DESPRE SPAŢIUL PĂRŢILOR UNUI SPAŢIU TOPOLOGIC

DE

HAMBURG PETRU

(Cluj)

Lucrare prezentată la sesiunea ştiinţifică din 20 — 23 mai 1959 a Universităţii „Babeş — Bolyai", Cluj.

În lucrarea de faţă dorim să întroducem o structură topologică în mulţimea părţilor (submulţimilor) unui spaţiu topologic S. Ne vom ocupa în special de axiomele de separaţie în acest spaţiu şi în subspaţiul părţilor închise din S. Vom stabili o relaţie între spaţiile (T_1) şi (T_2) : orice spaţiu (T_1) poate fi scufundat într-un spaţiu „aproape" (T_2), (vezi teoremele 2 şi 7).

Vom folosi următoarea terminologie :

Mulţimea S e dotată cu o structură de (V)-spaţiu Fréchet, dacă fiecărui punct $p \in S$ i se asociază o clasă nevidă de părţi ale lui S numite vecinătăţi. Într-un astfel de spaţiu spunem că o mulţime e deschisă dacă conţine cel puţin cîte o vecinătate a fiecărui element de al său. Complementul unei mulţimi deschise se numeşte mulţime închisă. Dacă $M \subseteq S$, prin $\overline{M}$ înţelegem intersecţia tuturor mulţimilor închise ce conţin pe M. $\overline{M}$ e o mulţime închisă. (Vezi [5] pag. 7). Două mulţimi sînt congruente — $M_1 \equiv M_2$ — dacă $\overline{M}_1 = \overline{M}_2$ (vezi [3] pag. 250). Se verifică uşor că $M_1 \not\equiv M_2$ este echivalent cu $M_1 \not\subseteq \overline{M}_2 \vee M_2 \not\subseteq \overline{M}_1$. Dacă pe aceeaşi mulţime avem două structuri de (V)-spaţii Fréchet τ_1 şi τ_2 vom spune că τ_1 e mai fină decît τ_2 dacă orice mulţime deschisă în structura τ_2 e deschisă şi în structura τ_1

S formează un *spaţiu topologic* dacă e un (V)-spaţiu Fréchet şi vecinătăţile satisfac următoarele axiome :

(V_{I}) *Orice element e conţinut în toate vecinătăţile sale.*

(V_{II}) *Dacă V_1 şi V_2 sînt vecinătăţi ale lui p, atunci există o vecinătate V a lui p cu proprietatea $V \subseteq V_1 \cap V_2$*

(V_{III}) *Dacă V e o vecinătate a lui p şi $q \in V$, atunci există o vecinătate U a lui q cu proprietatea $U \subseteq V$.*

Ne vor interesa îndeosebi spaţii topologice, care satisfac şi una din axiomele de mai jos (vezi [1] pag. 58, 59, 67).

(T_0) *Pentru orice pereche de elemente $p \neq q$ din S există cel puțin o vecinătate a lui p care nu-l conține pe q, sau o vecinătate a lui q care nu-l conține pe p.*

(T_1) *Pentru orice pereche de elemente $p \neq q$ din S există cel puțin o vecinătate a lui p care nu-l conține pe q.*

(T_2) *Pentru orice pereche de elemente $p \neq q$ din S există o vecinătate U a lui p și o vecinătate V a lui q pentru care $U \cap V = \emptyset$ (unde $\emptyset$ e partea vidă a lui S).*

(T_3) *Pentru orice element p și mulțime închisă F care nu conține elementul p, există două mulțimi deschise G_1, G_2 în spațiu, pentru care $G_1 \ni p$, $G_2 \supseteq F$ și $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.*

Notăm cu $\mathcal{P} = \mathcal{P}(S)$ totalitatea părților nevide ale lui S și cu $\mathcal{S}$ totalitatea părților lui S, formate din cîte un singur punct iar $\mathcal{F} = \mathcal{F}(S)$, va desemna totalitatea părților închise ale lui S*). Presupunînd că S e un (V)-spațiu Fréchet, vrem să introducem în $\mathcal{P}$ o structură de (V)-spațiu Fréchet. Avem desigur posibilități multiple. Transformarea $\mathcal{H}(x) = \{x\}$ e o transformare biunivocă a lui S pe $\mathcal{S}$. Introducînd o structură de (V)-spațiu în $\mathcal{P}$ e firesc să cerem, ca în raport cu această structură, transformarea $\mathcal{H}$ să fie continuă sau chiar bicontinuă.

Metoda folosită în multe alte capitole ale topologiei, de a introduce în $\mathcal{P}$ cea mai fină (sau cea mai puțin fină) structură în care transformarea dată să fie continuă, respectiv bicontinuă, pare să nu fie adecvată pentru obiectul nostru.

Într-adevăr în cazul cînd S e un spațiu topologic, cea mai fină structură topologică a lui $\mathcal{P}$ în care $\mathcal{H}$ e continuă, e determinată de familia de mulțimi deschise în $\mathcal{P}$ formată din partea vidă a lui $\mathcal{P}(S)$ și elementele $\mathcal{G}$ din $\mathcal{P}(\mathcal{P}(S))$, ale căror urmă asupra lui $\mathcal{S}$ e imaginea prin $\mathcal{H}$ a unei mulțimi deschise G din S. În această structură topologică $\mathcal{H}$ e o transformare deschisă, deci această structură este totodată cea mai fină topologie a lui $\mathcal{P}(S)$ în care $\mathcal{H}$ este o transformare topologică. În această structură topologică orice element din $\mathcal{P} - \mathcal{S}$ este un punct izolat.

