FORMULE DE CUBATURĂ; APLICAȚIE LA INTEGRAREA NUMERICĂ A ECUAȚIILOR CU DERIVATE PARȚIALE DE ORDINUL AL DOILEA DE TIP HIPERBOLIC*)

DE

D. V. IONESCU.
(Cluj)

Lucrare prezentată la Colocviul de teoria ecuațiilor cu derivate parțiale, organizat de Academia R.P.R. . și Societatea Științelor matematice și fizice din R. P. R. între 21—26 sept. 1959, București.

INTRODUCERE

În prima parte a acestei lucrări, studiem formulele de cubatură

$$\iint_D f dx dy = \frac{S}{4} [f(x_1, y_1) + f(x_1, y_2) + f(x_2, y_1) + f(x_2, y_2)] + R \tag{1}$$

$$\iint_D f dx dy = S f(x_0, y_0) + R, \tag{2}$$

unde D reprezintă dreptunghiul format de dreptele $x = x_1$, $x = x_2$, $y = y_1$, $y = y_2$; (x_0, y_0) sînt coordonatele centrului dreptunghiului D iar S este aria dreptunghiului D. Ne preocupăm mai ales de determinarea restului acestor formule, pe care-l punem sub forma

$$R = \iint_D \left(\varphi \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \psi \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dx dy, \tag{3}$$

presupunînd că funcția $f(x, y)$ are derivate pațiale în raport cu x și cu y, de primul și al doilea ordin, continue în D.

Determinăm de asemenea formula de cubatură

$$\iint_D f dx dy = \frac{S}{2} [f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)] + R \tag{4}$$

*) Această lucrare apare și în limba franceză în revista „Mathematica", vol 1 (24), fasc. 2, 1959.

şi punem restul R sub forma (3). Vom aplica această formulă în partea a doua a acestei lucrări la integrarea numerică a ecuaţiei cu derivate parţiale de ordinul al doilea de tip hiperbolic.

Am obţinut formulele de cubatură (1), (2), (4) printr-o extensie a metodei pe care J. R a d o n [1] a dat-o pentru obţinerea formulelor de cuadratură şi pe care noi am aplicat-o în mod sistematic [2]. Extensia făcută are un caracter general. Dezvoltarea ei sistematică va forma obiectul altor lucrări.

În partea a doua a lucrării de faţă tratăm ca aplicaţie a primei părţi, despre integrarea numerică a ecuaţiei cu derivate parţiale

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y, z, p, q), \tag{5}$$

unde $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ şi $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, presupunînd că ea admite o integrală unică $z(x, y)$ în dreptunghiul Δ format de dreptele $x = 0$, $x = \lambda$, $y = 0$, $y = \mu$ şi care este nulă pe laturile acestui dreptunghiu, situate pe axele Ox, Oy.

Problema pe care o tratăm este următoarea : Să se determine o reţea Γ formată de dreptele $x = x_i$, $y = y_k$ unde punctele x_i şi y_k împart intervalele $(0, \lambda)$ şi $(0, \mu)$ în n şi m părţi egale şi să se caute un algoritm de calcul pentru numerele $z_{ik}^{(s)}$, $p_{ik}^{(s)}$, $q_{ik}^{(s)}$ unde $s = 0, 1, \ldots, \nu$, astfel ca ε fiind un număr dat, valorile absolute ale diferenţelor

$$z(x_i, y_k) - z_{ik}^{(\nu)}, \quad p(x_i, y_k) - p_{ik}^{(\nu)}, \quad q(x_i, y_k) - q_{ik}^{(\nu)}$$

pe nodurile reţelei Γ, să fie mai mici decît 2ε.

CAPITOLUL I

FORMULE DE CUBATURĂ

§ 1. Prima formulă de cubatură

1. Să considerăm dreptunghiul D, definit de inegalităţile :

$$x_1 \leqslant x \leqslant x_2, \quad y_1 \leqslant y \leqslant y_2 \tag{1}$$

şi o funcţie $f(x, y)$ avînd derivate parţiale de primul şi al doilea ordin, continue în D. Căutăm o formulă de cubatură pentru integrala dublă

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy \tag{2}$$

relativă la dreptunghiul D. În acest scop vom extinde metoda dată de J. R a d o n [1] şi pe care am aplicat-o în numeroase lucrări [2].

Să notăm cu $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$, $\theta(x, y)$ integralele ecuaţiilor cu derivate parţiale

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \alpha, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \beta, \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \gamma, \tag{3}$$

definite în dreptunghiul D şi care satisfac la condiţiile la limită care vor fi precizate în cele ce urmează. În formulele (3) α, β, γ sînt constante care vor fi determinate.

Vom transforma integralele

$$\iint_D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} f dxdy, \quad \iint_D \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} f dxdy, \quad \iint_D \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} f dxdy \tag{4}$$

prin integrări prin părţi convenabile.

1°. Putem scrie

$$\iint_D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} f dxdy = \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} f - \varphi \frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \iint_D \varphi \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\, dxdy$$

şi vom avea

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} f dxdy = &\int_{y_1}^{y_2} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_2, y) f(x_2, y) - \varphi(x_2, y) \frac{\partial f}{\partial x}(x_2, y)\right] dy - \\ &- \int_{y_1}^{y_2} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_1, y) f(x_1, y) - \varphi(x_1, y) \frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y)\right] dy + \\ &+ \iint_D \varphi \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\, dxdy. \end{aligned} \tag{5}$$

2°. Vom avea de asemenea

$$\iint_D \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} f dxdy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \theta}{\partial y} f - \theta \frac{\partial f}{\partial y}\right) dy + \iint_D \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dxdy,$$

adică

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} f dxdy = &\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial \theta}{\partial y}(x, y_2) f(x, y_2) - \theta(x, y_2) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_2)\right] dx - \\ &- \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial \theta}{\partial y}(x, y_1) f(x, y_1) - \theta(x, y_1) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_1)\right] dx + \\ &+ \iint_D \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\, dxdy. \end{aligned} \tag{6}$$

3°. Putem scrie

$$2\iint_D \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} f dxdy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial\psi}{\partial x} f - \psi\frac{\partial f}{\partial x}\right] dy +$$

$$+ \int_{y_1}^{y_2} dy\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}f - \psi\frac{\partial f}{\partial y}\right)dx + 2\iint_D \psi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy,$$

adică

$$2\iint_D \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} f dxdy = \int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial\psi}{\partial x}(x, y_2)\, f(x, y_2)dx - \int_{x_1}^{x_2}\psi(x, y_2)\,\frac{\partial f}{\partial x}(x, y_2)dx -$$

$$-\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial\psi}{\partial x}(x, y_1)\, f(x, y_1)dx + \int_{x_1}^{x_2}\psi(x, y_1)\,\frac{\partial f}{\partial x}(x, y_1)dx +$$

$$+\int_{y_1}^{y_2}\frac{\partial\psi}{\partial y}(x_2, y)\, f(x_2, y)dy - \int_{y_1}^{y_2}\psi(x_2, y)\,\frac{\partial f}{\partial y}(x_2, y)dy -$$

$$-\int_{y_1}^{y_2}\frac{\partial\psi}{\partial y}(x_1, y) f(x_1, y)dy + \int_{y_1}^{y_2}\psi(x_1, y)\,\frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y)dy +$$

$$+ 2\iint_D \psi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy.$$

Însă

$$\int_{x_1}^{x_2}\psi(x, y_2)\,\frac{\partial f}{\partial x}(x, y_2)dx = \psi(x_2, y_2)f(x_2, y_2) - \psi(x_1, y_2)f(x_1, y_2) -$$

$$-\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial\psi}{\partial x}(x, y_2)f(x, y_2)dx$$

$$\int_{x_1}^{x_2}\psi(x, y_1)\,\frac{\partial f}{\partial x}\, f(x, y_1)dx = \psi(x_2, y_1)f(x_2, y_1) - \psi(x_1, y_1)\, f(x_1, y_1) -$$

$$-\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial\psi}{\partial x}(x, y_1)f(x, y_1)dx$$

$$\int_{y_1}^{y_2}\psi(x_2, y)\,\frac{\partial f}{\partial y}(x_2, y)dy = \psi(x_2, y_2)f(x_2, y_2) - \psi(x_2, y_1)\, f(x_2, y_1) -$$

$$-\int_{y_1}^{y_2}\frac{\partial\psi}{\partial y}(x_2, y)f(x_2, y)dy$$

$$\int_{y_1}^{y_2}\psi(x_1, y)\,\frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y)dy = \psi(x_1, y_2)f(x_1, y_2) - \psi(x_1, y_1)f(x_1, y_1) -$$

$$-\int_{y_1}^{y_2}\frac{\partial\psi}{\partial y}(x_1, y)f(x_1, y)dy.$$

Ţinînd seama de aceste formule, vom avea

$$\iint_D \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} f dxdy = -\psi(x_2, y_2)f(x_2, y_2) + \psi(x_1, y_2)f(x_1, y_2) +$$

$$+\psi(x_2, y_1)f(x_2, y_1) - \psi(x_1, y_1)f(x_1, y_1) +$$

$$+\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial\psi}{\partial x}(x, y_2)f(x, y_2)dx - \int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial\psi}{\partial x}(x, y_1)f(x, y_1)dx +$$

$$+\int_{y_1}^{y_2}\frac{\partial\psi}{\partial y}(x_2, y)f(x_2, y)dy - \int_{y_1}^{y_2}\frac{\partial\psi}{\partial y}(x_1, y)f(x_1, y)dy +$$

$$+\iint_D \psi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy. \tag{7}$$

Funcţiile $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$, $\theta(x, y)$ fiind integralele ecuaţiilor cu derivate parţiale (3), adunînd membru cu membru formulele (5), (6) şi (7), vom obţine formula

$$(\alpha+\beta+\gamma)\iint_D f dxdy = -\psi(x_2, y_2)f(x_2, y_2) + \psi(x_1, y_2)f(x_1, y_2) +$$

$$+\psi(x_2, y_1)f(x_2, y_1) - \psi(x_1, y_1)f(x_1, y_1) -$$

$$-\int_{y_1}^{y_2}\varphi(x_2, y)\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_2, y)dy + \int_{y_1}^{y_2}\varphi(x_1, y)\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y)dy -$$

$$-\int_{x_1}^{x_2}\theta(x, y_2)\,\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_2)dx + \int_{x_1}^{x_2}\theta(x, y_1)\,\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_1)dx +$$

$$+\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,y_2)+\frac{\partial\theta}{\partial y}(x,y_2)\right]f(x,y_2)dx-\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y_1)+\frac{\partial\theta}{\partial y}(x,y_1)\right]f(x,y_1)dx+$$

$$+\int_{y_1}^{y_2}\left[\frac{\partial\psi}{\partial y}(x_2,y)+\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_2,y)\right]f(x_2,y)dy-\int_{y_1}^{y_2}\left[\frac{\partial\psi}{\partial y}(x_1,y)+\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_1,y)\right]f(x_1,y)dy+$$

$$+\iint_D\left(\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\psi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)dxdy. \qquad (8)$$

Formula (8) se reduce la o formulă de cubatură cu restul ei, dacă funcţiile $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$, $\theta(x, y)$ satisfac la următoarele condiţii la limită :

$$\begin{aligned}
&\varphi(x_2, y) = 0, && \varphi(x_1, y) = 0\\
&\theta(x, y_2) = 0, && \theta(x, y_1) = 0\\
&\frac{\partial\psi}{\partial x}(x, y_2) + \frac{\partial\theta}{\partial y}(x, y_2) = 0, && \frac{\partial\psi}{\partial x}(x, y_1) + \frac{\partial\theta}{\partial y}(x, y_1) = 0 \qquad (9)\\
&\frac{\partial\psi}{\partial y}(x_2, y) + \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_2, y) = 0, && \frac{\partial\psi}{\partial y}(x_1, y) + \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_1, y) = 0.
\end{aligned}$$

Dacă este posibil să se integreze ecuaţiile cu derivate parţiale (3) cu condiţiile la limită (9), sîntem conduşi la formula de cubatură

$$(\alpha+\beta+\gamma)\iint_D f dxdy = -\psi(x_2, y_2)f(x_2, y_2) + \psi(x_1, y_2)f(x_1, y_2) +$$
$$+\psi(x_2, y_1)f(x_2, y_1) - \psi(x_1, y_1)f(x_1, y_1) + R \qquad (10)$$

cu restul

$$R = \iint_D\left(\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\psi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)dxdy. \qquad (11)$$

Căutarea formulei de cubatură (10) este astfel adusă la integrarea ecuaţiilor cu derivate parţiale (3) cu condiţiile la limită (9). Numerele α, β, γ vor fi determinate astfel ca această problemă să fie posibilă.

2. Să determinăm funcţiile $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$, $\theta(x, y)$. Prima ecuaţie (3) şi condiţiile $\varphi(x_1, y) = 0$, $\varphi(x_2, y) = 0$ determină funcţia $\varphi(x, y)$.

Vom avea

$$\varphi(x, y) = \frac{\alpha}{2}(x - x_1)(x - x_2). \qquad (12)$$

În mod analog vom avea

$$\theta(x, y) = \frac{\gamma}{2}(y - y_1)(y - y_2). \qquad (13)$$

Celelalte condiţii la limita (9) devin

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\psi}{\partial x}(x, y_1) = \frac{\gamma}{2}(y_2 - y_1); && \frac{\partial\psi}{\partial y}(x_1, y) = \frac{\alpha}{2}(x_2 - x_1)\\
&\frac{\partial\psi}{\partial x}(x, y_2) = -\frac{\gamma}{2}(y_2 - y_1); && \frac{\partial\psi}{\partial y}(x_2, y) = -\frac{\alpha}{2}(x_2 - x_1).
\end{aligned} \qquad (14)$$

A doua ecuaţie (3), ne dă

$$\psi(x, y) = \beta xy + \psi_1(x) + \psi_2(y),$$

unde $\psi_1(x)$ şi $\psi_2(y)$ sînt funcţii de determinat. Scriind că condiţiile (14) sînt satisfăcute, avem ecuaţiile

$$\beta y_1 + \psi_1'(x) = \frac{\gamma}{2}(y_2 - y_1); \qquad \beta x_1 + \psi_2'(y) = \frac{\alpha}{2}(x_2 - x_1)$$

$$\beta y_2 + \psi_1'(x) = -\frac{\gamma}{2}(y_2 - y_1); \qquad \beta x_2 + \psi_2'(y) = -\frac{\alpha}{2}(x_2 - x_1),$$

care ne dau

$$\psi_1'(x) = \frac{\gamma}{2}y_2 - \left(\frac{\gamma}{2} + \beta\right)y_1 = \frac{\gamma}{2}y_1 - \left(\frac{\gamma}{2} + \beta\right)y_2$$

$$\psi_2'(y) = \frac{\alpha}{2}x_2 - \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)x_1 = \frac{\alpha}{2}x_1 - \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)x_2.$$

Pentru ca aceste ecuaţii să fie posibile, alegem constantele α, β, γ astfel ca

$$\frac{\gamma}{2} = -\left(\frac{\gamma}{2} + \beta\right), \qquad \frac{\alpha}{2} = -\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right),$$

adică

$$\alpha = -\beta, \qquad \gamma = -\beta.$$

Pentru a determina complet constantele α, β, γ, să adăugăm ecuaţia

$$\alpha + \beta + \gamma = 1$$

şi vom avea

$$\alpha = 1, \qquad \beta = -1, \qquad \gamma = 1, \qquad (15)$$

de unde rezultă că

$$\psi_1'(x) = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \qquad \psi_2'(y) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

şi prin urmare

$$\psi_1(x) + \psi_2(y) = \frac{(y_1 + y_2)x + (x_1 + x_2)y}{2} + \text{const.}$$

Vom avea deci în definitiv

$$\psi(x, y) = -\frac{1}{2}[(x - x_1)(y - y_2) + (x - x_2)(y - y_1)] + C, \qquad (16)$$

unde C este o constantă arbitrară.

