PROBLEME DIN GEOMETRIA VARIETĂŢILOR n-DIMENSIONALE ÎN SPAŢIILE SEPARABILE ALE LUI HILBERT

DE

EUGEN GERGELY
(Cluj)

Comunicare prezentată în şedinţa de comunicări din 28 ianuarie 1960 a Institutului de calcul al Academiei R. P. R — Filiala Cluj.

Într-un spaţiu $\mathcal{H}$ al lui Hilbert, fie $\{e_i\}$ o bază ortonormală. Atunci fiecare element $y \in \mathcal{H}$ se poate scrie sub forma

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i,$$

unde componentele c_i ale elementului y sînt numere complexe, astfel încît

$$\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 < \infty.$$

Fie acum $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funcţii reale de variabile reale $x_1, x_2, \ldots, x_n$, definite într-un domeniu D al spaţiului euclidian E_n, pentru care

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i^2(x_1, x_2, \ldots, x_n) < \infty$$

în domeniul D şi $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0$ în fiecare punct al domeniului D, pentru o infinitate de valori ale indicelui i. Atunci elementele

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, e_i$$

alcătuiesc prin definiţie o varietate V_n, n-dimensională a spaţiului lui Hilbert considerat.

În cele ce urmează studiem aceste varietăţi; definim în ele curbele geodezice, curbele cele mai scurte şi cu ajutorul acestora introducem o geometrie intrinsecă a varietăţilor n-dimensionale ale spaţiilor separabile $\mathcal{H}$.

§. 1. Curbele varietăţilor, lungimea lor, curbe rectificabile

Fie $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$, funcţii finite, definite în $[a, b]$ şi astfel că $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \in D$. Elementele

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))e_i, \quad a \leqslant t \leqslant b \tag{1}$$

ale spaţiului lui Hilbert alcătuiesc prin definiţie o curbă C în varietatea V_n.

Fie $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k = b$ şi $y(t_i) = P_i$, un punct al curbei C. Formăm numerele :

$$\sigma_k(C) = \sum_{i=1}^{k} \rho(P_{i-1}, P_i), \tag{2}$$

unde $\rho(P_{i-1}, P_i)$ reprezintă distanţa puctelor P_{i-1} şi P_i în spaţiul metric definit în $\mathcal{H}$ prin norma spaţiului. Marginea superioară a numerelor σ_k pentru toate diviziunile intervalului $[a, b]$ o numim *lungimea curbei* C şi o notăm cu $S(C)$ sau $S(C;\ a, b)$. În cazul $S(C) < \infty$, curba este numită *rectificabilă*.

Notăm

$$f_i(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \equiv F_i(t). \tag{3}$$

TEOREMA 1. *Curba C este atunci şi numai atunci rectificabilă, dacă toate funcţiile $F(t)$ sînt cu variaţie mărginită.*

Demonstraţie. Înainte de toate este valabilă egalitatea :

$$S(C; a, b) + S(C; b, c) = S(C; a, c), \tag{4}$$

dacă $a < b < c$. Demonstraţia este imediată. Astfel funcţia $S(C, \mathcal{J})$, ca funcţie de intervalul $\mathcal{J}$, este o funcţie aditivă de interval.

Pe baza definiţiei lungimii curbei în spaţiul $\mathcal{H}$, este evident că

$$W_i(F_i; a, b) \leqslant S(C; a, b), \quad i = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

şi

$$\sum_{i=1}^{\infty} W_i(F_i; a, b) \geqslant S(C; a, b),$$

unde $W_i(F_i; a, b)$ este variaţia absolută a funcţiei F_i pe intervalul $[a, b]$. Teorema 1 este o consecinţă imediată a inegalităţilor (5).

Fie acum o curbă C, rectificabilă în $[a, b]$. Ţinînd seama de relaţia (4), ea este rectificabilă şi în $[a, t]$, unde $a < t \leqslant b$. Lungimea $S(C;\ a, t)$ o notăm cu $S(t)$.