Cea mai puțin fină structură topologică în care transformarea $\mathcal{H}$ este continuă, posedă doar pe $\mathcal{P}(S)$ și partea vidă a lui S ca mulțimi deschise, iar structura topologică cea mai puțin fină dintre structurile topologice în care $\mathcal{H}$ este un omeomorfism, are ca mulțimi deschise imaginile prin $\mathcal{H}$ ale mulțimilor deschise din S, și mulțimea $\mathcal{P}$.

Aceste topologii nu „prelungesc" în mod firesc topologia lui $\mathcal{S}$ în $\mathcal{P}$.

Să presupunem că S este un (V)-spațiu Fréchet. Vom introduce în $\mathcal{P} = \mathcal{P}(S)$ trei structuri de (V)-spațiu Fréchet.

Pentru un $M \in \mathcal{P}$ fie F o submulțime închisă arbitrară (eventual partea vidă), a lui M, iar G o mulțime deschisă arbitrară din spațiul S care acoperă pe M, adică

$$F \subseteq M \subseteq G.$$

*) Semnele $\in$, $\subseteq$ și $\subset$ (ultimul pentru incluziune în sens strict), le vom folosi atît în mulțimea S, cît și în mulțimea $\mathcal{P}(S)$. Caracterele literelor clarifică sensul simbolului. Elementele lui S sînt notate cu minuscule, elementele mulțimii $\mathcal{P}(S)$, adică submulțimile lui S, sînt notate cu majuscule, iar elementele mulțimii $\mathcal{P}(\mathcal{P}(S))$, adică submulțimile lui $\mathcal{P}(S)$ sînt notate cu litere rotunde.

Printr-o vecinătate a lui M vom înțelege mulțimea

$$\mathcal{V}'_M(F, G) = \{N: \quad N \in \mathcal{P} \wedge F \subseteq N \subseteq G\}$$

(Reamintim că $\mathcal{P}$ nu conține partea vidă a lui S.)

Vom defini o altă categorie de vecinătăți în felul următor: Dacă F este o submulțime închisă proprie a lui M, adică

$$F \subset M \subseteq G,$$

unde G notează iarăși o parte deschisă a lui S, atunci vom folosi notația:

$$\mathcal{V}''_M(F, G) = \{N: \quad N \in \mathcal{P} \wedge F \subset N \subseteq G\}.$$

Mai introducem și un al treilea tip de vecinătăți al elementului M din $\mathcal{P}$, definit de un sistem de vecinătăți ale punctelor $p \in M$: $(V_p)_{p \in M}$

$$\mathcal{V}'''_M\left((V_p)_{p\in M}\right) = \{N: N = \bigcup_{p \in M} N_p \wedge \emptyset \subset N_p \subseteq V_p \wedge (p \neq p' \rightarrow N_p \cap N_{p'} = \emptyset)\}$$

TEOREMA 1. *Dacă S e un (V)-spațiu Fréchet, totalitatea vecinătăților $\mathcal{V}'_M(F, G)$ $\mathcal{V}''_M(F, G)$ respectiv $\mathcal{V}'''_M(V_p)_{p\in M}$ definesc trei structuri de (V)-spațiu Fréchet în $\mathcal{P}$, primele două satisfăcînd axioma (V_{I}) și (V_{III}). Dacă S e un spațiu topologic, toate trei sistemele de vecinătăți determină cîte o structură topologică în $\mathcal{P}$.*

Mulțimea $\mathcal{P}$ dotată cu aceste structuri de (V)-spațiu Fréchet o vom nota cu $\mathcal{P}_{\tau_1}$, $\mathcal{P}_{\tau_2}$, resp. $\mathcal{P}_{\tau_3}$.

Demonstrație. În orice (V)-spațiu Fréchet partea vidă și spațiul întreg sînt mulțimi închise și deschise. Pentru orice $M \in \mathcal{P}$ va exista vecinătatea $\mathcal{V}'_M(\emptyset, S)$. Se vede deasemeni imediat că $M \in \mathcal{V}'_M(F, G)$ pentru orice vecinătate. Pentru a verifica (V_{III}) este suficient să observăm că $N \in \mathcal{V}'_M(F, G)$ implică

$$\mathcal{V}'_N(F, G) = \mathcal{V}'_M(F, G).$$

Dacă S e un spațiu topologic, sistemul de vecinătăți $\mathcal{V}'_M(F, G)$ verifică axioma (V_{II}). Într-adevăr dacă $F_1 \subseteq M \subseteq G_1$ și $F_2 \subseteq M \subseteq G_2$ determină două vecinătăți în $\mathcal{P}_{\tau_1}$, atunci

$$\mathcal{V}'_M(F_1, G_1) \cap \mathcal{V}'_M(F_2, G_2) = \mathcal{V}'_M(F_1 \cup F_2, G_1 \cap G_2)$$

și — S fiind un spațiu topologic — $F_1 \cup F_2$, e o parte a lui M închisă în S, iar $G_1 \cap G_2$ o parte deschisă a lui S care conține pe M.