3. Funcțiile $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$, $\theta(x, y)$ fiind determinate de formulele (12), (13), (16), să revenim la formula de cubatură (10). Avem

$$\psi(x_1, y_1) = C, \qquad \psi(x_1, y_2) = C + \frac{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}{2}$$

$$\psi(x_2, y_2) = C, \qquad \psi(x_2, y_1) = C + \frac{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}{2}$$

și formula (10) devine

$$\iint_D f dxdy = - C[f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)] +$$

$$+ \left[C + \frac{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}{2}\right][f(x_1, y_2) + f(x_2, y_1)] + R, \tag{17}$$

unde restul R este dat de formula

$$R = \iint_D \left(\varphi \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \psi \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \theta \frac{\partial f^2}{\partial y^2}\right) dxdy. \tag{18}$$

În formula (17), coeficientul constantei arbitrare C, este

$$\iint_D \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dxdy - [f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) - f(x_1, y_2) - f(x_2, y_1)]$$

și el este nul, astfel că această formulă se reduce la formula de cubatură

$$\iint_D f dxdy = \frac{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}{2}[f(x_1, y_2) + f(x_2, y_1)] +$$

$$+ \iint_D \left(\varphi \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \psi \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) dxdy, \tag{19}$$

cu

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\psi(x, y) = - \frac{1}{2}[(x - x_1)(y - y_2) + (x - x_2)(y - y_1)] \tag{20}$$

$$\theta(x, y) = \frac{1}{2}(y - y_1)(y - y_2).$$

Însă se poate alege în formula (17), constanta C astfel ca această formulă să aibă alte forme.

De exemplu, pentru $C = - \frac{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}{2}$, avem formula de cubatură

$$\iint_D f dxdy = \frac{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}{2}[f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)] +$$

$$+ \iint_D \left(\varphi \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \psi \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) dxdy, \tag{21}$$

cu

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\psi(x, y) = - \frac{1}{2}[(x - x_1)(y - y_2) + (x - x_2)(y - y_1) + (x_2 - x_1)(y_2 - y_1)] \tag{22}$$

$$\theta(x, y) = \frac{1}{2}(y - y_1)(y - y_2).$$

De asemenea, dacă $C = - \frac{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}{4}$, avem formula de cubatură

$$\iint_D f dxdy = \frac{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}{4}[f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) + f(x_1, y_2) + f(x_2, y_1)] +$$

$$+ \iint_D \left(\varphi \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \psi \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) dxdy, \tag{23}$$

cu

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\psi(x, y) = - \frac{1}{2}\left[(x - x_1)(y - y_2) + (x - x_2)(y - y_1) + \frac{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}{2}\right] \tag{24}$$

$$\theta(x, y) = \frac{1}{2}(y - y_1)(y - y_2).$$

4. Se poate discuta semnul funcțiilor $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$, $\theta(x, y)$ din formulele de cubatură (19), (21), (23) în D.

În formula (19) avem $\varphi(x, y) < 0$, $\theta(x, y) < 0$, $\psi(x, y) > 0$ în D.

Din contră în formula (21) avem $\varphi(x, y) < 0$, $\theta(x, y) < 0$, $\psi(x, y) < 0$ în D. Într-adevăr, dacă în formulele (22) facem schimbarea de variabile

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} + \xi, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} + \eta, \quad \lambda = \frac{x_2 - x_1}{2}, \quad \mu = \frac{y_2 - y_1}{2}$$

vom avea

$$(x - x_1)(y - y_2) + (x - x_2)(y - y_1) + (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) = 2(\xi\eta + \lambda\mu)$$

și deoarece în dreptunghiul D, avem $|\xi| < \lambda$, $|\eta| < \mu$, paranteza $\xi\eta + \lambda\mu$ este pozitivă și prin urmare $\psi(x, y) < 0$ în D.

În formula de cubatură (23) funcția $\psi(x, y)$ își schimbă semnul în dreptunghiul D. Într-adevăr după calculele precedente, avem

$$(x - x_1)(y - y_2) + (x - x_2)(y - y_1) + \frac{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}{2} = 2\xi\eta$$

și prin urmare funcția $\psi(x, y)$ își schimbă semnul în dreptunghiul D.

5. În capitolul al doilea vom face o aplicaţie importantă a formulei de cubatură (21). Pentru această formulă vom da o evaluare a lui $|R|$.

Observăm întîi că funcţiile $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$, $\theta(x, y)$ ale acestei formule fiind negative în D, putem aplica teorema mediei şi vom avea

$$R = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_1)\iint\limits_D \varphi dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_2)\iint\limits_D \psi dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_3)\iint\limits_D \theta dxdy,$$

unde P_1, P_2, P_3 sînt anumite puncte din dreptunghiul D.

Avem

$$\iint\limits_D \varphi dxdy = -\frac{(x_2-x_1)^3(y_2-y_1)}{12}, \quad \iint\limits_D \psi dxdy = -\frac{(x_2-x_1)^2(y_2-y_1)^2}{4},$$

$$\iint\limits_D \theta dxdy = -\frac{(x_2-x_1)(y_2-y_1)^3}{12}$$

şi prin urmare formula precedentă devine

$$R = -\frac{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}{12}\Big[(x_2-x_1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_1) + 3(x_2-x_1)(y_2-y_1)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_2) + $$
$$+(y_2-y_1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_3)\Big]. \tag{25}$$

Dacă notăm cu M_2 o margine superioară a lui $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|$, $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|$, $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|$, în D, vom avea următoarea evaluare a valorii absolute a restului R din formula de cubatură (21)

$$|R| \leqslant \frac{S}{12}\left[(x_2-x_1)^2 + 3(x_2-x_1)(y_2-y_1) + (y_2-y_1)^2\right] M_2 \tag{26}$$

unde S este aria dreptunghiului D.

§ 2. A doua formulă de cubatură

6. Să considerăm dreptunghiul D definit de inegalităţile

$$x_0 - h \leqslant x \leqslant x_0 + h \quad , \quad y_0 - k \leqslant y \leqslant y_0 + k. \tag{1}$$

Vom determina restul formulei de cubatură

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = 4hkf(x_0,y_0) + R, \tag{2}$$

presupunînd că funcţia $f(x, y)$ are derivate parţiale de primul şi al doilea ordin, continue în D.

Să notăm cu D_1, D_2, D_3, D_4 dreptunghiurile definite de inegalităţile

$$\begin{array}{lll}
(D_1) & x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h, & y_0 \leqslant y \leqslant y_0 + k \\
(D_2) & x_0 - h \leqslant x \leqslant x_0 \quad , & y_0 \leqslant y \leqslant y_0 + k \\
(D_3) & x_0 - h \leqslant x \leqslant x_0 \quad , & y_0 - k \leqslant y \leqslant y_0 \\
(D_4) & x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h, & y_0 - k \leqslant y \leqslant y_0.
\end{array} \tag{3}$$

La aceste dreptunghiuri, ataşăm funcţiile şi numerele următoare

$$\begin{array}{lllll}
(D_1); & \varphi_1(x, y), & \psi_1(x, y), & \theta_1(x, y); & \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \\
(D_2); & \varphi_2(x, y), & \psi_2(x, y), & \theta_2(x, y); & \alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \\
(D_3); & \varphi_3(x, y), & \psi_3(x, y), & \theta_3(x, y); & \alpha_3, \beta_3, \gamma_3 \\
(D_4); & \varphi_4(x, y), & \psi_4(x, y), & \theta_4(x, y); & \alpha_4, \beta_4, \gamma_4,
\end{array}$$

astfel ca

$$\begin{array}{lll}
\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} = \alpha_1, & \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} = \beta_1, & \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y^2} = \gamma_1 \\
\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} = \alpha_2, & \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial y} = \beta_2, & \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial y^2} = \gamma_2 \\
\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} = \alpha_3, & \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial x \partial y} = \beta_3, & \frac{\partial^2 \theta_3}{\partial y^2} = \gamma_3 \\
\frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial x^2} = \alpha_4, & \frac{\partial^2 \psi_4}{\partial x \partial y} = \beta_4, & \frac{\partial^2 \theta_4}{\partial y^2} = \gamma_4.
\end{array} \tag{4}$$

La fiecare dreptunghi D_1, D_2, D_3, D_4 să aplicăm formula (8) din § 1. Vom avea

$$(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1)\iint\limits_{D_1} f(x, y)dxdy = -\psi_1(x_0 + h, y_0 + k)f(x_0 + h, y_0 + k) +$$
$$+\psi_1(x_0, y_0 + k)f(x_0, y_0 + k) + \psi_1(x_0 + h, y_0)f(x_0 + h, y_0) - \psi_1(x_0, y_0)f(x_0, y_0) -$$
$$-\int_{y_0}^{y_0+k}\varphi_1(x_0 + h, y)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + h, y)dy + \int_{y_0}^{y_0+k}\varphi_1(x_0, y)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y)dy -$$
$$-\int_{x_0}^{x_0+h}\theta_1(x, y_0 + k)\frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0 + k)dx + \int_{x_0}^{x_0+h}\theta_1(x, y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)dx +$$
$$+\int_{x_0}^{x_0+h}\left[\frac{\partial \psi_1}{\partial x}(x, y_0 + k) + \frac{\partial \theta_1}{\partial y}(x, y_0 + k)\right]f(x, y_0 + k)dx -$$
$$-\int_{x_0}^{x_0+h}\left[\frac{\partial \psi_1}{\partial x}(x, y_0) + \frac{\partial \theta_1}{\partial y}(x, y_0)\right]f(x, y_0)dx +$$

$$+\int_{y_0}^{y_0+k}\left[\frac{\partial\psi_1}{\partial y}(x_0+h,y)+\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}(x_0+h,y)\right]f(x_0+h,y)dy-$$

$$-\int_{y_0}^{y_0+k}\left[\frac{\partial\psi_1}{\partial y}(x_0,y)+\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}(x_0,y)\right]f(x_0,y)dy+$$

$$+\iint_{D_1}\left(\varphi_1\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\psi_1\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\theta_1\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)dxdy, \tag{5}$$

$$(\alpha_2+\beta_2+\gamma_2)\iint_{D_2}f(x,y)=-\psi_2(x_0,y_0+k)f(x_0,y_0+k)+$$

$$+\psi_2(x_0-h,y_0+k)f(x_0-h,y_0+k)+$$

$$+\psi_2(x_0,y_0)f(x_0,y_0)-\psi_2(x_0-h,y_0)f(x_0-h,y_0)-$$

$$-\int_{y_0}^{y_0+k}\varphi_2(x_0,y)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y)dy+\int_{y_0}^{y_0+k}\varphi_2(x_0-h,y)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0-h,y)dy-$$

$$-\int_{x_0-h}^{x_0}\theta_2(x,y_0+k)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0+k)dx+\int_{x_0-k}^{x_0}\theta_2(x,y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)dx+$$

$$+\int_{x_0-h}^{x_0}\left[\frac{\partial\psi_2}{\partial x}(x,y_0+k)+\frac{\partial\theta_2}{\partial y}(x,y_0+k)\right]f(x,y_0+k)dx-$$

$$-\int_{x_0-h}^{x_0}\left[\frac{\partial\psi_2}{\partial x}(x,y_0)+\frac{\partial\theta_2}{\partial y}(x,y_0)\right]f(x,y_0)dx+$$

$$+\int_{y_0}^{y_0+k}\left[\frac{\partial\psi_2}{\partial y}(x_0,y)+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}(x_0,y)\right]f(x_0,y)dy-$$

$$-\int_{y_0}^{y_0+k}\left[\frac{\partial\psi_2}{\partial y}(x_0-h,y)+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}(x_0-h,y)\right]f(x_0-h,y)dy+$$

$$+\iint_{D_2}\left(\varphi_2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\psi_2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\theta_2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)dxdy, \tag{6}$$

$$(\alpha_3+\beta_3+\gamma_3)\iint_{D_3}f(x,y)dxdy=-\psi_3(x_0,y_0)f(x_0,y_0)+$$

$$+\psi_3(x_0-h,y_0)f(x_0-h,y_0)+$$

$$+\psi_3(x_0,y_0-k)f(x_0,y_0-k)-\psi_3(x_0-h,y_0-k)f(x_0-h,y_0-k)-$$

$$-\int_{y_0-k}^{y_0}\varphi_3(x_0,y)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y)dy+\int_{y_0-k}^{y_0}\varphi_3(x_0-h,y)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0-h,y)dy-$$

$$-\int_{x_0-h}^{x_0}\theta_3(x,y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)dx+\int_{x_0-h}^{x_0}\theta_3(x,y_0-k)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0-k)dx+$$

$$+\int_{x_0-h}^{x_0}\left[\frac{\partial\psi_3}{\partial x}(x,y_0)+\frac{\partial\theta_3}{\partial y}(x,y_0)\right]f(x,y_0)dx-$$

$$-\int_{x_0-h}^{x_0}\left[\frac{\partial\psi_3}{\partial x}(x,y_0-k)+\frac{\partial\theta_3}{\partial y}(x,y_0-k)\right]f(x,y_0-k)dx+$$