Este evident că

$$S(t + h) - S(t) \geqslant \{ \Sigma [F_i(t + h) - F_i(t)]^2 \}^{\frac{1}{2}}, \tag{6}$$

aceasta, în baza definiţiei lui $S(t)$ precum şi în baza definiţiei normei în spaţiul lui Hilbert pentru fiecare t din $[a, b]$ şi pentru fiecare $h > 0$. Împărţind ambii membrii ai relaţiei (6) prin h şi făcînd apoi ca h să tindă către 0, găsim că

$$S'(t)^2 \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} F_i'(t)^2, \tag{7}$$

dacă bineînţeles există $S'(t), F_1'(t), F_2'(t), \ldots$ Presupunînd că funcţiile $S(t)$, $F_i(t)$ sînt cu variaţie mărginită, $S'(t)$, $F_i'(t)$ există aproape în fiecare punct al intervalului $[a, b]$, şi întrucît mulţimea funcţiilor F_i $(i = 1, 2, \ldots)$ este numerabilă, rezultă că $F_i'(t)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ există deodată, aproape în fiecare punct al intervalului $[a, b]$.

Din cele precedente se vede că metoda demonstraţiei teoremei lui Jordan pentru spaţiile n-dimensionale se poate extinde la cazul spaţiilor separabile ale lui Hilbert. Astfel putem enunţa

TEOREMA 2. *Pentru fiecare curbă rectificabilă dintr-o varietate V_n a unui spaţiu Hilbert, are loc inegalitatea*

$$S'(t)^2 \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} F_i'(t)^2 \tag{8}$$

aproape în fiecare punct al intervalului $[a, b]$ şi de asemenea inegalitatea

$$S(C;\ a, b) \geqslant \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} F_i'^2(t)}. \tag{9}$$

În aceste relaţii semnul egal se realizează atunci şi numai atunci cînd toate funcţiile $F_i(t)$ sînt absolut continue în $[a, b]$.

§ 2. Curbe geodezice în varietăţi n-dimensionale ale spaţiilor lui Hilbert separabile

În cele ce urmează vom folosi metodele şi rezultatele calculului variaţional şi în acest scop vom considera numai acele varietăţi n-dimensionale şi în acestea numai acele curbe, pentru care metodele şi rezultatele amintite sînt aplicabile.

Vom considera deci varietăţile n-dimensionale pentru care funcţiile $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(i = 1, 2, \ldots)$ admit derivate de ordinul 1, 2 şi 3 în domeniul D, în raport cu fiecare variabilă x_k. Presupunem mai departe că pentru curbele variaţionale, funcţiile $x_i(t)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ admit derivate de ord. 1, 2, ceea ce asigură absolut-continuitatea funcţiilor $F_i(t)$. Prin urmare are loc egalitatea

$$S\,(C;\ a, b) = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} F_i'^2(t)}\,dt. \tag{10}$$

Să considerăm în varietatea V_n curbele variaţionale care leagă punctele P şi Q şi satisfac condiţiile arătate mai sus, şi să căutăm între ele pe cele mai scurte. Introducem notaţia

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} F_i'^2} = \Phi_i[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\ ;\ x_1'(t), \ldots, x_n'(t)]dt.$$

Problema noastră de variaţie se reduce deci la minimizarea următoarei integrale:

$$\mathcal{I} = \int_P^Q \Phi[x_1(t),\ x_2(t), \ldots,\ x_n(t)\ ;\ x_1'(t),\ x_2'(t), \ldots,\ x_n'(t)]\, dt \tag{11}$$

adică la o problemă de tip Lagrange.