Analog se demonstrează pentru structura τ_2, avîndu-se în vedere că $\emptyset \notin \mathcal{P}$.

Pentru structura topologică τ_3 să presupunem că S e un spațiu topologic.

a). Pentru orice $p \in M$ există cel puțin o vecinătate V_p în structura topologică din S, prin urmare există și o vecinătate $\mathcal{V}'''_M((V_p)_{p\in M})$ (acest rezultat fiind valabil și dacă S e un (V)-spațiu Fréchet).

Pentru orice vecinătate a lui $M \in \mathcal{P}$ avem $M \in \mathcal{V}'''_M((V_p)_{p\in M})$, căci $M = \bigcup_{p\in M} \{p\}$ și $N_p = \{p\}$ satisface condițiile din definiție.

b) Avem $\mathcal{V}'''_M((V'_p)_{p\in M}) \cap \mathcal{V}'''_M((V''_p)_{p\in M}) \supseteq \mathcal{V}'''_M((V'_p \cap V''_p)_{p\in M})$, căci $V'_p \cap V''_p$ e o vecinătate a lui p în S și $N \in \mathcal{V}'''_M((V'_p \cap V''_p)_{p\in M})$ înseamnă $N = \bigcup_{p\in M} N_p$, $\emptyset \subset N_p \subseteq V'_p \cap V''_p$, adică $\emptyset \subset N_p \subseteq V'_p \wedge \emptyset \subset N_p \subseteq V''_p$ și $p \neq p' \rightarrow N_p \cap N_{p'} = \emptyset$. Prin urmare

$$N \in \mathcal{V}'''_M((V'_p)_{p\in M}) \cap \mathcal{V}'''_M((V''_p)_{p\in M}).$$

c) Fie $L \in \mathcal{V}'''_M((V_p)_{p\in M})$. Vrem să construim o vecinătate $\mathcal{V}'''_L((V_q)_{q\in L})$ a lui $L \in \mathcal{P}$ cu proprietatea $\mathcal{V}'''_L \subseteq \mathcal{V}'''_M$.

Prin ipoteză $L = \bigcup_{p\in M} L_p$, $\emptyset \subset L_p \subseteq V_p$

$$p \neq p' \rightarrow L_p \cap L_{p'} = \emptyset \tag{1}$$

și fie $q \in L$. Atunci există un $p = f(q) \in M$ și unul singur cu proprietatea $q \in L_p$. Vom nota $V_q = V_p$, unde $p = f(q)$. V_q este o vecinătate a lui q în S, căci $q \in L_p \subseteq V_p = V_q$ și V_q e o parte deschisă a lui S. Vrem să arătăm că:

$$\mathcal{V}'''_L((V_q)_{q\in L}) \subseteq \mathcal{V}'''_M((V_p)_{p\in M}).$$

Într-adevăr, dacă $N \in \mathcal{V}'''_L$, atunci $N = \bigcup_{q\in L} N_q$, $\emptyset \subset N_q \subseteq V_q$

$$q \neq q' \rightarrow N_q \cap N_{q'} = \emptyset \tag{2}$$

Însă $N = \bigcup_{p\in M} (\bigcup_{q\in L_p} N_q) = \bigcup_{p\in M} N_p$, unde am notat $N_p = \bigcup_{q\in L_p} N_q$.

N_p satisface condițiile din definiția vecinătăților căci din relațiile $L_p \supset \emptyset$ și $N_q \supset \emptyset$ satisfăcute pentru orice $p \in M$, $q \in L_p$ rezultă $N_p \supset \emptyset$. Pe de altă parte avem $N_p \subseteq V_p$, căci dacă $q \in L_p$ atunci $V_q = V_p$ și $N_q \subseteq V_q = V_p$, deci $N_p = \bigcup_{q\in L_p} N_q \subseteq V_p$.

În sfîrșit $p \neq p' \rightarrow N_p \cap N_{p'} = \emptyset$ căci din $p \neq p'$ rezultă după (1) că $L_p \cap L_{p'} = \emptyset$, deci dacă alegem $q_1 \in L_p$, $q_2 \in L'_p$, vom avea $q_1 \neq q_2$, care implică după (2) $N_{q_1} \cap N_{q_2} = \emptyset$. Dar $N_p = \bigcup_{q\in L_p} N_q$ și $N_{p'} = \bigcup_{q\in L_{p'}} N_q$, de unde rezultă $N_p \cap N_{p'} = \emptyset$.

TEOREMA 2. *Spațiul topologic S este omeomorf cu subspațiul $\mathcal{S}_{\tau_2}$ respectiv $\mathcal{S}_{\tau_3}$ al lui $\mathcal{P}_{\tau_2}$ respectiv $\mathcal{P}_{\tau_3}$.*

Demonstrație. Pentru a ne convinge de bicontinuitatea lui $\mathcal{H}$ să observăm că vecinătatea lui $\{x\}$ în $\mathcal{S}_{\tau_2}$ e dată de $\mathcal{V}''_{\{x\}}(F, G) \cap \mathcal{S}$. Din $F \subset \{x\}$ rezultă $F = \emptyset$, deci $\mathcal{V}''_{\{x\}}(\emptyset, G) \cap \mathcal{S}$ e format din mulțimile, $\{y\}$ cu $y \in G$. Imaginea unei vecinătăți absolute G din S a lui x este chiar o vecinătate a lui $\{x\}$ în $\mathcal{S}_{\tau_2}$ și invers.