$$+\int_{y_0-k}^{y_0}\left[\frac{\partial\psi_3}{\partial y}(x_0,y)+\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}(x_0,y)\right]f(x_0,y)dy-$$

$$-\int_{y_0-k}^{y_0}\left[\frac{\partial\psi_3}{\partial y}(x_0-h,y)+\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}(x_0-h,y)\right]f(x_0-h,y)dy+$$

$$+\iint_{D_3}\left(\varphi_3\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\psi_3\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\theta_3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)dxdy, \tag{7}$$

$$(\alpha_4+\beta_4+\gamma_4)\iint_{D_4}f(x,y)dxdy=-\psi_4(x_0+h,y_0)f(x_0+h,y_0)+$$

$$+\psi_4(x_0,y_0)f(x_0,y_0)+$$

$$+\psi_4(x_0+h,y_0-k)f(x_0+h,y_0-k)-\psi_4(x_0,y_0-k)f(x_0,y_0-k)$$

$$-\int_{y_0-k}^{y_0}\varphi_4(x_0+h,y)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+h,y)dy+\int_{y_0-k}^{y_0}\varphi_4(x_0,y)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y)dy-$$

$$-\int_{x_0}^{x_0+h}\theta_4(x,y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)dx+\int_{x_0}^{x_0+h}\theta_4(x,y_0-k)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0-k)dx+$$

$$+\int_{x_0}^{x_0+h}\left[\frac{\partial\psi_4}{\partial x}(x,y_0)+\frac{\partial\theta_4}{\partial y}(x,y_0)\right]f(x,y_0)dx-$$

$$-\int_{x_0}^{x_0+h}\left[\frac{\partial\psi_4}{\partial x}(x,y_0-k)+\frac{\partial\theta_4}{\partial y}(x,y_0-k)\right]f(x,y_0-k)dx+$$

$$+\int_{y_0-k}^{y_0}\left[\frac{\partial\psi_4}{\partial y}(x_0+h,y)+\frac{\partial\varphi_4}{\partial x}(x_0+h,y)\right]f(x_0+h,y)dy-$$

$$-\int_{y_0-k}^{y_0-k}\left[\frac{\partial\psi_4}{\partial y}(x_0,y)+\frac{\partial\varphi_4}{\partial y}(x_0,y)\right]f(x_0,y)dy+$$

$$+\iint_{D_4}\left(\varphi_4\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\psi_4\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\theta_4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)dxdy. \tag{8}$$

Să adunăm membru cu membru, formulele (5), (6), (7) şi (8), şi să impunem condiţii la limită, astfel ca noua formulă să fie de forma (2). Presupunem întîi că constantele α_i, β_i, γ_i sînt astfel ca

$$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=\alpha_2+\beta_2+\gamma_2=\alpha_3+\beta_3+\gamma_3=\alpha_4+\beta_4+\alpha_4=\lambda. \tag{9}$$

Condiţiile la limită vor fi următoarele:

$$\begin{aligned}&\psi_1(x_0+h,y_0+k)=0, && \psi_2(x_0-h,y_0+k)=0\\ &\psi_3(x_0-h,y_0-k)=0, && \psi_4(x_0+h,y_0-k)=0\end{aligned} \tag{10_1}$$

$$\begin{aligned}&\psi_1(x_0,y_0+k)-\psi_2(x_0,y_0+k)=0, && \psi_2(x_0-h,y_0)-\psi_3(x_0-h,y_0)=0\\ &\psi_3(x_0,y_0-k)-\psi_4(x_0,y_0-k)=0, && \psi_4(x_0+h,y_0)-\psi_1(x_0+h,y_0)=0\end{aligned} \tag{10_2}$$

$$\begin{aligned}&\varphi_1(x_0+h,y)=0, && \theta_1(x,y_0+k)=0\\ &\varphi_2(x_0-h,y)=0, && \theta_2(x,y_0+k)=0\\ &\varphi_3(x_0-h,y)=0, && \theta_3(x,y_0-k)=0\\ &\varphi_4(x_0+h,y)=0, && \theta_4(x,y_0-k)=0\end{aligned} \tag{10_3}$$

$$\begin{aligned}&\varphi_1(x_0,y)-\varphi_2(x_0,y)=0, && \theta_1(x,y_0)-\theta_4(x,y_0)=0\\ &\theta_2(x,y_0)-\theta_3(x,y_0)=0, && \varphi_3(x_0,y)-\varphi_4(x_0,y)=0\end{aligned} \tag{10_4}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\psi_1}{\partial x}(x,y_0+k)+\frac{\partial\theta_1}{\partial y}(x,y_0+k)=0, && \frac{\partial\psi_2}{\partial x}(x,y_0+k)+\frac{\partial\theta_2}{\partial y}(x,y_0+k)=0\\ &\frac{\partial\psi_2}{\partial y}(x_0-h,y)+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}(x_0-h,y)=0, && \frac{\partial\psi_3}{\partial y}(x_0-h,y)+\frac{\partial\varphi_3}{\partial x}(x_0-h,y)=0\\ &\frac{\partial\psi_3}{\partial x}(x,y_0-k)+\frac{\partial\theta_3}{\partial y}(x,y_0-k)=0, && \frac{\partial\psi_4}{\partial x}(x,y_0-k)+\frac{\partial\theta_4}{\partial y}(x,y_0-k)=0\\ &\frac{\partial\psi_4}{\partial y}(x_0+h,y)+\frac{\partial\varphi_4}{\partial x}(x_0+h,y)=0, && \frac{\partial\psi_1}{\partial y}(x_0+h,y)+\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}(x_0+h,y)=0\end{aligned} \tag{10_5}$$

$$\begin{aligned}&-\frac{\partial\psi_1}{\partial y}(x_0,y)-\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}(x_0,y)+\frac{\partial\psi_2}{\partial y}(x_0,y)+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}(x_0,y)=0.\\ &-\frac{\partial\psi_1}{\partial x}(x,y_0)-\frac{\partial\theta_1}{\partial y}(x,y_0)+\frac{\partial\psi_4}{\partial x}(x,y_0)+\frac{\partial\theta_4}{\partial y}(x,y_0)=0\\ &-\frac{\partial\psi_2}{\partial x}(x,y_0)-\frac{\partial\theta_2}{\partial y}(x,y_0)+\frac{\partial\psi_3}{\partial x}(x,y_0)+\frac{\partial\theta_3}{\partial y}(x,y_0)=0\\ &-\frac{\partial\psi_4}{\partial y}(x_0,y)-\frac{\partial\varphi_4}{\partial x}(x_0,y)+\frac{\partial\psi_3}{\partial y}(x_0,y)+\frac{\partial\varphi_3}{yx}(x_0,y)=0.\end{aligned} \tag{10_6}$$

Se obţine astfel formula de cubatură

$$\lambda\iint_D f(x,y)dxdy= \tag{11}$$

$$=[-\psi_1(x_0,y_0)+\psi_2(x_0,y_0)-\psi_3(x_0,y_0)+\psi_4(x_0,y_0)]\,f(x_0,y_0)+R,$$

unde restul R este dat de formula

$$R=\iint_D\left(\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\psi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)dxdy, \tag{12}$$

funcţiile φ, ψ, θ fiind egale cu φ_1, ψ_1, θ_1 în D_1, cu φ_2, ψ_2, θ_2 în D_2, cu φ_3, ψ_3, θ_3, în D_3 şi cu φ_4, ψ_4, θ_4 în D_4.

Căutarea formulei de cubatură (11) este astfel adusă la integrarea ecuaţiilor cu derivate parţiale (4) cu condiţiile la limită (10). Constantele α_i, β_i, γ_i vor fi determinate astfel ca această problemă să fie posibilă.

7. Vom determina acum funcţiile φ_i, ψ_i, θ_i şi numerele α_i, β_i, γ_i.

Să integrăm întîi ecuaţiile

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}=\alpha_1, \qquad \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2}=\alpha_2$$

ţinînd seama de condiţiile la limită

$$\varphi_1(x_0+h,y)=0,\quad \varphi_2(x_0-h,y)=0$$
$$\varphi_1(x_0,y)-\varphi_2(x_0,y)=0.$$

Vom avea

$$\varphi_1(x,y)=\frac{\alpha_1}{2}x^2+A_1(y)x+B_1(y)$$

$$\varphi_2(x,y)=\frac{\alpha_2}{2}x^2+A_2(y)x+B_2(y)$$

$$0=\frac{\alpha_1}{2}(x_0+h)^2+A_1(y)(x_0+h)+B_1(y)$$

$$0=\frac{\alpha_2}{2}(x_0-h)^2+A_2(y)(x_0-h)+B_2(y),$$

de unde rezultă că

$$\varphi_1(x, y) = (x - x_0 - h)\left[\frac{\alpha_1}{2}(x + x_0 + h) + A_1(y)\right]$$

$$\varphi_2(x, y) = (x - x_0 + h)\left[\frac{\alpha_2}{2}(x + x_0 - h) + A_2(y)\right].$$

Condiţia $\varphi_1(x_0, y) - \varphi_2(x_0, y) = 0$ ne dă ecuaţia

$$(\alpha_1 + \alpha_2)x_0 + \frac{h}{2}(\alpha_1 - \alpha_2) + A_1(y) + A_2(y) = 0$$

care determină pe $A_2(y)$; vom avea

$$A_2(y) = -(\alpha_1 + \alpha_2)x_0 - \frac{h}{2}(\alpha_1 - \alpha_2) - A_1(y)$$

şi prin urmare

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y) &= (x - x_0 - h)\left[\frac{\alpha_1}{2}(x + x_0 + h) + A_1(y)\right] \\ \varphi_2(x, y) &= (x - x_0 + h)\left[\frac{\alpha_2}{2}(x - x_0) - \alpha_1 x_0 - \frac{h}{2}\alpha_1 - A_1(y)\right], \end{aligned} \tag{13}$$

unde $A_1(y)$ este o funcţie arbitrară.

În mod analog se găseşte

$$\begin{aligned} \varphi_3(x, y) &= (x - x_0 + h)\left[\frac{\alpha_3}{2}(x - x_0) - \alpha_4 x_0 - \frac{h}{2}\alpha_4 - A_4(y)\right] \\ \varphi_4(x, y) &= (x - x_0 - h)\left[\frac{\alpha_4}{2}(x + x_0 + h) + A_4(y)\right], \end{aligned} \tag{13'}$$

unde $A_4(y)$ este o funcţie arbitrară.

Printr-un procedeu analog, se găseşte că

$$\begin{aligned} \theta_1(x, y) &= (y - y_0 - k)\left[\frac{\gamma_1}{2}(y + y_0 + k) + C_1(x)\right] \\ \theta_2(x, y) &= (y - y_0 - k)\left[\frac{\gamma_2}{2}(y + y_0 + k) + C_2(x)\right] \\ \theta_3(x, y) &= (y - y_0 + k)\left[\frac{\gamma_3}{2}(y - y_0) - \gamma_2 y_0 - \frac{k}{2}\gamma_2 - C_2(x)\right] \\ \theta_4(x, y) &= (y - y_0 + k)\left[\frac{\gamma_4}{2}(y - y_0) - \gamma_1 y_0 - \frac{k}{2}\gamma_1 - C_1(x)\right], \end{aligned} \tag{14}$$

unde $C_1(x)$ şi $C_2(x)$ sînt funcţii arbitrare.

Cu formulele (13), (13′) şi (14) condiţiile la limită (10_3) şi (10_4) sînt satisfăcute.

Să trecem la determinarea funcţiei $\psi_1(x, y)$. Condiţiile la limită (10_5) ne dau

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x}(x, y_0 + k) = -\frac{\partial \theta_1}{\partial y}(x, y_0 + k)$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial y}(x_0 + h, y) = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x_0 + h, y)$$

şi formulele (13) şi (14) ne dau

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_1}{\partial y}(x, y_0 + k) &= -\gamma_1(y_0 + k) - C_1(x) \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial y}(x_0 + h, y) &= -\alpha_1(x_0 + h) - A_1(y) \end{aligned} \tag{15}$$

Să integrăm acum ecuaţia

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial y} = \beta_1$$

cu condiţiile (15) şi cu prima condiţie (10_1).

Vom avea

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x} = \beta_1(y - y_0 - k) - \gamma_1(y_0 + k) - C_1(x)$$

şi integrînd în raport cu x, se găseşte

$$\begin{aligned} \psi_1(x, y) = {} & \beta_1(x - x_0 - h)(y - y_0 - k) - \gamma_1(y_0 + k)(x - x_0 - h) \\ & - \alpha_1(x_0 + h)(y - y_0 - k) - \int_{x_0+h}^{x} C_1(s)ds - \int_{y_0+k}^{y} A_1(t)dt \end{aligned} \tag{16}$$

Funcţia $\psi_1(x, y)$ astfel determinată satisface la condiţiile (15) şi la condiţia $\psi_1(x_0 + h, y_0 + k) = 0$.