În problemele de geometrizare ne interesează dacă „curbele" din varietatea V_n, adică sistemele de funcţii

$$\{ x_1(t),\ x_2(t), \ldots,\ x_n(t) \} \quad \text{şi} \quad \{ x_1[t(\tau)],\ x_2[t(\tau)], \ldots,\ x_n[t(\tau)] \}$$

reprezintă sau nu o aceeaşi curbă, în ipoteza că $t(\tau)$ este monotonă şi admite derivată continuă în $[\tau_1, \tau_2]$, unde $t(\tau_1) = a$ şi $t(\tau_2) = b$. Atunci problema noastră de variaţie este o aşa-zisă „problemă de curbă". După cum este bine cunoscut, funcţia Φ trebuie să fie pozitiv-omogenă de dimensiune 1 relativ la $x_1', x_2', \ldots, x_n'$.

Presupunînd că şi această condiţie este îndeplinită, extremele problemei noastre variaţionale de tip Lagrange satisfac sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \Phi}{\partial x_k'} = 0. \tag{12}$$

Extremalele le numim *linii geodezice ale varietăţii* între punctele P şi Q. Variind punctele P şi Q în varietate, obţinem mulţimea curbelor geodezice ale varietăţii V_n.

Este cunoscut că extremele numai în anumite condiţii dau o valoare minimă pentru I. Dacă o extremă îndeplineşte şi aceste condiţii, atunci curba corespunzătoare este *curba cea mai scurtă între P şi Q* în varietatea V_n.

§ 3. Varietăţi n-dimensionale ale spaţiului $\mathcal{H}$ în privinţa geometrizării

În cele precedente am introdus în varietăţi n-dimensionale curbele cele mai scurte.

În baza teoremelor cunoscute ale calculului variaţional este evident că într-o varietate n-dimensională în spaţiul $\mathcal{H}$, pentru două puncte P şi Q se pot ivi următoarele cazuri:

a) prin P şi Q trece o singură curbă, cea mai scurtă;

b) prin P şi Q trec o mulţime de curbe cele mai scurte. Mulţimea acestor curbe poate să fie finită, numerabilă, sau de puterea continuului.

Există varietăţi — prin alegerea corespunzătoare a domeniului D — în care, prin fiecare pereche de puncte trece numai o singură curbă cea mai scurtă.

A. D. Alexandrov şi şcoala lui a elaborat geometria intrinsecă pentru suprafeţele convexe, bazîndu-se numai pe noţiunea curbelor celor mai scurte şi în lucrările recente aceste rezultate au fost generalizate pentru fiecare spaţiu, în care curbele cele mai scurte sînt definite.

În cele precedente am văzut că în spaţiul $\mathcal{H}$ există varietăţi n-dimensionale în care fiecare pereche de puncte, P şi Q, determină o singură curbă cea mai scurtă. Astfel este demonstrată teorema următoare:

TEOREMA 3. *În spaţiile separabile ale lui Hilbert pentru fiecare n există varietăţi n-dimensionale, care nu pot fi scufundate într-un spaţiu de dimensiune finită şi în care geometria intrinsecă bazată pe curbele cele mai scurte este o geometrie de tip A. D. Alexandrov.*

În lucrare s-a arătat numai existenţa varietăţilor V_n, în care geometria intrinsecă se poate construi cu metodele lui A. D. Alexandrov.

Rămîne să fie studiate mai deaproape aceste varietăţi, în privinţa geometriei lor intrinseci.

Este deschisă pe mai departe problema slăbirii condiţiilor impuse varietăţilor şi curbelor variaţionale şi studierea acelor varietăţi, în care între două puncte oarecare nu se poate asigura existenţa unei singure curbe, cea mai scurtă, şi determinarea părţilor eventuale ale unei astfel de varietăţi, în care geometrizarea de tip A. D. Alexandrov este posibilă.

Studierea acestor probleme ne propunem să o continuăm în viitor.