Pentru a ne convinge de proprietatea analoagă pentru $\mathcal{P}_{\tau_3}$, observăm că vecinătatea lui $\{x\}$ în $\mathcal{S}_{\tau_3}$ este dată de $\mathcal{V}'''_{\{x\}}(V_x) \cap \mathcal{S}$, iar $\mathcal{V}'''_{\{x\}}(V_x)$ e format din mulțimile $\{N: \emptyset \subset N \subseteq V_x\}$. Prin urmare $\mathcal{V}'''_{\{x\}}(V_x) \cap \mathcal{S}$ constă din mulțimile $\{y\}$ cu $y \in V_x$.

De aici rezultă că S și $\mathcal{S}_{\tau_3}$ sînt omeomorfe.

Teorema ne asigură că în cazul structurilor topologice τ_2 și τ_3, transformarea $\mathcal{H}$ e bicontinuă. În structura topologică τ_1 $\mathcal{H}$ e o transformare continuă dar în general nu e un omeomorfism. (Dacă de exemplu S e un spațiu topologic (T_1), atunci $\mathcal{S}_{\tau_1}$ e un spațiu discret).

Pentru a putea studia cazul cînd S e un spațiu (T_1), avem nevoie de cîteva notații și leme.

$M_1 \not\subset M_2$ înseamnă evident că $M_1 - M_2$ conține cel puțin un punct iar $M_1 \neq M_2$ e echivalent cu $M_1 \not\subset M_2 \vee M_2 \not\subset M_1$.

Vom folosi următoarele notații: $M_1 \not\subset| M_2$ dacă $M_1 - M_2$ conține cel puțin două puncte și $M_1 \nparallel M_2$ înseamnă $M_1 \not\subset| M_2 \vee M_2 \not\subset| M_1$.

LEMA 1. *Dacă M_1, M_2 sînt părți dintr-un spațiu topologic (T_1) și*

a) *dacă $M_1 \not\subset M_2$, atunci există o mulțime închisă F pentru care $F \not\subset M_2 \wedge F \subseteq M_1$;*

b) *dacă $M_1 \not\subset M_2$ atunci există o mulțime deschisă G pentru care $M_1 \not\subset G_2 \wedge M_2 \subseteq G$;*

LEMA 2. *Dacă M_1, M_2 sînt părți dintr-un spațiu topologic (T_1) și*

a) *dacă $M_1 \not\subset| M_2$, atunci există o mulțime închisă F pentru care $F \not\subset| M_2 \wedge F \subseteq M_1$.*

b) *dacă $M_1 \not\subset| M_2$ atunci există o mulțime deschisă G pentru care $M_1 \not\subset| G \wedge M_2 \subseteq G$.*

(Pentru lema 1 vezi și [4] pag. 77)

Demonstrăm numai lema 2.

a) Dacă $M_1 \not\subset| M_2$ atunci există $p_1 \neq p_2$ care aparțin lui $M_1 - M_2$. Atunci $F = \{p_1, p_2\}$ satisface condițiile lemei.

b) $G = S - \{p_1, p_2\}$ satisface proprietățile din enunț.

Dăm cîteva proprietăți ale spațiilor $\mathcal{P}_{\tau_1}$, $\mathcal{P}_{\tau_2}$ respectiv $\mathcal{P}_{\tau_3}$ în cazul cînd S e un spațiu topologic (T_1).

TEOREMA 3. *Dacă S e un spațiu topologic (T_1) atunci τ_1 e o structură topologică mai fină în $\mathcal{P}$ decît τ_2.*

Demonstrație. Fie $\mathcal{V}''_M(F, G)$ o vecinătate arbitrară a lui M în $\mathcal{P}_{\tau_2}$. Atunci avem $F \subset M \subseteq G$. Deoarece $M - F \neq \emptyset$ există $p \in M$, $p \notin F$. S fiind un spațiu topologic (T_1), mulțimea $\{p\}$ deci și $F \cup \{p\} = F_1$ e închisă și $F \subset F_1$. $\mathcal{V}'_M(F_1, G)$ e o vecinătate a lui M în $\mathcal{P}_{\tau_1}$ și $\mathcal{V}'_M(F_1, G) \subseteq \mathcal{V}''_M(F, G)$, deoarece $N \in \mathcal{V}'_M(F_1, G)$ însemnează $F_1 \subseteq N \subseteq G$, ceea ce implică $F \subset N \subseteq G$, adică $N \in \mathcal{V}''_M(F, G)$.

Prin urmare τ_1 e o structură topologică mai fină decît τ_2.