Introducînd funcţiile

$$\begin{aligned} P_1(x) &= \int_{x_0+h}^{x} C_1(s)ds, & Q_1(y) &= \int_{y_0+k}^{y} A_1(t)dt \\ P_2(x) &= \int_{x_0-h}^{x} C_2(s)ds, & Q_2(y) &= \int_{y_0-k}^{y} A_4(t)dt \end{aligned} \tag{17}$$

vom avea formulele

$$\begin{aligned} \psi_1(x, y) = {} & \beta_1(x - x_0 - h)(y - y_0 - k) - \gamma_1(y_0 + k)(x - x_0 - h) - \\ & - \alpha_1(x_0 + h)(y - y_0 - k) - P_1(x) - Q_1(y) \\ \psi_2(x, y) = {} & \beta_2(x - x_0 + h)(y - y_0 - k) + \left(\alpha_1 x_0 + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}h\right)(y - y_0 - k) - \\ & - \gamma_2(y_0 + k)(x - x_0 + h) - P_2(x) + Q_1(y) \end{aligned} \tag{18}$$

$$\psi_3(x, y) = \beta_3(x - x_0 + h)(y - y_0 + k) + \left(\gamma_2 y_0 + \frac{\gamma_2 + \gamma_3}{2} k\right)(x - x_0 + h) +$$
$$+ \left(\alpha_4 x_0 + \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2} h\right)(y - y_0 + k) + P_2(x) + Q_2(y)$$

$$\psi_4(x, y) = \beta_4(x - x_0 - h)(y - y_0 + k) + \left(\gamma_1 y_0 + \frac{\gamma_1 + \gamma_4}{2} k\right)(x - x_0 - h) -$$
$$- \alpha_4(x_0 + h)(y - y_0 + k) + P_1(x) - Q_2(y).$$

Cu formulele (18), condiţiile (10_1) şi (10_5) sînt satisfăcute. Să scriem că şi condiţiile (10_2) sînt satisfăcute ; vom avea ecuaţiile

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(y_0 + k)h + P_2(x_0) - P_1(x_0) = 0$$
$$(\alpha_1 + \alpha_4)(x_0 + h)k + Q_2(y_0) - Q_1(y_0) = 0$$

$$\left[(\gamma_1 + \gamma_2)y_0 + \frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4}{2} k\right] h + P_2(x_0) - P_1(x_0) = 0$$

$$\left[(\alpha_1 + \alpha_4)x_0 + \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}{2} h\right] k + Q_2(y_0) - Q_1(y_0) = 0$$

care ne dau

$$\begin{aligned} \gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_3 + \gamma_4 &= -\frac{P_2(x_0) - P_1(x_0)}{(y_0 + k)h} \\ \alpha_1 + \alpha_4 = \alpha_2 + \alpha_3 &= -\frac{Q_2(y_0) - Q_1(y_0)}{(x_0 + h)k}. \end{aligned} \tag{19}$$

Scriind că condiţiile (10_6) sînt de asemenea satisfăcute, vom avea ecuaţiile următoare

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 &= 0 \\ \beta_1 + \beta_4 + \gamma_1 + \gamma_4 &= 0 \\ \gamma_3 + \gamma_2 + \beta_2 + \beta_3 &= 0 \\ \alpha_3 + \alpha_4 + \beta_3 + \beta_4 &= 0. \end{aligned} \tag{20}$$

8. Rămîne să determinăm numerele α_i, β_i, γ_i care satisfac la relaţiile (9), (19) şi (20).

Să introducem notaţiile

$$\frac{P_1(x_0) - P_2(x_0)}{2h(y_0 + k)} = I, \qquad \frac{Q_1(y_0) - Q_2(y_0)}{2k(x_0 + h)} = J \tag{21}$$

şi parametrii t, u, v, z, prin relaţiile

$$\alpha_1 - \alpha_4 = 2t, \quad \alpha_3 - \alpha_2 = 2u, \quad \gamma_1 - \gamma_2 = 2v, \quad \gamma_3 - \gamma_4 = 2z.$$

Din ecuaţiile

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 2I ; \quad \gamma_3 + \gamma_4 = 2I ; \quad \alpha_1 + \alpha_4 = 2J ; \quad \alpha_3 + \alpha_2 = 2J$$
$$\gamma_1 - \gamma_2 = 2v ; \quad \gamma_3 - \gamma_4 = 2z ; \quad \alpha_1 - \alpha_4 = 2t ; \quad \alpha_3 - \alpha_2 = 2u$$

se pot determina numerele α_i şi γ_i ; vom avea

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= J + t, & \gamma_1 &= I + v \\ \alpha_2 &= J - u, & \gamma_2 &= I - v \\ \alpha_3 &= J + u, & \gamma_3 &= I + z \\ \alpha_4 &= J - t, & \gamma_4 &= I - z. \end{aligned}$$

În sfîrşit ecuaţiile (9), unde λ este presupus cunoscut, ne dau

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \lambda - I - J - v - t \\ \beta_2 &= \lambda - I - J + v + u \\ \beta_3 &= \lambda - I - J - z - u \\ \beta_4 &= \lambda - I - J + z + t. \end{aligned}$$

Scriind că ecuaţiile (20) sînt satisfăcute, vom avea condiţiile

$$\lambda = I = J. \tag{22}$$

Vom avea în sfîrşit

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= J + t, & \beta_1 &= -J - v - t, & \gamma_1 &= J + v \\ \alpha_2 &= J - u, & \beta_2 &= -J + v + u, & \gamma_2 &= J - v \\ \alpha_3 &= J + u, & \beta_3 &= -J - z - u, & \gamma_3 &= J + z \\ \alpha_4 &= J - t, & \beta_4 &= -J + z + t, & \gamma_4 &= J - z. \end{aligned} \tag{23}$$

Astfel problema integrării ecuaţiilor cu derivate parţiale (4) cu condiţiile la limită $(10_1), \ldots, (10_6)$ este rezolvată.

Funcţiile φ_i, ψ_i, θ_i sînt date de formulele (13), (14), (18) unde $A_1(y)$, $A_4(y)$, $C_1(x)$, $C_2(x)$, sînt funcţii arbitrare, legate prin funcţiile (17), cu relaţia

$$\frac{P_1(x_0) - P_2(x_0)}{2h(y_0 + k)} = \frac{Q_1(y_0) - Q_2(y_0)}{2k(x_0 + h)}. \tag{24}$$

9. Să calculăm acum coeficientul lui $f(x_0, y_0)$ în formula de cubatură (11). Avem

$$-\psi_1(x_0, y_0) + \psi_2(x_0, y_0) - \psi_3(x_0, y_0) + \psi_4(x_0, y_0) =$$
$$= -(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4)hk - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)\frac{hk}{2} - (\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4)\frac{hk}{2} -$$
$$- (\gamma_1 + \gamma_2)h(y_0 + k) - (\gamma_1 + \gamma_2)hy_0 - (\alpha_1 + \alpha_4)k(x_0 + h) - (\alpha_1 + \alpha_4)kx_0 +$$
$$+ 2[P_1(x_0) - P_2(x_0)] + 2[Q_1(y_0) - Q_2(y_0)].$$

Ţinînd seama de formulele (21), (22), (23), (24) se găseşte

$$-\psi_1(x_0, y_0) + \psi_2(x_0, y_0) - \psi_3(x_0, y_0) + \psi_4(x_0, y_0) = 4Jhk.$$

Formula de cubatură (11) devine astfel

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = 4hk\,f(x_0, y_0) + \frac{R}{J}. \tag{25}$$

10. Să vedem acum rolul constantelor arbitrare t, u, v, z şi al funcţiilor arbitrare $A_1(y)$, $A_4(y)$, $C_1(x)$, $C_2(x)$ care întră în funcţiile φ_i, ψ_i, θ_i în expresia restului R al formulei de cubatură (25).

Coeficientul lui t în expresia lui R, conform formulelor (13), (14), (18) şi (23) este

$$
\begin{aligned}
T = \frac{1}{2}\iint_{D_1} & (x-x_0-h)(x+x_0+h)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dxdy - \\
& -\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\iint_{D_2}(x-x_0+h)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dxdy + \\
& +\left((x_0+\frac{h}{2}\right)\iint_{D_3}(x-x_0+h)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dxdy - \\
& -\frac{1}{2}\iint_{D_4}(x-x_0-h)(x+x_0+h)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dxdy - \\
& -(x_0+h)\iint_{D_1}(y-y_0-k)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy - \\
& -\iint_{D_1}(x-x_0-h)(y-y_0-k)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy + \\
& +\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\iint_{D_2}(y-y_0-k)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy - \\
& -\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\iint_{D_3}(y-y_0+k)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy + \\
& +(x_0+h)\iint_{D_4}(y-y_0+k)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy + \\
& +\iint_{D_4}(x-x_0-h)(y-y_0+k)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy.
\end{aligned}
$$

Prin integrări prin părţi, convenabil duse, se demonstrează că $T = 0$. Se demonstrează în mod analog că în expresia restului R al formulei de cubatură, coeficienţii lui u, v, z sînt nuli.

Rezultă că în formulele (23) se poate face $t = u = v = z = 0$ şi atunci aceste formule se reduc la

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = J \\
\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = -J \\
\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = J.
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Formulele (13), (14) şi (18) devin

$$\varphi_1(x, y) = (x - x_0 - h)\left[\frac{J}{2}(x + x_0 + h) + A_1(y)\right]$$

$$\varphi_2(x, y) = (x - x_0 + h)\left[\frac{J}{2}(x - x_0) - J\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) - A_1(y)\right]$$

$$\varphi_3(x, y) = (x - x_0 + h)\left[\frac{J}{2}(x - x_0) - J\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) - A_4(y)\right]$$

$$\varphi_4(x, y) = (x - x_0 - h)\left[\frac{J}{2}(x + x_0 + h) + A_4(y)\right]$$

$$\theta_1(x, y) = (y - y_0 - k)\left[\frac{J}{2}(y + y_0 + k) + C_1(x)\right]$$

$$\theta_2(x, y) = (y - y_0 - k)\left[\frac{J}{2}(y + y_0 + k) + C_2(x)\right]$$

$$\theta_3(x, y) = (y - y_0 + k)\left[\frac{J}{2}(y - y_0) - J\left(y_0 + \frac{k}{2}\right) - C_2(x)\right]$$

$$\theta_4(x, y) = (y - y_0 + k)\left[\frac{J}{2}(y - y_0) - J\left(y_0 + \frac{k}{2}\right) - C_1(x)\right]$$

$$
\begin{aligned}
\psi_1(x, y) = & -J(x - x_0 - h)(y - y_0 - k) - J(y_0 + k)(x - x_0 - h) - \\
& - J(x_0 + h)(y - y_0 - k) - \int_{x_0+h}^{x} C_1(s)ds - \int_{y_0+k}^{y} A_1(t)dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\psi_2(x, y) = & -J(x - x_0 + h)(y - y_0 - k) + J(x_0 + h)(y - y_0 - k) - \\
& - J(y_0 + k)(x - x_0 + h) - \int_{x_0-h}^{x} C_2(s)ds + \int_{y_0+k}^{y} A_1(t)dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\psi_3(x, y) = & -J(x - x_0 + h)(y - y_0 + k) + J(y_0 + k)(x - x_0 + h) + \\
& + J(x_0 + h)(y - y_0 + k) + \int_{x_0-h}^{x} C_2(s)ds + \int_{y_0-k}^{y} A_4(t)dt.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\psi_4(x, y) = & -J(x - x_0 - h)(y - y_0 + k) + J(y_0 + k)(x - x_0 - h) - \\
& - J(x_0 + h)(y - y_0 + k) + \int_{x_0+h}^{x} C_1(s)ds - \int_{y_0-k}^{y} A_4(t)dt.
\end{aligned}
$$

Funcțiile $\psi_1(x, y)$, $\psi_2(x, y)$, $\psi_3(x, y)$, $\psi_4(x, y)$, pot încă să fie scrise sub forma următoare

$$\psi_1(x, y) = -J(x - x_0 - h)(y - y_0 - k) - \int_{x_0+h}^{x} [C_1(s) + J(y_0 + k)]ds - \int_{y_0+k}^{y} [A_1(t) + J(x_0 + h)]dt$$

$$\psi_2(x, y) = -J(x - x_0 + h)(y - y_0 - k) - \int_{x_0-h}^{x} [C_2(s) + J(y_0 + k)]ds + \int_{y_0+k}^{y} [A_1(t) + J(x_0 + h)]dt$$

$$\psi_3(x, y) = -J(x - x_0 + h)(y - y_0 + k) + \int_{x_0-h}^{x} [C_2(s) + J(y_0 + k)]ds + \int_{y_0-k}^{y} [A_4(t) + J(x_0 + h)]dt$$

$$\psi_4(x, y) = -J(x - x_0 - h)(y - y_0 + k) + \int_{x_0+h}^{x} [C_1(s) + J(y_0 + k)]ds - \int_{y_0-k}^{y} [A_4(t) + J(x_0 + h)]dt.$$

Aceasta ne sugerează să notăm

$$\begin{aligned} \overline{A}_1(y) &= A_1(y) + J(x_0 + h), & \overline{C}_1(x) &= C_1(x) + J(y_0 + k) \\ \overline{A}_4(y) &= A_4(y) + J(x_0 + h), & \overline{C}_2(x) &= C_2(x) + J(y_0 + k) \end{aligned} \tag{27}$$

și formulele precedente devin

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x, y) &= (x - x_0 - h)\left[\frac{J}{2}(x - x_0 - h) + \overline{A}_1(y)\right] \\
\varphi_2(x, y) &= (x - x_0 + h)\left[\frac{J}{2}(x - x_0 + h) - \overline{A}_1(y)\right] \\
\varphi_3(x, y) &= (x - x_0 + h)\left[\frac{J}{2}(x - x_0 + h) - \overline{A}_4(y)\right] \\
\varphi_4(x, y) &= (x - x_0 - h)\left[\frac{J}{2}(x - x_0 - h) + \overline{A}_4(y)\right] \\
\theta_1(x, y) &= (y - y_0 - k)\left[\frac{J}{2}(y - y_0 - k) + \overline{C}_1(x)\right] \\
\theta_2(x, y) &= (y - y_0 - k)\left[\frac{J}{2}(y - y_0 - k) + \overline{C}_2(x)\right] \\
\theta_3(x, y) &= (y - y_0 + k)\left[\frac{J}{2}(y - y_0 + k) - \overline{C}_2(x)\right] \\
\theta_4(x, y) &= (y - y_0 + k)\left[\frac{J}{2}(y - y_0 + k) - \overline{C}_1(x)\right] \\
\psi_1(x, y) &= -J(x - x_0 - h)(y - y_0 - k) - \int_{x_0+h}^{x} \overline{C}_1(s)ds - \int_{y_0+k}^{y} \overline{A}_1(t)dt. \\
\psi_2(x, y) &= -J(x - x_0 + h)(y - y_0 - k) - \int_{x_0-h}^{x} \overline{C}_2(s)ds + \int_{y_0+k}^{y} \overline{A}_1(t)dt. \\
\psi_3(x, y) &= -J(x - x_0 + h)(y - y_0 + k) + \int_{x_0-h}^{x} \overline{C}_2(s)ds + \int_{y_0-k}^{y} \overline{A}_4(t)dt. \\
\psi_4(x, y) &= -J(x - x_0 - h)(y - y_0 + k) + \int_{x_0+h}^{x} \overline{C}_1(s)ds - \int_{y_0-k}^{y} \overline{A}_4(t)dt.
\end{aligned} \tag{28}$$

Cu noile funcţii (27) vom avea

$$P_1(x_0) - P_2(x_0) = \int_{x_0+h}^{x_0} \overline{C}_1(s)\,ds - \int_{x_0-h}^{x_0} \overline{C}_2(s)ds + 2Jh(y_0 + k)$$

$$Q_1(y_0) - Q_2(y_0) = \int_{y_0+k}^{y_0} \overline{A}_1(t)dt - \int_{y_0-k}^{y_0} \overline{A}_4(t)dt + 2Jk(x_0 + h)$$