ПРОБЛЕМЫ ГЕОМЕТРИИ n-МЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ СЕПАРАБЕЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В сепарабельном пространстве Гильберта $\mathcal{H}$ с ортонормальным базисом $\{e_i\}$, множество элементов $y \in \mathcal{H}$ вида

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, e_i$$

называется n-мерным многообразием V_n пространства $\mathcal{H}$. Здесь f_i — вещественные функции вещественных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, определенные в области D евклидового пространства E_n, причем во всей области имеется соотношение

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i^2 (x_1, x_2, \ldots, x_n) < \infty.$$

Предполагается далее, что во всякой точке области D верно соотношение $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0$ для бесконечного числа значений значка i. Элементы $y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i[x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots,\ x_n(t)]\, e_i$, $a \leqslant t \leqslant b$ образуют по определению кривую C в многообразии V_n, где функции $x_i(t)$ — опре-

деленные в $[a, b]$ и конечные функции, притом $x_i(t) \in D$. Длина кривой C, $S(C; a, b)$ определяется точной верхней границей чисел

$$\sigma_k(C) = \sum_{i=1}^{k} \varrho(P_{i-1}, P_i)$$

взятой по всем разделениям промежутка $[a, b]$, где $\{P_i\}$ — точки кривой C; $\varrho(P_{i-1}, P_i)$ обозначает расстояние точек P_{i-1}, P_i в метрическом пространстве $\mathcal{H}$, определенном нормой. Если $S < \infty$, то кривая назовем выпрямляемой.

Кривая C тогда и только тогда выпрямляема, если все функции $F_i(t) \equiv f[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]$ — функции конечной вариации.

Затем определяются геодезические кривые и кривые наименьшей длины в многообразиях V_n и доказывается, что: *в сепарабельном пространстве $\mathcal{H}$, при всяком $n=1, 2, 3, \ldots$, существуют n-мерные многообразия V_n в которых присущая геометрия является геометрией типа А. Д. Александрова.*

PROBLÈMES DE LA GÉOMÉTRIE DES VARIÉTÉS n-DIMENSIONNELLES DANS LES ESPACES SÉPARABLES DE HILBERT

RÉSUMÉ

Dans un espece séparable $\mathcal{H}$ de Hilbert ayant une base orthonormale $\{e_i\}$, l'ensemble des éléments $y \in \mathcal{H}$ de la forme

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, e_i$$

s'appelle une variété V_n n-dimensionnelle de l'espace $\mathcal{H}$; f y sont des fonctions réelles de variables réelles $x_1, x_2, \ldots, x_n$, définies dans un domaine D de l'espace euclidien E_n, dans tout le domaine ayant lieu la relation

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i^2(x_1, x_2, \ldots, x_n) < \infty.$$

On suppose aussi que dans chaque point du domaine D a lieu la relation $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0$ pour une infinité de valeurs de l'indice i.

Les éléments $y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]\, e_i,\ a \leqslant t \leqslant b$ forment par définition une courbe C dans la variété V_n, où les fonctions $x_i(t)$ sont des fonctions finies, définies en $[a, b]$ et $x_i(t) \in D$. On définit la longueur de la courbe C, $S\ (C\ ; a, b)$ comme la borne supérieure des nombres

$$\sigma_k(C) = \sum_{i=1}^{k} \rho(P_{i-1}, P_i),$$

pour toutes les divisions de l'intervalle $[a, b]$, où $\{P_i\}$ sont les points de la courbe C ; $\rho(P_{i-1}, P_i)$ représente la distance des points P_i, P_{i-1} dans l'espace métrique $\mathcal{H}$ défini par la norme. Si $S < \infty$, la courbe s'appelle rectifiable.

La courbe C est rectifiable et seulement rectifiable, si toutes les fonctions $F_i(t) \equiv f_i[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]$ sont à variation limitée.

Puis on définit *les géodésiques* et *les courbes les plus courtes* dans les variétés V_n et on démontre que *dans un espace $\mathcal{H}$ séparable, pour chaque $n = 1, 2, 3, \ldots$ existent des variétés n-dimensionnelles V_n où la géométrie intrinsèque est une géométrie du type A. D. Alexandrov.*

Primit la 11. XII. 1959.