Deosebirea între cele două topologii nu este mare. Dacă mulțimea $M \subseteq S$ nu e închisă, atunci orice vecinătate $\mathcal{V}'_M(F, G)$ conține vecinătatea $\mathcal{V}''_M(F, G)$ deoarece $M \neq F$. Prin urmare dacă S e un spațiu topologic (T_1) atunci topologiile τ_1 și τ_2 sînt identice în $\mathcal{P} - \mathcal{F}$

Topologia τ_3 diferă în schimb esențial de primele două. Avem următoarea teoremă:

TEOREMA 4. *Dacă S este un spațiu topologic, atunci structura topologică τ_1 e mai fină peste mulțimea $\mathcal{F}$ decît τ_3.*

Demonstrație :

Fie dată vecinătatea $\mathcal{V}'''_M((V_p)_{p\in M})$ a lui $M\in\mathcal{F}$. Atunci $\mathcal{V}'''_M((V_p)_{p\in M})\supseteq \mathcal{V}'_M(F, G)$, unde $G = \bigcup_{p\in M} V_p$ iar $F = M$.

Într-adevăr fie $N\in\mathcal{V}'_M(F, G)$. Atunci

$$F = M \subseteq N \subseteq G$$

Notăm cu $N'_p = (N - M)\cap V_p$ și alegem o bună ordonare

$$p_1, p_2, \ldots, p_\alpha, \ldots \qquad (\alpha\in A)$$

arbitrară a elementelor mulțimii $M\subseteq S$. Formăm mulțimile :

$N''_{p1} = N'_{p1}$; $N''_{p_\alpha} = \bigcup_{\beta<\alpha} N'_{p_\beta}$ pentru orice $\alpha\in A$ diferit de 1 și fie:

$$N_{p_\alpha} = N''_{p_\alpha}\cup\{p_\alpha\} \text{ pentru orice } \alpha\in A.$$

Avem

$$N = \bigcup_{p_\alpha\in M} N_{p_\alpha}, \emptyset\subset N_p\subseteq V_p \quad \text{și } p_\alpha\neq p_\beta\rightarrow N_{p_\alpha}\cap N_{p_\beta} = \emptyset$$

TEOREMA 5. *Dacă S e un spațiu topologic (T_1), atunci $\mathcal{P}_{\tau_1}$ e un spațiu topologic* (T_2).

Demonstrație. Fie M_1, M_2 părți diferite ale lui S ; atunci avem $M_1\not\subseteq M_2$ sau $M_2\not\subseteq M_1$.

1). Dacă $M_1\not\subseteq M_2$ atunci în virtutea punctului b) din lema 1, există o mulțime deschisă G_2, pentru care $M_1\not\subseteq G_2$, $M_2\subseteq G_2$. Din $M_1\not\subseteq G_2$ rezultă în virtutea punctului a) din lema 1, că există un F_1 închis, pentru care $F_1\subseteq M_1$ și $F_1\not\subseteq G_2$. Fie F_2 o parte din M_2 închisă în S, G_1 o parte deschisă din S, care acoperă pe M_1. Atunci

$$\mathcal{V}'_{M_1}(F_1, G_1)\cap\mathcal{V}'_{M_2}(F_2, G_2) = \emptyset$$

căci din $N\in\mathcal{V}'_{M1}(F_1, G_1)\cap\mathcal{V}'_{M2}(F_2, G_2)$ ar rezulta $F_1\subseteq N$ și $N\subseteq G_2$, adică $F_1\subseteq G_2$ contrar felului în care l-am ales pe F_1. Există deci vecinătăți disjuncte ale lui M_1 și M_2 în structura topologică τ_1.

2). Dacă $M_2\not\subseteq M_1$ procedăm la fel, permutînd indicii 1 și 2.

TEOREMA 6. *Dacă S e un spațiu topologic (T_1), $\mathcal{P}_{\tau_2}$ este de asemenea un spațiu topologic* (T_1).

Demonstrație. Fie $M_1, M_2\in\mathcal{P}$, $M_1\neq M_2$. Atunci $M_1\not\subseteq M_2$ sau $M_1\subset M_2$.

1) Dacă $M_1\not\subseteq M_2$, atunci în virtutea lemei 1, a) există o mulțime deschisă G_2 în S cu proprietatea $M_1\not\subseteq G_2$ și $M_2\subseteq G_2$. Fie F_2 o submulțime închisă proprie arbitrară a lui M_2, adică $F_2\subseteq M_2\subseteq G_2$. Avînd în vedere $M_1\not\subseteq G_2$ avem :

$$M_1\notin\mathcal{V}''_{M_2}(F_2, G_2)$$

M_2 are o vecinătate care nu-l conține pe M_1.

2). Dacă $M_1\subset M_2$, atunci există un punct $q\in M_2 - M_1$. Pe de altă parte $M_1\in\mathcal{P}$ și vom avea $M_1\neq\emptyset$, deci există un punct (diferit de q) $p\in M_1$. Se constată apoi că $F_2 = \{q\}$ e o mulțime închisă pentru care au loc relațiile $F_2\subset M_2$, $F_2\not\subseteq M_1$, adică $M_1\notin\mathcal{V}''_{M_2}(F_2, G_2)$ pentru o mulțime deschisă arbitrară G_2, care conține pe M_2.

La fel se arată că și M_1 are o vecinătate care nu-l conține pe M_2.