şi condiţia (24) devine

$$\frac{\displaystyle\int_{x_0+h}^{x_0} \overline{C}_1(s)\,ds - \int_{x_0-h}^{x_0} \overline{C}_2(s)ds}{2h(y_0+k)} = \frac{\displaystyle\int_{y_0+k}^{y_0} \overline{A}_1(t)dt - \int_{y_0-k}^{y_0} \overline{A}_4(t)dt}{2k(x_0+h)}. \tag{29}$$

Suma termenilor din rest în care întră $\overline{A}_1(y)$, $\overline{A}_4(y)$, $\overline{C}_1(x)$, $\overline{C}_2(x)$ este următoarea :

$$\begin{aligned}
\varrho = & \iint_{D_1} \overline{A}_1(y)\,(x - x_0 - h)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dxdy - \iint_{D_1}\left(\int_{y_0+k}^{y}\overline{A}_1(t)dt\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,dxdy - \\
& - \iint_{D_2} \overline{A}_1(y)\,(x - x_0 + h)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dxdy + \iint_{D_2}\left(\int_{y_0+k}^{y}\overline{A}_1(t)dt\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,dxdy - \\
& - \iint_{D_3} \overline{A}_4(y)\,(x - x_0 + h)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dxdy + \iint_{D_3}\left(\int_{y_0-k}^{y}\overline{A}_4(t)dt\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,dxdy + \\
& + \iint_{D_4} \overline{A}_4(y)\,(x - x_0 - h)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dxdy - \iint_{D_4}\left(\int_{y_0-k}^{y}\overline{A}_4(t)dt\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,dxdy + \qquad (30) \\
& + \iint_{D_1} \overline{C}_1(x)\,(y - y_0 - k)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,dxdy - \iint_{D_1}\left(\int_{x_0+h}^{x}\overline{C}_1(s)ds\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,dxdy - \\
& - \iint_{D_4} \overline{C}_1(x)\,(y - y_0 + k)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,dxdy + \iint_{D_4}\left(\int_{x_0+h}^{x}\overline{C}_1(s)ds\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,dxdy + \\
& + \iint_{D_2} \overline{C}_2(x)\,(y - y_0 - k)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,dxdy - \iint_{D_2}\left(\int_{x_0-h}^{x}\overline{C}_2(s)ds\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,dxdy - \\
& - \iint_{D_3} \overline{C}_2(x)\,(y - y_0 + k)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,dxdy + \iint_{D_3}\left(\int_{x_0-h}^{x}\overline{C}_2(s)ds\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,dxdy.
\end{aligned}$$

Prin integrări prin părţi, se arată că

$$\begin{aligned}
\varrho = & \left[\int_{y_0+k}^{y_0}\overline{A}_1(t)dt - \int_{y_0-k}^{y_0}\overline{A}_4(t)dt\right][f(x_0 - h, y_0) - 2f(x_0, y_0) + f(x_0 + h, y_0)] + \\
& + \left[\int_{x_0+h}^{x_0}\overline{C}_1(s)ds - \int_{x_0-h}^{x_0}\overline{C}_2(s)ds\right][f(x_0, y_0 - k) - 2f(x_0, y_0) + f(x_0, y_0 + k)].
\end{aligned} \tag{30'}$$

Astfel expresiile funcţiilor φ_i, ψ_i, θ_i sînt date de formulele (28), funcţiile arbitrare $\overline{A}_1(y)$, $\overline{A}_4(y)$, $\overline{C}_1(x)$, $\overline{C}_2(x)$ fiind obligate să satisfacă la condiţia (29). Deci contribuţia funcţiilor $\overline{A}_1(y)$, $\overline{A}_4(y)$, $\overline{C}_1(x)$, $\overline{C}_2(x)$ la restul R este dată prin formulele (30) şi (30′). Dacă luăm $\overline{A}_1(y) = \overline{A}_4(y) = \overline{C}_1(x) - \overline{C}_2(x) = 0$, condiţia (29) este satisfăcută şi contribuţia lui $\overline{A}_1(y)$, $\overline{A}_4(y)$, $\overline{C}_1(x)$, $\overline{C}_2(x)$ la restul R este nulă.

Deci putem face în formulele (28), $\overline{A}_1(y) = \overline{A}_4(y) = \overline{C}_1(x) = \overline{C}_2(x) = 0$ şi avem în sfîrşit formula de cubatură

$$\iint_D f(x, y)dxdy = 4hk\, f(x_0, y_0) + \iint_D \left(\varphi\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \psi\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)dxdy, \tag{31}$$

unde funcţiile φ, ψ, θ coincid în dreptunghiurile D_i, cu funcţiile φ_i, ψ_i, θ_i, unde $i = 1, 2, 3, 4$, date de formulele următoare

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(x, y) = \frac{1}{2}(x - x_0 - h)^2, \qquad \psi_1(x, y) = -(x - x_0 - h)(y - y_0 - k), \\
&\qquad \theta_1(x, y) = \frac{1}{2}(y - y_0 - k)^2 \\
&\varphi_2(x, y) = \frac{1}{2}(x - x_0 + h)^2, \qquad \psi_2(x, y) = -(x - x_0 + h)(y - y_2 - k), \\
&\qquad \theta_2(x, y) = \frac{1}{2}(y - y_0 - k)^2 \qquad (32) \\
&\varphi_3(x, y) = \frac{1}{2}(x - x_0 + h)^2, \qquad \psi_3(x, y) = -(x - x_0 + h)(y - y_0 + k), \\
&\qquad \theta_3(x, y) = \frac{1}{2}(y - y_0 + k)^2 \\
&\varphi_4(x, y) = \frac{1}{2}(x - x_0 - h)^2, \qquad \psi_4(x, y) = -(x - x_0 - h)(y - y_0 + k), \\
&\qquad \theta_4(x, y) = \frac{1}{2}(y - y_0 + k)^2.
\end{aligned}$$

11. Putem să dăm o evaluare a valorii absolute a restului R al formulei de cubatură (31). Notînd cu M_2 o margine superioară a lui $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|$, $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|$, $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|$ în D, putem să scriem

$$|R| \leqslant \frac{M_2}{2}\left\{\iint_{D_1}(x - x_0 - h)^2 dxdy + \ldots\right\}$$
$$+ M_2\left\{\iint_{D_1}(x_0 + h - x)(y_0 + k - y)dxdy + \ldots\right\}$$
$$+ \frac{M_2}{2}\left\{\iint_{D_1}(y - y_0 - k)^2 dxdy + \ldots\right\}.$$

Avem

$$\iint_{D_1}(x - x_0 - h)^2 dxdy = \frac{h^3 k}{3}, \ldots$$

$$\iint_{D_1}(x_0 + h - x)(y_0 + k - y)dxdy = \frac{h^2 k^2}{4}, \ldots$$

$$\iint_{D_1}(y - y_0 - k)^2 dxdy = \frac{hk^3}{3}, \ldots$$

de unde rezultă că

$$|R| \leqslant \frac{M_2}{2}\left(\frac{4h^3 k}{3} + \frac{4hk^3}{3}\right) + M_2 h^2 k^2$$

adică

$$|R| \leqslant \frac{S}{12}\,[2(h^2 + k^2) + 3hk]M_2 \tag{33}$$

unde S este aria dreptunghiului D, $S = 4hk$.

12. Putem compara cele două formule de cubatură demonstrate în acest capitol

$$\iint_D f dxdy = \frac{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}{2}\,[f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)] + R_1 \tag{21}$$

stabilită în § 1, și

$$\iint_D f dxdy = 4hk\, f(x_0, y_0) + R_2 \tag{31}$$

stabilită în acest paragraf.

A doua formulă este *preferabilă* primei întrucît ea utilizează un singur nod (x_0, y_0), centrul dreptunghiului D, pe cînd prima utilizează două noduri, vîrfurile opuse (x_1, y_1) și (x_2, y_2). În ceea ce privește resturile R_1 și R_2, avem formulele (26) din § 1 și (33), adică

$$|R_1| \leqslant \varrho_1 \frac{SM_2}{12}, \qquad |R_2| \leqslant \varrho_2 \frac{SM_2}{12},$$

unde

$$\varrho_1 = (x_2 - x_1)^2 + 3(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + (y_2 - y_1)^2$$
$$\varrho_2 = 2(h^2 + k^2) + 3hk.$$

Înlocuind în expresia lui ϱ_1, $x_2 - y_1$ și $y_2 - y_1$ prin $2h$ și $2k$, avem

$$\varrho_1 - \varrho_2 = 2(h^2 + k^2) + 9hk > 0,$$

adică $\rho_1 > \rho_2$.

În cazul patratului, $h = k$, avem

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{20}{7} = 2,8\ldots$$

§ 3. Calculul cu aproximație dată al unei integrale duble într-un dreptunghi D

13. Vom aplica formulele de cubatură stabilite în acest capitol, la calculul cu aproximație dată, al unei integrale duble relative la un dreptunghi D.

Să considerăm integrala dublă

$$\iint_D f(x, y) dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$$

și să presupunem că funcția $f(x, y)$ are derivate parțiale în raport cu x și y de primul și al doilea ordin, continue în D. Să împărțim intervalul (a, b) în n părți egale prin punctele $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ și intervalul (c, d) în m părți egale prin punctele $y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$. Să notăm cu D_{ik} dreptunghiul format de dreptele $x = x_{i-1}$, $x = x_i$, $y = y_{k-1}$, $y = y_k$ unde $i = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, m$, cu convenția $x_0 = a$, $x_n = b$, $y_0 = c$, $y_m = d$.

Să aplicăm la fiecare dreptunghi D_{ik} prima formulă de cubatură. Vom avea

$$\iint_{D_{ik}} f(x, y) dx\, dx = \frac{(b - a)(d - c)}{2nm}\,[f(x_{i-1}, y_{k-1}) + f(x_i, y_k)] + R_{ik},$$

unde

$$|R_{ik}| \leqslant \frac{(b - a)(d - c)}{12mn}\left[\frac{(b-a)^2}{n^2} + 3\,\frac{(b - a)(d - c)}{nm} + \frac{(d-c)^2}{m^2}\right] M_2.$$

M_2 fiind o margine superioară a lui $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|$, $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|$, $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|$ în D.

Făcînd suma integralelor duble în dreptunghiurile D_{ik}, vom avea formula de calcul

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \frac{(b-a)(d-c)}{2nm}\left\{\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, c) + \sum_{i=1}^{n} f(x_i, d) + \sum_{k=1}^{m-1} f(b, y_k) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{m-1} f(a, y_k) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{m-1} f(x_i, y_k)\right\} + R \tag{1}$$

şi pentru restul R, avem

$$|R| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} |R_{ik}|,$$

adică

$$|R| \leqslant \frac{(b-a)(d-c)}{12}\left[\frac{(b-a)^2}{n^2} + 3\,\frac{(b-a)(d-c)}{mn} + \frac{(d-c)^2}{m^2}\right] M_2. \tag{2}$$

Fiind dat un număr pozitiv ε, se pot alege numerele naturale n şi m suficient de mari, pentru ca

$$\frac{(b-a)(d-c)}{12}\left[\frac{(b-a)^2}{n^2} + 3\,\frac{(b-a)(d-c)}{nm} + \frac{(d-c)^2}{m^2}\right] M_2 < \varepsilon.$$

Cu această alegere a lui n şi m vom avea formula de calcul (1), $|R| < \varepsilon$.

14. Se poate deasemenea aplica la calculul cu aproximaţie dată al unei integrale duble, a doua formulă de cubatură.

Avem

$$\iint_{D_{ik}} f(x, y)dxdy = \frac{(b-a)(d-c)}{nm} f(\xi_i, \eta_k) + R'_{ik},$$

unde (ξ_i, η_k) sînt coordonatele centrului dreptunghiului D_{ik} şi avem

$$|R'_{ik}| \leqslant \frac{(b-a)(d-c)}{12nm}\left[\frac{(b-a)^2}{2n^2} + 3\,\frac{(b-a)(d-c)}{4nm} + \frac{(d-c)^2}{2m^2}\right] M_2 .$$

Rezultă formula de calcul

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \frac{(b-a)(d-c)}{nm}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} f(\xi_i, \eta_k) + R' \tag{3}$$

şi pentru restul R', avem

$$|R'| \leqslant \frac{(b-a)(d-c)}{12}\left[\frac{(b-a)^2}{2n^2} + 3\,\frac{(b-a)(d-c)}{4nm} + \frac{(d-c)^2}{2m^2}\right] M_2. \tag{4}$$

Fiind dat un număr pozitiv ε, se pot alege numerele naturale n şi m destul de mari, astfel ca

$$\frac{(b-a)(d-c)}{12}\left[\frac{(b-a)^2}{2n^2} + 3\,\frac{(b-a)(d-c)}{4nm} + \frac{(d-c)^2}{2m^2}\right] M_2 < \varepsilon.$$

Vom avea atunci în formula de calcul (3), $|R'| < \varepsilon$.

Vom aplica formula de calcul (1) la integrarea numerică a ecuaţiilor cu derivate parţiale de ordinul al doilea de tip hiperbolic.

CAPITOLUL II

INTEGRAREA NUMERICĂ A ECUAŢIEI CU DERIVATE PARŢIALE DE ORDINUL AL DOILEA DE TIP HIPERBOLIC

§ 1. Consideraţii generale şi ipoteze

15. Să considerăm ecuaţia cu derivate parţiale

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y, z, p, q), \tag{1}$$

unde funcţia $f(x, y, z, p, q)$ este continuă în domeniul D, definit de inegalităţile

$$0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0 \leqslant y \leqslant b, \quad |z| \leqslant \alpha, \quad |p| \leqslant \beta, \quad |q| \leqslant \gamma \tag{2}$$

şi satisfac la condiţia lui Lipschitz

$$|f(x, y, Z, P, Q) - f(x, y, z, p, q)| \leqslant A|Z - z| + B|P - p| + C|Q - q|. \tag{3}$$

Se ştie că în aceste condiţii, ecuaţia cu derivate parţiale (1) are o integrală unică $z(x, y)$ nulă pe axele Ox, Oy. Ea este definită în dreptunghiul Δ_1 format de dreptele $x=0$, $x=\lambda_1$, $y=0$, $y=\mu_1$, unde λ_1 şi μ_1 sînt numere pozitive care satisfac la condiţiile

$$\lambda_1 = \min\left(a, \frac{\gamma}{M}\right), \quad \mu_1 = \min\left(b, \frac{\beta}{M}\right), \quad \lambda_1\mu_1 \leqslant \frac{\alpha}{M},$$

unde M este o margine superioară a lui $|f(x, y, z, p, q)|$ în domeniul D.

