formăm expresia

$$\frac{1}{\rho}\left[\frac{1}{\rho} + \left(\frac{1}{\rho}\right)''\right] = \frac{(z^3 - 2z + k)\,[3kz^4 - (6k^2 + 5)\,z^3 + (3k^3 + 12k)\,z^2 - 9k^2z + 2k^3]}{4\,(1 - kz)^4}$$

căreia îi studiem semnul. În acest scop, descompunem în factori polinomul din paranteza mare :

$$\frac{1}{\rho}\left[\frac{1}{\rho} + \left(\frac{1}{\rho}\right)''\right] = \frac{(z^3 - 2z + k)\,(z - k)^2\,(3kz^2 - 5z + 2k)}{4(1 - kz)^4}.$$

Se verifică uşor că această expresie rămîne nenegativă pentru valorile lui $k \geqslant \frac{5}{4}$ şi pentru valorile lui z cuprinse în intervalul $\left(0, \frac{1}{k}\right)$. De asemenea pentru $1 < k < \frac{5}{4}$ această expresie rămîne pozitivă dacă $0 < z \leqslant z_1$ şi

$z_2 \leqslant z < \frac{1}{k}$, unde rădăcinile z_1, z_2 sînt date de formula (2). Prin urmare expresia de care depinde concavitatea curbei este pozitivă în intervalele care ne interesează, deci curba are concavitatea către pol.

Să calculăm mărimea unghiurilor sub care această curbă intersectează dreapta AB în punctele A și B. Din figura 1 se constată că aceste unghiuri, în planul hiperbolic sînt egale cu $2\Pi(\bar{c})$. Pe model, (fig. 2), aceste unghiuri sînt reprezentate respectiv, în punctul A printr-un unghi a cărui mărime euclidiană este egală cu $2\Pi(\bar{c})$, iar în punctul B, printr-un unghi a cărui mărime euclidiană, este mai mare decît $2\,\Pi(\bar{c})$, [4]. Pentru a calcula acesta din urmă, ne folosim de formula

$$\operatorname{tg} V = \frac{(1-kz)(z^3-2z+k)}{2kz^3-3z^2+2-k^2}\,\frac{2}{\cos\frac{\alpha}{2}},$$

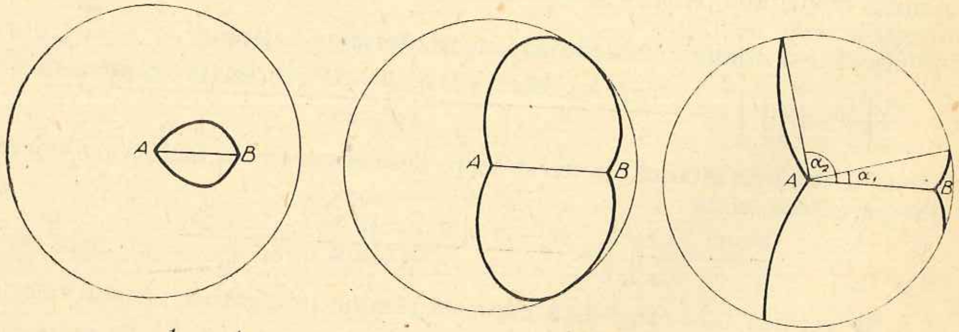
Luînd în această formulă $\alpha = 0$ obținem

$$\operatorname{tg} V_B = \frac{2k}{2-k^2} = \frac{2c}{2c^2-1}.$$

Din această formulă, ținînd seamă de egalitatea $c = \cos\Pi(\bar{c})$, deducem: Curba respectivă taie dreapta AB în punctul B sub un unghi ascuțit, drept sau obtuz după cum $\Pi(\bar{c})$ este mai mic, egal sau mai mare decît $\frac{\pi}{4}$.

Mai observăm că în cazul $c = \frac{1}{k} = \frac{4}{5}$, pentru $z = \frac{1}{2}$, curba este tangentă la cercul modelului. Acesta înseamnă că ea are un punct la infinit în direcția $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