TEOREMA 7. *Dacă S e un spațiu topologic (T_1), $M_1, M_2\in\mathcal{P}$ și $M_1\# M_2$ atunci axioma (T_2) e satisfăcută în $\mathcal{P}_{\tau_2}$ pentru perechea M_1, M_2.*

Demonstrație : $M_1\# M_2$ e echivalent cu $M_1\not\subseteq| M_2 \vee M_2\not\subseteq| M_1$.

1). Dacă $M_1\not\subseteq| M_2$, atunci în baza punctului b) din lema 2, există o mulțime deschisă G_2 pentru care $M_1\not\subseteq| G_2$ și $M_2\subseteq G_2$. Din $M_1\not\subseteq| G_2$ rezultă că există p_1, $p_2\in M_1 - G_2$. Fie $F_1 = \{p_1\}$. Avem atunci $F_1\subset M_1$, $F_1\not\subseteq G_2$. Dacă F_2 este o submulțime proprie închisă a lui M_2, iar G_1 o mulțime deschisă ce conține pe M_1 atunci :

$$\mathcal{V}''_{M1}(F_1, G_1)\cap\mathcal{V}''_{M2}(F_2, G_2) = \emptyset$$

căci din $N\in\mathcal{V}''_{M_1}\cap\mathcal{V}''_{M_2}$ ar rezulta $F_1\subset N$ și $N\subseteq G_2$, deci $F_1\subset G_2$, contrar felului în care l-am ales pe F_1.

Această teoremă ne arată că deși axioma (T_1) satisfăcută în S nu atrage după sine ca (T_2) să fie satisfăcută în $\mathcal{P}_{\tau_2}$ (ceea ce e imposibil, S fiind scufundat în $\mathcal{P}_{\tau_2}$ după cum ne arată teorema 2), totuși această proprietate e valabilă dacă M_1 și M_2 diferă mai mult decît minimul necesar, adică în loc de $M_1\neq M_2$ avem $M_1\# M_2$.

TEOREMA 8. *Dacă S e un spațiu topologic (T_1) atunci $\mathcal{P}_{\tau_3}$ satisface axioma (T_0).*

Demonstrație. Fie $M_1, M_2\in\mathcal{P}$ și $M_1\# M_2$. Avem $M_1\not\subseteq M_2 \vee M_2\not\subseteq M_1$.

1). Dacă $M_1\not\subseteq M_2$, atunci există un punct $p\in M_1 - M_2$. Pentru orice $q\in M_2$ vom avea $p\neq q$, deci există o vecinătate V_q străină de p. Atunci

$$M_1\notin\mathcal{V}'''_{M_1}((V_q)_{q\in M_2})$$

căci în caz contrar am avea

$$M_1 = \bigcup_{q\in M_2} N_q \qquad N_q\subseteq V_q$$

și avînd în vedere că $p\in M_1$, ar exista un $q_0\in M_2$ pentru care $p\in N_{q_0}\subseteq V_{q_0}$ contrar felului în care l-am ales pe V_{q_0}.

2) Dacă $M_2\not\subseteq M_1$, construim analog o vecinătate $\mathcal{V}'''_{M_1}$ care nu-l conține pe M_2.

Din demonstrație se vede că dacă avem pentru două mulțimi $M_1\not\subseteq M_2$ și $M_2\not\subseteq M_1$ simultan, atunci pentru perechea M_1, M_2 din $\mathcal{P}_{\tau_3}$ e satisfăcută axioma (T_1).

TEOREMA 9. *Dacă S e un (V)-spațiu Fréchet și $M_1\not\equiv M_2$ atunci axioma (T_0) e satisfăcută în $\mathcal{P}_{\tau_3}$ pentru perechea M_1, M_2.*

Demonstrație. $M_1\not\equiv M_2$ e echivalent cu $M_1\not\subseteq\overline{M}_2 \vee M_2\not\subseteq\overline{M}_1$.

1) Dacă $M_2 \not\subseteq \overline{M}_1$ atunci există un punct $p_0 \in M_2 - \overline{M}_1$. Atunci $p_0 \in \complement \overline{M}_1$; $\complement \overline{M}_1$ fiind deschisă, p_0 trebuie să posede o vecinătate V_0 cu proprietatea $V_0 \subseteq \complement \overline{M}_1$, deci $V_0 \cap M_1 = \emptyset$. Pentru $p \neq p_0$ definim V_p ca o vecinătate arbitrară, iar pentru $p = p_0$, $V_p = V_{p_0} = V_0$. Atunci

$$M_1 \notin \mathcal{V}'''_{M_2}\left((V_p)_{p \in M_2}\right)$$

căci în caz contrar avem $M_1 = \bigcup_{p \in M_2} N_p \quad \emptyset \subset N_p \subseteq V_p$

În particular $\emptyset \subset N_{p_0} \subseteq V_{p_0}$ și $M_1 \cap V_0 \supseteq N_{p_0} \supset \emptyset$, contrar felului în care l-am ales pe V_0.

2) Dacă $M_1 \not\subseteq \overline{M}_2$, procedăm analog arătînd că în structura τ_3 M_1 posedă o vecinătate care nu-l conține pe M_2

Teorema 10. *Dacă S e un spațiu topologic (T_1) și $M_1 \not\equiv M_2$, atunci axioma (T_1) e satisfăcută în $\mathcal{P}_{\tau_3}$ pentru perechea M_1, M_2.*

Demonstrație. $M_1 \not\equiv M_2$ implică $M_1 \neq M_2$, adică avem $M_1 \not\subseteq M_2 \vee M_1 \subset M_2$. Vrem să arătăm că M_2 are în ambele cazuri o vecinătate care nu-l conține pe M_1.