Se poate obţine integrala $z(x, y)$ prin metoda aproximaţiilor succesive integrînd ecuaţiile

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z^{(0)}}{\partial x \partial y} &= f(x, y, 0, 0, 0) \\ \frac{\partial^2 z^{(s)}}{\partial x \partial y} &= f(x, y, z^{(s-1)}, p^{(s-1)}, q^{(s-1)}), \end{aligned} \tag{4}$$

cu condiţiile $z^{(s)}(x, 0) = z^{(s)}(0, y) = 0$, unde $s = 0, 1, 2, \ldots$

Seriile

$$z^{(0)} + \sum_{s=1}^{\infty} [z^{(s)} - z^{(s-1)}], \quad p^{(0)} + \sum_{s=1}^{\infty} [p^{(s)} - p^{(s-1)}], \quad q^{(0)} + \sum_{s=1}^{\infty} [q^{(s)} - q^{(s-1)}]$$

sînt absolut și uniform convergente în dreptunghiul Δ_1. Avem

$$|z^{(s)} - z^{(s-1)}| \leqslant ML^s \frac{(\lambda_1 + \mu_1)^{s+2}}{(s+2)!}$$

$$|p^{(s)} - p^{(s-1)}| \leqslant ML^s \frac{(\lambda_1 + \mu_1)^{s+1}}{(s+1)!}$$

$$|q^{(s)} - q^{(s-1)}| \leqslant ML^s \frac{(\lambda_1 + \mu_1)^{s+1}}{(s+1)!}.$$

Vom avea deci

$$z(x, y) = z^{(0)} + \sum_{s=1}^{\infty} [z^{(s)} - z^{(s-1)}]$$

$$p(x, y) = p^{(0)} + \sum_{s=1}^{\infty} [p^{(s)} - p^{(s-1)}], \quad q(x, y) = q^{(0)} + \sum_{s=1}^{\infty} [q^{(s)} - q^{(s-1)}]$$

unde

$$L = A \frac{\lambda_1 + \mu_1}{2} + B + C.$$

și vom scrie

$$z(x, y) - z^{(\nu)}(x, y) = \sum_{s=\nu}^{\infty} [z^{(s+1)} - z^{(s)}]$$

$$p(x, y) - p^{(\nu)}(x, y) = \sum_{s=\nu}^{\infty} [p^{(s+1)} - p^{(s)}]$$

$$q(x, y) - q^{(\nu)}(x, y) = \sum_{s=\nu}^{\infty} [q^{(s+1)} - q^{(s)}].$$

Se demonstrează că

$$|z(x, y) - z^{(\nu)}(x, y)| \leqslant ML^{\nu+1} e^{L(\lambda_1+\mu_1)} \frac{(\lambda_1 + \mu_1)^{\nu+3}}{(\nu+3)!}$$

$$|p(x, y) - p^{(\nu)}(x, y)| \leqslant ML^{\nu+1} e^{L(\lambda_1+\mu_1)} \frac{(\lambda_1 + \mu_1)^{\nu+2}}{(\nu+2)!}$$

$$|q(x, y) - q^{(\nu)}(x, y)| \leqslant ML^{\nu+1} e^{L(\lambda_1+\mu_1)} \frac{(\lambda_1 + \mu_1)^{\nu+2}}{(\nu+2)!}.$$

Fiind dat un număr pozitiv ε, se poate alege numărul ν, astfel ca membrii ai doilea ai inegalităților precedente să fie mai mici decît ε. Astfel vom avea pentru cel mai mic număr ν care satisface la aceste condiții

$$\begin{aligned} &|z(x, y) - z^{(\nu)}(x, y)| \leqslant \varepsilon \\ &|p(x, y) - p^{(\nu)}(x, y)| \leqslant \varepsilon \\ &|q(x, y) - q^{(\nu)}(x, y)| \leqslant \varepsilon. \end{aligned} \tag{5}$$

Numărul ν astfel precizat rămîne fix în cele ce urmează și va juca un rol important în integrarea numerică a ecuației cu derivate parțiale (1).

16. Pentru integrarea numerică a ecuației cu derivate parțiale (1), vom face noi ipoteze asupra funcției $f(x, y, z, p, q)$. Aceste ipoteze sînt impuse de procedeul de integrare numerică pe care-l vom întrebuința.

Vom presupune că funcția $f(x, y, z, p, q)$ admite derivate parțiale în raport cu x, y, z, p, q de primul și al doilea ordin continue în D. În aceste condiții putem lua ca numere A, B, C în condiția lui Lipschitz (3) marginile superioare ale lui $\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|$, $\left|\frac{\partial f}{\partial p}\right|$, $\left|\frac{\partial f}{\partial q}\right|$ în D.

Se demonstrează cu aceste ipoteze că funcțiile $z^{(s)}(x, y)$, date de ecuațiile cu derivate parțiale (4), cu condițiile $z^{(s)}(x, 0) = z^{(s)}(0, y) = 0$ au derivate parțiale în raport cu x și y, de primul și al doilea ordin, continue în Δ_1 și că dacă notăm

$$f_s(x, y) = f[x, y, z^{(s-1)}, p^{(s-1)}, q^{(s-1)}], \tag{6}$$

funcțiile $f_s(x, y)$, unde $s = 0, 1, 2, \ldots$, cu $f_0(x, y) = f(x, y, 0, 0, 0)$, au derivate parțiale în raport cu x și y, de ordinul al doilea, continue în dreptunghiul Δ_1. Vom nota cu N o margine superioară a valorilor absolute ale tuturor derivatelor parțiale de ordinul al doilea

$$\frac{\partial^2 f_s}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f_s}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f_s}{\partial y^2} \tag{7}$$

pentru $s = 0, 1, \ldots, \nu$. Numărul N va juca un rol important în integrarea numerică a ecuației cu derivate parțiale (1).

δ fiind un număr pozitiv dat, suficient de mic, să notăm cu λ și μ două numere pozitive care satisfac la condițiile următoare

$$\lambda = \min\left(a, \frac{\gamma - \delta}{M}\right), \quad \mu = \min\left(b, \frac{\beta - \delta}{M}\right), \quad \lambda\mu \leqq \frac{\alpha - \delta}{M} \tag{8}$$

Este evident că $\lambda \leqslant \lambda_1$, $\mu \leqslant \mu_1$. Vom nota mai departe cu Δ dreptunghiul format de dreptele $x = 0$, $x = \lambda$ și $y = 0$, $y = \mu$.

Cu aceste ipoteze vom trece la integrarea numerică a ecuației cu derivate parțiale (1). Vom căuta o rețea Γ formată de dreptele $x = x_i$, $y = y_k$ în Δ, unde $i = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, m$ și un algoritm pentru calculul numerelor $z_{ik}^{(s)}, p_{ik}^{(s)}, q_{ik}^{(s)}$, unde $s = 0, 1, \ldots, \nu$ astfel ca

$$\begin{aligned} &|z^{(\nu)}(x_i, y_k) - z_{ik}^{(\nu)}| < \varepsilon \\ &|p^{(\nu)}(x_i, y_k) - p_{ik}^{(\nu)}| < \varepsilon \\ &|q^{(\nu)}(x_i, y_k) - q_{ik}^{(\nu)}| < \varepsilon. \end{aligned} \tag{9}$$

Căutarea algoritmului de calcul se va baza pe formula de cubatură (21) din § 1 al primului capitol.

§ 2. Aplicarea formulei de cubatură (21, § 1, I)

17. Prima ecuație (4) din § 1, și condițiile $z^{(0)}(x, 0) = z^{(0)}(0, y) = 0$ conduc la formulele

$$z^{(0)}(x, y) = \int_0^x\int_0^y f_0(s, t)dsdt$$

$$p^{(0)}(x, y) = \int_0^y f_0(x, t)dt, \quad q^{(0)}(x, y) = \int_0^x f_0(s, y)ds. \tag{1}$$

Pentru a calcula $z^{(0)}(x, y)$, folosim prima formulă de cubatură care conduce la formula de calcul (1) (I, §3). Pentru a calcula $p^{(0)}(x, y)$ și $q^{(0)}(x, y)$ folosim formula de cuadratură a trapezului

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{2}[f(a) + f(b)] + \int_a^b \frac{(s-a)(s-b)}{2} f''(s)ds,$$

care conduce la formula de calcul

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{2n}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right] + R, \tag{2}$$

unde punctele $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ împart în n părți egale intervalul (a, b). Pentru restul R avem evaluarea următoare

$$|R| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2} N_1, \tag{3}$$

unde N_1 este o margine superioară a lui $|f''(x)|$ în intervalul $[a, b]$.

Fie ε_1 un număr pozitiv pe care-l vom preciza mai departe și n, m două numere naturale care vor fi precizate în cele ce urmează. Să împărțim intervalele $(0, \lambda)$, și $(0, \mu)$ în n și m părți egale prin punctele $x_1, \ldots, x_{n-1}$ și $y_1, \ldots y_{m-1}$. Dreptele $x = x_i$ și $y = y_k$ unde $i = 0, 1, \ldots, n$ și $k = 0, 1, \ldots, m$, $(x_0 = 0,\ x_n = \lambda,\ y_0 = 0,\ y_m = \mu)$ formează o rețea Γ, Vom calcula $z^{(0)}(x, y)$, $p^{(0)}(x, y)$, $q^{(0)}(x, y)$ pe nodurile acestei rețele. Să notăm cu Δ_{ik} dreptunghiul format de dreptele $x = 0$, $x = x_i$, $y = 0$, $y = y_k$. Aplicînd formulele de calcul, vom avea

$$\begin{aligned} z^{(0)}(x_i, y_k) &= z_{ik}^{(0)} + R_{ik}^{(0)} \\ p^{(0)}(x_i, y_k) &= p_{ik}^{(0)} + R_{ik}^{(0)'} \\ q^{(0)}(x_i, y_k) &= q_{ik}^{(0)} + R_{ik}^{(0)''}, \end{aligned} \tag{4}$$

unde

$$\begin{aligned} z_{ik}^{(0)} &= \frac{\lambda\mu}{2nm}\left[\sum_{j=0}^{i-1} f_0(x_j, 0) + \sum_{l=1}^{k-1} f_0(0, y_l) + \sum_{j=1}^{i} f_0(x_j, y_k) + \sum_{l=1}^{k-1} f_0(x_i, y_l) + \right. \\ &\qquad \left. + 2\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{l=1}^{k-1} f_0(x_j, y_l)\right] \\ p_{ik}^{(0)} &= \frac{\mu}{2m}\left[f_0(x_i, 0) + f_0(x_i, y_k) + 2\sum_{l=1}^{k-1} f_0(x_i, y_l)\right] \\ q_{ik}^{(0)} &= \frac{\lambda}{2n}\left[f_0(0, y_k) + f_0(x_i, y_k) + 2\sum_{j=1}^{i-1} f_0(x_j, y_k)\right] \end{aligned} \tag{5}$$

iar pentru resturi avem

$$|R_{ik}^{(0)}| \leqslant \frac{\lambda\mu}{12}\frac{i}{n}\frac{k}{m}\left(\frac{\lambda^2}{n^2} + 3\frac{\lambda\mu}{nm} + \frac{\mu^2}{m^2}\right)N.$$

$$|R_{ik}^{(0)'}| \leqslant \frac{\mu^3}{12m^2}\frac{k}{m}N, \qquad |R_{ik}^{(0)''}| \leqslant \frac{\lambda^3}{12n^2}\frac{i}{n}N$$

Deoarece $\frac{i}{n} \leqslant 1$, $\frac{k}{m} \leqslant 1$, putem scrie încă

$$\begin{aligned} &|R_{ik}^{(0)}| \leqslant \frac{\lambda\mu}{12}\left(\frac{\lambda^2}{n^2} + 3\frac{\lambda\mu}{nm} + \frac{\mu^2}{m^2}\right)N \\ &|R_{ik}^{(0)'}| \leqslant \frac{\mu^3}{12m^2}N, \qquad |R_{ik}^{(0)''}| \leqslant \frac{\lambda^3}{12n^2}N. \end{aligned} \tag{6}$$

Vom spune că numerele $z_{ik}^{(0)}$, $p_{ik}^{(0)}$, $q_{ik}^{(0)}$ date de formulele (5) sînt „*valorile calculate*" ale lui $z(x_i, y_k)$, $p(x_i, y_k)$, $q(x_i, y_k)$ pe nodurile (x_i, y_k).

Putem alege cele mai mici numere naturale n și m astfel ca

$$\frac{\lambda^3}{12n^2}N < \varepsilon_1, \quad \frac{\mu^3}{12m^2}N < \varepsilon_1, \quad \frac{\lambda\mu}{12}\left(\frac{\lambda^2}{n^2} + 3\frac{\lambda\mu}{nm} + \frac{\mu^2}{m^2}\right)N < \varepsilon_1 \tag{7}$$

și atunci, în formulele (4), vom avea

$$|R_{ik}^{(0)}|,\ |R_{ik}^{(0)'}|,\ |R_{ik}^{(0)''}| < \varepsilon_1. \tag{8}$$

Numerele naturale n și m odată alese prin condițiile (7) rămîn fixe în tot restul lucrării și prin urmare rețeaua Γ este bine determinată.