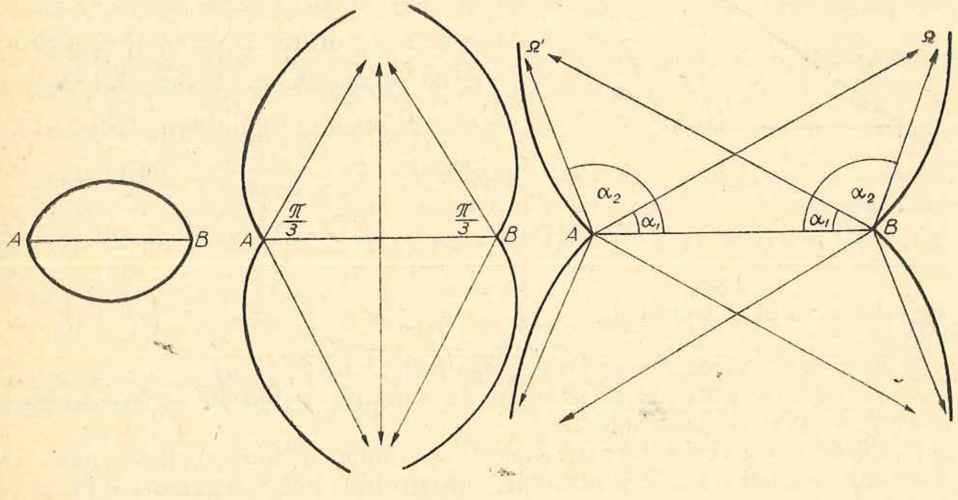
Reprezentînd locul geometric pe model, obținem curbele indicate în figura 3, corespunzătoare cazurilor: 1) $c = \frac{1}{k} < \frac{4}{5}$, 2) $c = \frac{1}{k} = \frac{4}{5}$, 3) $c = \frac{1}{k} > \frac{4}{5}$.



1) $c = \frac{1}{k} < \frac{4}{5}$ 2) $c = \frac{1}{k} = \frac{4}{5}$ 3) $c = \frac{1}{k} > \frac{4}{5}$

Fig. 3

În baza acestor reprezentări putem să construim locurile geometrice din fig. 3 și în planul hiperbolic, dacă ținem seama de faptul că ele sînt simetrice relativ la mediatoarea segmentului AB[2]. (Această simetrie nu se observă pe figura 3, deoarece ea trebuie înțeleasă în sensul hiperbolic. Din contră, simetria locului față de dreapta AB este vizibilă pe model, deoarece modelul este simetric relativ la diametrele cercului de bază). Curbele corespunzătoare din planul hiperbolic sînt arătate în fig. 4.



1) $\cos\Pi(c) < \frac{4}{5}$ 2) $\cos\Pi(c) = \frac{4}{5}$ 3) $\cos\Pi(c) > \frac{4}{5}$

Fig. 4

Pentru a înțelege mai bine construcția acestor curbe, observăm următoarele:

1°. Cînd $\cos\Pi(c) = \frac{4}{5}$ (cazul 2), au loc relațiile

$$\cos\Pi\left(\frac{c}{2}\right) = \operatorname{th}\frac{c}{2} = \frac{\operatorname{sh} c}{\operatorname{ch} c + 1} = \frac{\operatorname{th} c}{1+\frac{1}{\operatorname{ch} c}} = \frac{\cos\Pi(c)}{1+\sin\Pi(c)} = \frac{\frac{4}{5}}{1+\frac{3}{5}} = \frac{1}{2},$$

deci $\Pi\left(\frac{c}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$. Aceasta înseamnă că punctul de la infinit al curbei este tocmai punctul de la infinit al mediatoarei segmentului AB, cum arată figura 4 în cazul 2).

[2]) Mai departe se notează lungimea hiperbolică a segmentului AB cu c în loc de $\bar{c}$.

2°. Pentru a lămuri cazul 3), să amintim mai întîi formula care leagă între ele unghiurile interioare φ şi ψ formate de două semidrepte paralele duse din extremităţile unui segment $AB = c$, cu dreapta AB (fig. 5):

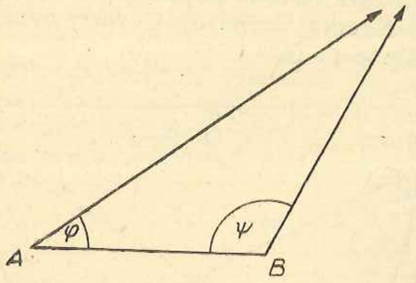


Fig. 5

$$\cos\psi = \frac{\cos\Pi(c) - \cos\varphi}{1-\cos\Pi(c)\cos\varphi}.$$

Să aplicăm această formulă cazului 3) al figurii 4, pentru a calcula unghiul $AB\Omega$. În acest scop, în formula de mai sus facem înlocuirile: $\psi = \widehat{AB\Omega}$ şi $\varphi = \alpha_1$. Ţinînd seama că $\sin\frac{\alpha_1}{2}$ este dat de formula (2) şi că în planul hiperbolic are loc egalitatea $k = \frac{1}{\cos\Pi(c)}$, obţinem:

$$\cos\widehat{AB\Omega} = 2(k-1) - \sqrt{5-4k} = 1 - 2\left(\frac{1+\sqrt{5-4k}}{2}\right)^2 = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha_2}{2} = \cos\alpha_2.$$

De aici rezultă $\widehat{AB\Omega} = \alpha_2$.

Analog se poate demonstra şi egalitatea $\widehat{AB\Omega'} = \alpha_1$.

Aceste rezultate de altfel erau de aşteptat, avînd în vedere simetria curbei în planul hiperbolic.