1) Dacă $M_1 \not\subseteq M_2$, procedăm ca în demonstrația teoremei 8, la cazul 1).

2) Dacă $M_1 \subset M_2$ vom avea $M_2 \not\subseteq \overline{M}_1$. Într-adevăr din ipoteză rezultă $\overline{M}_1 \subseteq \overline{M}_2$, și dacă am avea $M_2 \subseteq \overline{M}_1$, ar rezulta $\overline{M}_2 \subseteq \overline{\overline{M}}_1 = \overline{M}_1$ și $\overline{M}_1$ ar fi egal cu $\overline{M}_2$, contrar ipotezei $M_1 \not\equiv M_2$. Dar dacă $M_2 \not\subseteq \overline{M}_1$, atunci putem raționa ca în demonstrația teoremei 9, cazul 1).

Teorema 11. *Dacă S e un spațiu topologic (T_3) și $M_1 \not\equiv M_2$, atunci axioma (T_2) e satisfăcută pentru perechea* M_1, M_2 *în $\mathcal{P}_{\tau_3}$.*

Demonstrație. Relația $M_1 \not\equiv M_2$ e echivalentă cu $M_1 \not\subseteq \overline{M}_2 \vee M_2 \not\subseteq \overline{M}_1$

1) $M_1 \not\subseteq \overline{M}_2$ garantează existența unui punct $p_0 \in M_1 - \overline{M}_2$. Întrucît S satisface axioma (T_3), există o vecinătate V_0 a lui p_0 și G a lui $\overline{M}_2$ în S, disjuncte

$$V_0 \cap G = \emptyset.$$

Pentru fiecare $q \in M_2$ alegem o vecinătate V_q, pentru care $q \in V_q \subseteq G$. Atunci $V_q \cap V_0 = \emptyset$ pentru orice $q \in M_2$.

Fie V_p o vecinătate arbitrară a lui $p \in M_1$ dacă $p \neq p_0$, și $V_p = V_0$, dacă $p = p_0$. Atunci :

$$\mathcal{V}'''_{M_1}\left((V_p)_{p \in M_1}\right) \cap \mathcal{V}'''_{M_2}\left((V_q)_{q \in M_2}\right) = \emptyset$$

căci din $N \in \mathcal{V}'''_{M_1} \cup \mathcal{V}'''_{M_2}$ ar rezulta $N = \bigcup_{p \in M_1} N_p$; $\emptyset \subset N_p \subseteq V_p$, de unde $N \cap V_0 \supseteq N_{p_0} \supset \emptyset$. Pe de altă parte $N = \bigcup_{q \in M_2} N_q$, $N_q \subseteq V_q$. Dar $V_q \cap V_0 = \emptyset$. Deci $N_q \cap V_0 = \emptyset$ pentru orice $q \in M_2$, prin urmare $N \cap V_0 = \emptyset$, în contradicție cu rezultatul anterior.

2) Dacă $M_2 \not\subseteq \overline{M}_1$ procedăm la fel.

Corolar. *Dacă S e un (V)-spațiu Fréchet, atunci $\mathcal{F}_{\tau_3}$ e un (V)-spațiu Fréchet care satisface axioma (T_0). Dacă S e un spa ıu topologic (T_1), atunci $\mathcal{F}_{\tau_3}$ e un spațiu topologic (T_1). Dacă S e un spațiu topologic (T_3) atunci $\mathcal{F}_{\tau_3}$ satisface axioma (T_2).*

Corolarul poate fi extins la orice subspațiu a lui $\mathcal{P}_{\tau_3}$ în care din fiecare clasă de congruență, figurează cel mult un element.

Teorema 12. *Dacă $\mathcal{P}_{\tau_1}$, $\mathcal{P}_{\tau_2}$ sau $\mathcal{P}_{\tau_3}$ satisfac axioma (T_1) și S e un spațiu topologic, atunci S e un spațiu (Γ_1).*

Demonstrație. Pentru $\mathcal{P}_{\tau_2}$, $\mathcal{P}_{\tau_3}$ afirmația rezultă din teorema 2 și din ereditaritatea proprietății (T_1). Dacă $\mathcal{P}_{\tau_1}$ satisface axioma (T_1) și $p \neq q$, atunci prin ipoteză există o vecinătate $\mathcal{V}'_{\{p\}}\ (F, G)$, care nu-l conține pe $\{p, q\}$, adică $q \notin G$. Deci $G = V_p$ nu conține punctul q. La fel putem construi o vecinătate a lui q care să nu conțină pe p.

În cazul cînd S e un spațiu uniform, e ușor să introducem în $\mathcal{P}$ o structură uniformă (vezi [2] cap. II. § 2. ex. 7). Se poate arăta că vecinătățile unui element M din spațiul uniform pot fi definite prin formula

$$\mathcal{V}_M(V) = \{N : N = \bigcup_{p \in M} N_p \wedge \emptyset \subset N_p \subseteq V(p)\}$$

unde V e o împrejurime arbitrară a structurii uniforme asupra lui S.