18. Să trecem la calculul lui $z^{(1)}(x, y)$, $p^{(1)}(x, y)$, $q^{(1)}(x, y)$; avem

$$z^{(1)}(x, y) = \int_0^x\int_0^y f[s, t, z^{(0)}(s, t), p^{(0)}(s, t), q^{(0)}(s, t)]dsdt$$

$$p^{(1)}(x, y) = \int_0^y f[x, t, z^{(0)}(x, t), p^{(0)}(x, t), q^{(0)}(x, t)]dt \tag{9}$$

$$q^{(1)}(x, y)=\int_0^x f[s, y, z^{(0)}(s, y),\ p^{(0)}(s, y),\ q^{(0)}(s, y)]ds$$

Pentru calculul lui $z^{(1)}(x, y)$, $p^{(1)}(x, y)$, $q^{(1)}(x, y)$ putem aplica formulele de calcul pe nodurile (x_i, y_k)

$$\begin{aligned} z^{(1)}(x_i, y_k) &= [z_{ik}^{(1)}] + r_{ik}^{(1)} \\ p^{(1)}(x_i, y_k) &= [p_{ik}^{(1)}] + r_{ik}^{(1)\prime} \\ q^{(1)}(x_i, y_k) &= [q_{ik}^{(1)}] + r_{ik}^{(1)\prime\prime}, \end{aligned} \tag{10}$$

unde

$$|r_{ik}^{(1)}|,\quad |r_{ik}^{(1)\prime}|,\quad |r_{ik}^{(1)\prime\prime}| < \varepsilon_1 \tag{11}$$

și

$$\begin{aligned} [z_{ik}^{(1)}] = \frac{\lambda\mu}{2nm}\Bigg\{ & \sum_{j=0}^{i-1} f[x_j, 0, z^{(0)}(x_j, 0), p^{(0)}(x_j, 0), q^{(0)}(x_j, 0)] \\ & + \sum_{l=1}^{k-1} f[0, y_l, z^{(0)}(0, y_l), p^{(0)}(0, y_l), q^{(0)}(0, y_l)] \\ & + \sum_{j=1}^{i} f[x_j, y_k, z^{(0)}(x_j, y_k), p^{(0)}(x_j, y_k), q^{(0)}(x_j, y_k)] \\ & + \sum_{l=1}^{k-1} f[x_i, y_l, z^{(0)}(x_i, y_l), p^{(0)}(x_i, y_l), q^{(0)}(x_i, y_l)] \\ & + 2\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{l=1}^{k-1} f[x_j, y_l, z^{(0)}(x_j, y_l), p^{(0)}(x_j, y_l), q^{(0)}(x_j, y_l)]\Bigg\} \\ [p_{ik}^{(1)}] = \frac{\mu}{2m}\Bigg\{ & f[x_i, 0, z^{(0)}(x_i, 0), p^{(0)}(x_i, 0), q^{(0)}(x_i, 0)] \\ & + f[x_i, y_k, z^{(0)}(x_i, y_k), p^{(0)}(x_i, y_k), q^{(0)}(x_i, y_k)] \\ & + 2\sum_{l=1}^{k-1} f[x_i, y_l, z^{(0)}(x_i, y_l), p^{(0)}(x_i, y_l), q^{(0)}(x_i, y_l)]\Bigg\} \\ [q_{ik}^{(1)}] = \frac{\lambda}{2n}\Bigg\{ & f[0, y_k, z^{(0)}(0, y_k), p^{(0)}(0, y_k), q^{(0)}(0, y_k)] \\ & + f[x_i, y_k, z^{(0)}(x_i, y_k), p^{(0)}(x_i, y_k), q^{(0)}(x_i, y_k)] \\ & + 2\sum_{j=1}^{i-1} f[x_j, y_k, z^{(0)}(x_j, y_k), p^{(0)}(x_j, y_k), q^{(0)}(x_j, y_k)]\Bigg\}. \end{aligned} \tag{12}$$

Însă valorile lui $z^{(0)}(x, y)$, $p^{(0)}(x, y)$, $q^{(0)}(x,y)$ pe nodurile (x_i, y_k) sînt date aproximativ de formulele (4). Dacă ε_1 este suficent de mic, putem înlocui în general în formulele (12), $z^{(0)}(x_i, y_k)$ $p^{(0)}(x_i, y_k)$, $q^{(0)}(x_i, y_k)$ prin $z_{ik}^{(0)}$, $p_{ik}^{(0)}$, $q_{ik}^{(0)}$. Vom demonstra aceasta la nr. **20.**

Să notăm cu $z_{ik}^{(1)}$, $p_{ik}^{(1)}$, $q_{ki}^{(1)}$ numerele obținute înlocuind în $[z_{ik}^{(1)}]$, $[p_{ik}^{(1)}]$, $[q_{ik}^{(1)}]$, pe $z^{(0)}(x_j, y_l)$, $p^{(0)}(x_j, y_l)$, $q^{(0)}(x_j, y_l)$ cu $z_{jl}^{(0)}$, $p_{jl}^{(0)}$, $q_{jl}^{(0)}$, adică

$$\begin{aligned} z_{ik}^{(1)} = \frac{\lambda\mu}{2nm}\Bigg[& \sum_{j=0}^{i-1} f(x_j, 0, z_{j0}^{(0)}, p_{j0}^{(0)}, q_{j0}^{(0)}) + \sum_{l=1}^{k-1} f(0, y_l, z_{0l}^{(0)}, p_{0l}^{(0)}, q_{0l}^{(0)}) \\ & + \sum_{j=1}^{i} f(x_j, y_k, z_{jk}^{(0)}, p_{jk}^{(0)}, q_{jk}^{(0)}) + \sum_{l=1}^{k-1} f(x_i, y_l, z_{il}^{(0)}, p_{il}^{(0)}, q_{il}^{(0)}) \\ & + 2\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{l=1}^{k-1} f(x_j, y_l, z_{jl}^{(0)}, p_{jl}^{(0)}, q_{jl}^{(0)})\Bigg] \\ p_{ik}^{(1)} = \frac{\mu}{2m}\Bigg[& f(x_i, 0, z_{i0}^{(0)}, p_{i0}^{(0)}, q_{i0}^{(0)}) + f(x_i, y_k, z_{ik}^{(0)}, p_{ik}^{(0)}, q_{ik}^{(0)}) \\ & + 2\sum_{l=1}^{k-1} f(x_i, y_l, z_{il}^{(0)}, p_{il}^{(0)}, q_{il}^{(0)})\Bigg] \\ q_{ik}^{(1)} = \frac{\lambda}{2n}\Bigg[& f(0, y_k, z_{0k}^{(0)}, p_{0k}^{(0)}, q_{0k}^{(0)}) + f(x_i, y_k, z_{ik}^{(0)}, p_{ik}^{(0)}, q_{ik}^{(0)}) \\ & + 2\sum_{j=1}^{i-1} f(x_j, y_k, z_{jk}^{(0)}, p_{jk}^{(0)}, q_{jk}^{(0)})\Bigg]. \end{aligned} \tag{13}$$

Notînd

$$\begin{aligned} [z_{ik}^{(1)}] &= z_{ik}^{(1)} + \varrho_{ik}^{(1)} \\ [p_{ik}^{(1)}] &= p_{ik}^{(1)} + \varrho_{ik}^{(1)\prime} \\ [q_{ik}^{(1)}] &= q_{ik}^{(1)} + \varrho_{ik}^{(1)\prime\prime}, \end{aligned}$$

vom avea

$$\begin{aligned} \varrho_{ik}^{(1)} = \frac{\lambda\mu}{2nm}\Big\{\ldots & + [f(x_j, y_l, z^{(0)}(x_j, y_l), p^{(0)}(x_j, y_l), q^{(0)}(x_j, y_l) - \\ & - f(x_j, y_l, z_{jl}^{(0)}, p_{jl}^{(0)}, q_{jl}^{(0)})] + \ldots\Big\} \end{aligned}$$

$$\varrho_{ik}^{(1)\prime} = \ldots..$$

$$\varrho_{ik}^{(1)\prime\prime} = \ldots..$$

Din aceaste formule rezultă că

$$
\begin{aligned}
|\varrho_{ik}^{(1)}| &\leqslant \lambda\mu \frac{i}{n}\frac{k}{m}(A+B+C)\,\varepsilon_1 \leqslant \lambda\mu(A+B+C)\,\varepsilon_1 \\
|\varrho_{ik}^{(1)'}| &\leqslant \mu \frac{k}{m}(A+B+C)\,\varepsilon_1 \leqslant \mu(A+B+C)\,\varepsilon_1 \qquad (14)\\
|\varrho_{ik}^{(1)''}| &\leqslant \lambda \frac{i}{n}(A+B+C)\,\varepsilon_1 \leqslant \lambda(A+B+C)\,\varepsilon_1 .
\end{aligned}
$$

Notînd prin

$$Q = \max\,[\lambda\mu(A+B+C),\ \mu(A+B+C),\ \lambda(A+B+C)] \qquad (15)$$

vom avea

$$|\varrho_{ik}^{(1)}|,\quad |\varrho_{ik}^{(1)'}|,\quad |\varrho_{ik}^{(1)''}| < Q\varepsilon_1. \qquad (14')$$

Avem deci

$$
\begin{aligned}
z^{(1)}(x_i, y_k) &= z_{ik}^{(1)} + R_{ik}^{(1)} \\
p^{(1)}(x_i, y_k) &= p_{ik}^{(1)} + R_{ik}^{(1)'} \qquad (16)\\
q^{(1)}(x_i, y_k) &= q_{ik}^{(1)} + R_{ik}^{(1)''},
\end{aligned}
$$

unde

$$R_{ik}^{(1)} = r_{ik}^{(1)} + \varrho_{ik}^{(1)},\quad R_{ik}^{(1)'} = r_{ik}^{(1)'} + \varrho_{ik}^{(1)'},\quad R_{ik}^{(1)''} = r_{ik}^{(1)''} + \varrho_{ik}^{(1)''}.$$

După inegalitățile (11) și (14) în formulele (16) avem

$$|R_{ik}^{(1)}|,\quad |R_{ik}^{(1)'}|,\quad |R_{ik}^{(1)''}| < (1+Q)\,\varepsilon_1. \qquad (17)$$

19. Să trecem la cazul general. Să presupunem că am demonstrat formulele

$$
\begin{aligned}
z^{(s-1)}(x_i, y_k) &= z_{ik}^{(s-1)} + R_{ik}^{(s-1)} \\
p^{(s-1)}(x_i, y_k) &= p_{ik}^{(s-1)} + R_{ik}^{(s-1)'} \qquad (18)\\
q^{(s-1)}(x_i, y_k) &= q_{ik}^{(s-1)} + R_{ik}^{(s-1)''}
\end{aligned}
$$

analoage cu formulele (16 și inegalitățile

$$|R_{ik}^{(s-1)}|,\quad |R_{ik}^{(s-1)'}|,\quad |R_{ik}^{(s-1)''}| < (1 + Q + \ldots + Q^{s-1})\,\varepsilon_1 \qquad (19)$$

analoage cu inegalitățile (17).

Pentru $s=2$ formulele (18) și inegalitățile (19) se reduc la formulele (16) și la inegalitățile (17).

Funcția $z^{(s)}(x, y)$ și derivatele ei parțiale $p^{(s)}(x, y)$, $q^{(s)}(x, y)$ sînt date de formulele

$$
\begin{aligned}
z^{(s)}(x,y) &= \int_0^x\!\!\int_0^y f[\xi, \eta, z^{(s-1)}(\xi, \eta), p^{(s-1)}(\xi, \eta), q^{(s-1)}(\xi, \eta)]\,d\xi d\eta \\
p^{(s)}(x,y) &= \int_0^y f[x, \eta, z^{(s-1)}(x, \eta), p^{(s-1)}(x, \eta), q^{(s-1)}(x, \eta)]\,d\eta \\
q^{(s)}(x,y) &= \int_0^x f[\xi, y, z^{(s-1)}(\xi, y), p^{(s-1)}(\xi, y), q^{(s-1)}(\xi, y)]\,d\xi .
\end{aligned}
$$

Pe nodurile rețelei Γ, vom avea

$$
\begin{aligned}
z^{(s)}(x_i, y_k) &= \int_0^{x_i}\!\!\int_0^{y_k} f[\xi, \eta, z^{(s-1)}(\xi, \eta), p^{(s-1)}(\xi, \eta), q^{(s-1)}(\xi, \eta)]\,d\xi d\eta \\
p^{(s)}(x_i, y_k) &= \int_0^{y_k} f[x_i, \eta, z^{(s-1)}(x_i, \eta), p^{(s-1)}(x_i, \eta), q^{(s-1)}(x_i, \eta)]\,d\eta \\
q^{(s)}(x_i, y_k) &= \int_0^{x_i} f[\xi, y_k, z^{(s-1)}(\xi, y_k), p^{(s-1)}(\xi, y_k), q^{(s-1)}(\xi, y_k)]\,d\xi .
\end{aligned}
$$

Aplicînd la integralele din membrii doi formulele de calcul (1), cap I, § 3 și (2), cap II, § 2,

$$
\begin{aligned}
z^{(s)}(x_i, y_k) &= [z_{ik}^{(s)}] + r_{ik}^{(s)} \\
p^{(s)}(x_i, y_k) &= [p_{ik}^{(s)}] + r_{ik}^{(s)'} \qquad (20)\\
q^{(s)}(x_i, y_k) &= [q_{ik}^{(s)}] + r_{ik}^{(s)''},
\end{aligned}
$$

în care

$$
\begin{aligned}
[z_{ik}^{(s)}] = \frac{\lambda\mu}{2nm}\Big\{ &\sum_{j=0}^{i-1} f[x_j, 0, z^{(s-1)}(x_j, 0), p^{(s-1)}(x_j, 0), q^{(s-1)}(x_j, 0)] + \\
&+ \sum_{l=1}^{k-1} f[0, y_l, z^{(s-1)}(0, y_l), p^{(s-1)}(0, y_l), q^{(s-1)}(0, y_l)] + \\
&+ \sum_{j=1}^{i} f[x_j, y_k, z^{(s-1)}(x_j, y_k), p^{(s-1)}(x_j, y_k), q^{(s-1)}(x_j, y_k] + \\
&+ \sum_{l=1}^{k-1} f[x_i, y_l, z^{(s-1)}(x_i, y_l), p^{(s-1)}(x_i, y_l), q^{(s-1)}(x_i, y_l)] +
\end{aligned}
$$

$$+2\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{l=1}^{k-1} f[x_j,\ y_l,\ z^{(s-1)}(x_j,y_l),\ p^{(s-1)}(x_j,y_l),\ q^{(s-1)}(x_j,y_l)]$$

$$[p_{ik}^{(s)}] = \frac{\mu}{2m}\Big\{ f[x_i,\ 0,\ z^{(s-1)}(x_i,0),\ p^{(s-1)}(x_i,0),\ q^{(s-1)}(x_i,0)] + \tag{21}$$

$$+ f[x_i,\ y_k,\ z^{(s-1)}(x_i,y_k),\ p^{(s-1)}(x_i,y_k),\ q^{(s-1)}(x_i,y_k)] +$$

$$+2\sum_{l=1}^{k-1} f[x_i,\ y_l,\ z^{(s-1)}(x_i,y_l),\ p^{(s-1)}(x_i,y_l),\ q^{(s-1)}(x_i,y_l)]\Big\}$$

$$[q_{ik}^{(s)}] = \frac{\lambda}{2n}\Big\{ f[0,y_k,z^{(s-1)}(0,y_k),\ p^{(s-1)}(0,y_k),\ q^{(s-1)}(0,y_k)] +$$

$$+ f[x_i,y_k,z^{(s-1)}(x_i,y_k),\ p^{(s-1)}(x_i,y_k),\ q^{(s-1)}(x_i,y_k)] +$$

$$+2\sum_{j=1}^{i-1} f[x_j,y_k,\ z^{(s-1)}(x_j,y_k),\ p^{(s-1)}(x_j,y_k),\ q^{(s-1)}(x_j,y_k)]\Big\}$$