Curbele din fig. 4 împart planul hiperbolic în două regiuni: una care cuprinde segmentul AB şi alta care nu cuprinde acest segment. Vom numi prima regiune interiorul, iar a doua exteriorul curbei respective. Folosind această terminologie vom demonstra următoarea

TEOREMĂ. *Fiind date două puncte A şi B din planul hiperbolic, un punct C luat din exteriorul respectiv interiorul curbei corespunzătoare din fig. 4 va forma cu punctele A şi B un triunghi ABC căruia i se poate exînscrie un cerc respectiv un hiperciclu.*

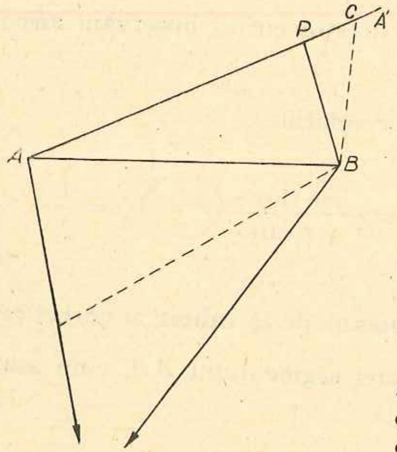


Fig. 6

Într-adevăr, amintindu-ne de construcţia din fig. 1, un punct C luat pe semidreapta AA' dincolo de punctul P al locului situat pe AA', formează împreună cu punctele A şi B un triunghi a cărui bisectoare exterioară relativă la vîrful B întîlneşte bisectoarea exterioară relativă la vîrful A (fig. 6), ceea ce înseamnă că triunghiului ABC i se poate exînscrie un cerc.

Dacă punctul C se ia pe segmentul AP, atunci se vede în mod analog că bisectoarele exterioare amintite sînt superparalele, deci că triunghiului i se poate exînscrie un hiperciclu.

О ЦЕНТРЕ ИЗВНЕ ВПИСАННЫХ КРУГОВ ТРЕУГОЛЬНИКОВ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В этой статье автор решает следующую задачу: пусть даны в гиперболической плоскости две точки A и B; определить геометрическое место точек C при которых треугольнику ABC можно извне вписать орицикл (при этом сторона AB — касательна к этому орициклу во внутренней точке).

Уравнение этой кривой (по модели Белтрами-Клейна гиперболической плоскости) дано формулой (1) в полярных координатах (ρ, α), где $k = \frac{1}{c}$, а $0 < \alpha < \pi - 2\Pi(\bar{c})$; при этом $\bar{c}$ — гиперболическое расстояние стороны AB, а с — евклидовое. Кривая изображена в рис. 3 на модели, а в рис. 4 в гипероблической плоскости. Эти кривые разделяют гиперболическую плоскость в две области, из которых одна — „внутренняя" а другая — „внешняя" кривым. Точки этих областей характеризованы следующим свойством:

Точка C, выбранная из этих областей, определяет вместе с точками A и B треугольник, которому извне вписывается круг, соответственно гиперцикл, в зависимости от того, принадлежит ли точка C внешней, соответственно внутренней части упомянутых кривых.

À PROPOS DU CENTRE DES CERCLES EXINSCRITS DES TRIANGLES DANS LE PLAN HYPERBOLIQUE

RÉSUMÉ

Dans cet article, l'auteur résout le problème suivant:

Etant donnée dans le plan hyperbolique deux points A et B que l'on détermine le lieu des points C de telle manière que dans le triangle ABC on puisse exinscrire un oricycle. (Le côté AB doit être tangent à cet oricycle dans un point intérieur).

L'équation de cette courbe (d'après le modèle de Beltrami-Klein du plan hyperbolique) est donnée dans la formule (1) en coordonnées polaires (ρ, α), où $k = \frac{1}{c}$ et $0 < \alpha < \pi - 2\,\Pi(\bar{c})$, $\bar{c}$ étant la distance hyperbolique et c la distance euclidienne du côté AB. La courbe est représentée dans la figure 3, sur le modèle, et dans la figure 4 dans le plan hyperbolique. Ces courbes divisent le plan hyperbolique en deux régions: l'une „intérieure" et l'autre „extérieure" aux courbes. Les points de ces régions se caractérisent par la propriété suivante:

Un point C choisi dans ces régions détermine avec les points A et B un triangle où s'inscrit un cercle, respectivement un hypercycle, tout comme le point C appartient à l'extérieur respectivement à l'ntérieur des courbes mentionnées.

BIBLIOGRAFIE

1. H. Liebmann, *Nichteuklidische Geometrie*. Berlin — Leipzig, 1912, p. 31.
2. L. Bitay, *Despre triunghiurile şi tetraedrele neeuclidiene*. Gazeta matematică şi fizică, ser. A, X, nr. 7, p. 391—403 (1958).
3. — *Despre ortocentrul triunghiurilor în planul hiperbolic*. Studii şi cerc. de mat. (Cluj) X, nr. 1, p. 17—26 (1959).
4. R. Baldus, *Nichteuklidische Geometrie*, Berlin — Leipzig, 1927, p. 84.

Primit la 25. XI. 1959.