Deși această definiție prezintă o asemănare cu definiția vecinătăților $\mathcal{V}'''_M$, cele două structuri topologice nu sînt comparabile nici în spațiile euclidiene.

О ПРОСТРАНСТВЕ ЧАСТЕЙ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящей заметке изучается возможность введения в множество $\mathcal{P}$ непустых частей (V)-пространства Фреше и, в частности, топологического пространства топологической структуры.

Требуется чтобы отображение

$$\mathcal{H}(x) = \{x\}$$

S на $\mathcal{P}$ явилось непрерывным или даже гомеоморфизмом в этой топологии. Наиболее тонкая и наименьше тонкая из топологических структур в которых $\mathcal{H}$ является непрерывным или гомеоморфизмом представляют слишком малый интерес, потому что они — тривяльны. В $\mathcal{P}$ введутся три различных топологических структуры τ_1, τ_2, τ_3 и изучается особенно проблема в какой мере аксиомы отделения (T_0), (T_1), (T_2) остаются верными от S на $\mathcal{P}$ и на $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}$, образованный из замкнутых частей S. Пространство S вложено в $\mathcal{P}_{\tau_2}$ и $\mathcal{P}_{\tau_3}$ В топологии τ_1, при более сла-

бых требованиях, следуют более сжатые следствия: если S удовлетворяет (T_1), то $\mathcal{P}$ будет выполнять аксиому (T_2). В случае топологической структуры τ_2 если S является (T_1) — пространством, то и $\mathcal{P}$ обладает тем же свойством, а всякое подпространство $\mathcal{P}$ в котором элементы различны в более чем одной точке (точнее если $M_1 - M_2$ или $M_2 - M_1$ содержают по крайней мере две точки) выполняет аксиому (T_2) отделения. В структуре τ_3 поскольку S — топологическое (T_1) пространство, $\mathcal{P}$ удовлетворяет (T_0). Для того, чтобы $\mathcal{F}$ явилось (T_0) — пространством, нет надобности, предполагать относительно S какую либо аксиому отделения, даже нет топологическую структуру: достаточно чтобы оно образовало (V) — пространство Фреше. Если S — топологическое пространство и удовлетворяет (T_1), то $\mathcal{F}$ будет обладать теми же свойствами, а если S удовлетворяет (T_3) (нет надобности в регулярности), то $\mathcal{F}$ — (T_2) - пространство в топологической структуре

SUR L'ESPACE DES PARTIES D'UN ESPACE TOPOLOGIQUE

RÉSUMÉ

Dans la présente note on étudie la possibilité de l'introduction d'une structure topologique dans l'ensemble $\mathcal{P}$ des parties non vides d'un (V) — espace Fréchet et, en particulier, d'un espace topologique. L'application $\mathcal{H}(x) = \{x\}$ de S dans $\mathcal{P}$ doit être continue voire même bicontinue dans cette topologie. La plus fine et la moins fine des structures topologiques où $\mathcal{H}$ est continue ou bicontinue présente peu d'intérêt, étant banales. On introduit dans $\mathcal{P}$ trois structures topologiques différentes τ_1, τ_2, τ_3 et on étudie spécialement le problème à savoir dans quelle mesure les axiomes de séparation (T_0), (T_1), (T_2) sont transmis de S à $\mathcal{P}$ et à $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}$, formé des parties fermées de S. L'espace S est plongé dans $\mathcal{P}_{\tau_2}$ et $\mathcal{P}_{\tau_3}$. Dans la topologie τ_1 d'hypothèses plus faibles résultent des conséquences plus restrictives : Si S satisfait (T_1), $\mathcal{P}$ vérifiera l'axiome (T_2). Dans le cas de la structure topologique τ_2, si S est un espace (T_1), alors $\mathcal{P}$ jouit également de cette propriété, et tout sous-espace de $\mathcal{P}$ où les éléments diffèrent dans plus d'un seul point (plus précisément si $M_1 - M_2$ ou $M_2 - M_1$ contiennent au moins 2 points) satisfait l'axiome (T_2) de séparation. Dans la structure τ_3, S étant un espace topologique (T_1), $\mathcal{P}$ satisfait (T_0). Pour que $\mathcal{F}$ soit un espace (T_0) il n'est point besoin de supposer de S quelque axiome de séparation, pas plus qu'une structure topologique : il suffit qu'il forme un (V) — espace Fréchet. Si S est un espace topologique et satisfait (T_1), alors $\mathcal{F}$ jouira des mêmes propriétés, et si S vérifie (T_3) (il ne faut pas qu'elle soit régulière), alors $\mathcal{F}$ est un espace (T_2) dans la structure topologique τ_3.

BIBLIOGRAFIE

1. P. Alexandroff-H. Hopf, *Topologie* I. Berlin, 1935
2. N. Bourbaki, *Éléments de mathématique.* Première partie, livre III. *Topologie générale* ed. I, Paris, 1942.
3. F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre* I. ed. Leipzig, 1914.
4. G. Nöbeling; *Grundlangen der analytischen Topologie.* Berlin 1954.
5. W. Sierpinski, *General Topology.* Toronto, 1956.

Primit la 18. XII. 1959.