şi unde

$$|r_{ik}^{(s)}|,\quad |r_{ik}^{(s)'}|,\quad |r_{ik}^{(s)''}| < \varepsilon_1. \tag{22}$$

Să notăm cu $z_{ik}^{(s)}$, $p_{ik}^{(s)}$, $q_{ik}^{(s)}$ numerele obţinute înlocuind în membrii doi ai formulelor (22), pe $z^{(s-1)}(x_j,y_l)$, $p^{(s-1)}(x_j,y_l)$, $q^{(s-1)}(x_j,y_l)$ prin $z_{jl}^{(s-1)}$, $p_{jl}^{(s-1)}$, $q_{jl}^{(s-1)}$. Vom demonstra la nr. **20** că aceasta este posibil. Vom avea astfel

$$z_{ik}^{(s)} = \frac{\lambda\mu}{2nm}\Big[\sum_{j=0}^{i-1} f(x_j,\ 0,\ z_{j0}^{(s-1)},\ p_{j0}^{(s-1)},\ q_{j0}^{(s-1)}) + \sum_{l=1}^{k-1} f(0,\ y_l,\ z_{0l}^{(s-1)},\ p_{0l}^{(s-1)},\ q_{0l}^{(s-1)}) +$$

$$+\sum_{j=1}^{i} f(x_j,\ y_k,\ z_{jk}^{(s-1)},\ p_{jk}^{(s-1)},\ q_{jk}^{(s-1)}) + \sum_{l=1}^{k-1} f(x_i,\ y_l,\ z_{il}^{(s-1)},\ p_{il}^{(s-1)},\ q_{il}^{(s-1)}) +$$

$$+2\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{l=1}^{k-1} f(x_j,\ y_l,\ z_{jl}^{(s-1)},\ p_{jl}^{(s-1)},\ q_{jl}^{(k-1)})\Big] \tag{23}$$

$$p_{ik}^{(s)} = \frac{\mu}{2m}\Big[f(x_i,\ 0,\ z_{i0}^{(s-1)},\ p_{i0}^{(s-1)},\ q_{i0}^{(s-1)}) + f(x_i,\ y_k,\ z_{ik}^{(s-1)},\ p_{ik}^{(s-1)},\ q_{ik}^{(s-1)}) +$$

$$+2\sum_{l=1}^{k-1} f(x_i,y_l,\ z_{il}^{(s-1)},\ p_{il}^{(s-1)},\ q_{il}^{(s-1)})\Big]$$

$$q_{ik}^{(s)} = \frac{\lambda}{2n}\Big[f(0,y_k,\ z_{ok}^{(s-1)},\ p_{ok}^{(s-1)},\ q_{ok}^{(k-1)}) + f(x_i,\ y_k,\ z_{ik}^{(s-1)},\ p_{ik}^{(s-1)},\ q_{ik}^{(s-1)}) +$$

$$+2\sum_{j=1}^{i-1} f(x_j,y_k,\ z_{jk}^{(s-1)},\ p_{jk}^{(s-1)},\ q_{jk}^{(s-1)})\Big].$$

Notînd

$$\begin{aligned} [z_{ik}^{(s)}] &= z_{ik}^{(s)} + \varrho_{ik}^{(s)} \\ [p_{ik}^{(s)}] &= p_{ik}^{(s)} + \varrho_{ik}^{(s)'} \\ [q_{ik}^{(s)}] &= q_{ik}^{(s)} + \varrho_{ik}^{(s)''} \end{aligned} \tag{24}$$

vom avea

$$\varrho_{ik}^{(s)} = \frac{\lambda\mu}{2nm}\Big\{ \ldots + [f(x_j,y_l,z^{(s-1)}(x_j,y_l),\ p^{(s-1)}(x_j,y_l),\ q^{(s-1)}(x_j,y_l) -$$

$$- f(x_j,y_l,z_{jl}^{(s-1)},\ p_{jl}^{(s-1)},\ q_{jl}^{(s-1)})] + \ldots \Big\}$$

$$\varrho_{ik}^{(s)'} = \ldots$$

$$\varrho_{ik}^{(s)''} = \ldots$$

şi după formulele (18), (19) putem scrie

$$|\varrho_{ik}^{(s)}| \leqslant \lambda\mu(A+B+C)(1+Q+\ldots+Q^{s-1})\varepsilon_1$$

$$|\varrho_{ik}^{(s)'}| \leqslant \mu(A+B+C)(1+Q+\ldots+Q^{s-1})\varepsilon_1$$

$$|\varrho_{ik}^{(s)''}| \leqslant \lambda(A+B+C)(1+Q+\ldots+Q^{s-1})\varepsilon_1,$$

sau, după semnificaţia numărului Q,

$$|\varrho_{ik}^{(s)}|,\ |\varrho_{ik}^{(s)'}|,\ |\varrho_{ik}^{(s)''}| \leqslant (Q+Q^2+\ldots+Q^s)\varepsilon_1. \tag{25}$$

Revenind la formlele (20, (24) vom avea

$$\begin{aligned} z^{(s)}(x_i,y_k) &= z_{ik}^{(s)} + R_{ik}^{(s)} \\ p^{(s)}(x_i,y_k) &= p_{ik}^{(s)} + R_{ik}^{(s)'} \\ q^{(s)}(x_i,y_k) &= q_{ik}^{(s)} + R_{ik}^{(s)''} \end{aligned} \tag{26}$$

unde

$$\begin{aligned} R_{ik}^{(s)} &= r_{ik}^{(s)} + \varrho_{ik}^{(s)} \\ R_{ik}^{(s)'} &= r_{ik}^{(s)'} + \varrho_{ik}^{(s)'} \\ R_{ik}^{(s)''} &= r_{ik}^{(s)''} + \varrho_{ik}^{(s)''} \end{aligned}$$

şi ţinînd seama de inegalităţile (22) şi (25), vom avea

$$|R_{ik}^{(s)}|,\quad |R_{ik}^{(s)'}|,\quad |R_{ik}^{(s)''}| \leqslant (1+Q+\ldots+Q^s)\varepsilon_1. \tag{27}$$

Comparînd formulele (26), (27) cu formulele (18), (19), rezultă că formulele (26, (27) sînt valabile pentru $s = 1, 2, \ldots, \nu$.

20. Am stabilit deci un algoritm pentru calculul numerelor $z_{ik}^{(s)}$, $p_{ik}^{(s)}$, $q_{ik}^{(s)}$. Numerele $z_{ik}^{(0)}$, $p_{ik}^{(0)}$, $q_{ik}^{(0)}$ sînt date de formulele (5), iar numerele $z_{ik}^{(s)}$, $p_{ik}^{(s)}$, $q_{ik}^{(s)}$ sînt date pentru $s = 1, 2, \ldots \nu$, de formulele de recurență (23).

Pentru a putea aplica formulele de recurență (23), trebuie să arătăm că se poate alege ε_1, astfel ca punctele de coordonate $(x_j, y_l, z_{jl}^{(s)}, p_{jl}^{(s)}, q_{jl}^{(s)})$, unde $s = 0, 1, \ldots \nu$, să se găsească în domeniul D de definiție al funcției $f(x, y, z, p, q)$. Pentru $s = \nu$, avem

$$z_{jl}^{(\nu)} = z^{(\nu)}(x_j, y_l) - R_{jl}^{(\nu)}$$
$$p_{jl}^{(\nu)} = p^{(\nu)}(x_j, y_l) - R_{jl}^{(\nu)'}$$
$$q_{jl}^{(\nu)} = q^{(\nu)}(x_j, y_l) - R_{jl}^{(\nu)''}.$$

Pentru că nodurile (x_j, y_l) sînt luate în dreptunghiul Δ, după formulele (8), avem

$$|z^{(\nu)}(x_j, y_l)| \leqq \alpha - \delta, \quad |p^{(\nu)}(x_j, y_l)| \leqq \beta - \delta, \quad |q^{(\nu)}(x_j, y_l)| \leqq \gamma - \delta$$

și atuci formulele precedente arată că

$$|z_{jl}^{(\nu)}| \leqslant \alpha - \delta + |R_{jl}^{(\nu)}| \leqslant \alpha - \delta + (1 + Q + \ldots + Q^{\nu})\varepsilon_1$$
$$|p_{jl}^{(\nu)}| \leqslant \beta - \delta + |R_{jl}^{(\nu)'}| \leqslant \beta - \delta + (1 + Q + \ldots + Q^{\nu})\varepsilon_1$$
$$|q_{jl}^{(\nu)}| \leqslant \gamma - \delta + |R_{jl}^{(\nu)''}| \leqslant \gamma - \delta + (1 + Q + \ldots + Q^{\nu})\varepsilon_1.$$

Dacă luăm

$$\varepsilon_1 < \frac{\delta}{1 + Q + \ldots + Q^{\nu}}, \tag{28}$$

vom avea

$$|z_{jl}^{(\nu)}| \leqslant \alpha, \quad |p_{jl}^{(\nu)}| \leqslant \beta, \quad |q_{jl}^{(\nu)}| \leqslant \gamma$$

și prin urmare punctul de coordonate $(x_j, y_l, z_{jl}^{(\nu)}, p_{jl}^{(\nu)}, q_{jl}^{(\nu)})$ se găsește în domeniul D.

Pentru indice un oarecare $s < \nu$, prin calcule analoage, avem

$$|z_{jl}^{(s)}| \leqslant \alpha - \delta + (1 + Q + \ldots + Q^{s})\varepsilon_1 < \alpha - \delta + (1 + Q + \ldots + Q^{\nu})\varepsilon_1 < \alpha$$
$$|p_{jl}^{(s)}| \leqslant \beta - \delta + (1 + Q + \ldots + Q^{s})\varepsilon_1 < \beta - \delta + (1 + Q + \ldots + Q^{\nu})\varepsilon_1 < \beta$$
$$|q_{jl}^{(s)}| \leqslant \gamma - \delta + (1 + Q + \ldots + Q^{s})\varepsilon_1 < \gamma - \delta + (1 + Q + \ldots + Q^{\nu})\varepsilon_1 < \gamma,$$

ceea ce dovedește că punctul de coordonate $(x_j, y_l, z_{jl}^{(s)}, p_{jl}^{(s)}, q_{jl}^{(s)})$ se găsește în domeniul D, pentru $s = 0, 1, \ldots, \nu - 1$.

Deci presupunînd că ε_1 verifică inegalitatea (28), formulele (13) și în general formulele (23) sînt valabile pentru $s = 1, 2, \ldots, \nu$.

21. Putem acum să precizăm numărul ε_1. Să facem în formulele (26) și în inegalitățile (27), $s = \nu$ și să ținem seama de inegalitatea (28). Vom lua

$$\varepsilon_1 = \min\left(\frac{\delta}{1 + Q + \ldots + Q^{\nu}}, \frac{\varepsilon}{1 + Q + \ldots + Q^{\nu}}\right). \tag{29}$$

Atunci, în formulele (26) pentru $s = \nu$, vom avea

$$|R_{ik}^{(\nu)}|, \quad |R_{ik}^{(\nu)'}|, \quad |R_{ik}^{(\nu)''}| < \varepsilon \tag{30}$$

și pentru $s < \nu$, în formulele (26) vom avea

$$|R_{ik}^{(s)}|, \quad |R_{ik}^{(s)'}|, \quad |R_{ik}^{(s)''}| \leqslant (1 + Q + \ldots + Q^{s})\varepsilon_1 < (1 + Q + \ldots + Q^{\nu})\varepsilon_1$$

adică

$$|R_{ik}^{(s)}|, \quad |R_{ik}^{(s)'}|, \quad |R_{ik}^{(s)''}| < \varepsilon. \tag{31}$$

22. În rezumat, metoda de calcul numeric a valorilor integralei $z(x, y)$ și a derivatelor ei parțiale $p(x, y)$, $q(x, y)$ pe nodurile rețelei Γ este următoarea: Se calculează întîi numerele $z_{ik}^{(s)}$, $p_{ik}^{(s)}$, $q_{ik}^{(s)}$ cu formulele (5) și (23). Apoi avem formulele (26) și după inegalitățile (30) și (31), avem

$$|z^{(s)}(x_i, y_k) - z_{ik}^{(s)}|, \quad |p^{(s)}(x_i, y_k) - p_{ik}^{(s)}|, \quad |q^{(s)}(x_i, y_k) - q_{ik}^{(s)}| < \varepsilon \tag{32}$$

pentru $s = 0, 1, \ldots, \nu$.

Să considerăm inegalitățile

$$z(x_i, y_k) - z_{ik}^{(\nu)} = [z(x_i, y_k) - z^{(\nu)}(x_i, y_k)] + [z^{(\nu)}(x_i, y_k) - z_{ik}^{(\nu)}]$$
$$p(x_i, y_k) - p_{ik}^{(\nu)} = \ldots$$
$$q(x_i, y_k) - q_{ik}^{(\nu)} = \ldots$$

și să ținem seama de inegalitățile (5) din § 1 și (32). Vom avea

$$\begin{aligned} &|z(x_i, y_k) - z_{ik}^{(\nu)}| < 2\varepsilon \\ &|p(x_i, y_k) - p_{ik}^{(\nu)}| < 2\varepsilon \\ &|q(x_i, y_k) - q_{ik}^{(\nu)}| < 2\varepsilon. \end{aligned} \tag{33}$$

Astfel am atașat la un număr pozitiv ε dat, o rețea Γ formată de nodurile (x_i, y_k) și un algoritm care permite calculul numerelor $z_{ik}^{(s)}$, $p_{ik}^{(s)}$, $q_{ik}^{(s)}$ relative la această rețea pentru $s = 0, 1, \ldots, \nu$, aceste numere fiind pentru $s = \nu$, valorile aproximative ale integralei $z(x, y)$ și ale derivatelor ei parțiale $p(x, y)$, $q(x, y)$ pe nodurile rețelei, valorile absolute ale diferențelor

$$z(x_i, y_k) - z_{ik}^{(\nu)}, \quad p(x_i, y_k) - p_{ik}^{(\nu)}, \quad q(x_i, y_k) - q_{ik}^{(\nu)}$$

fiind mai mici decît 2ε.

ФОРМУЛЫ КУБАТУРЫ; ПРИМЕНЕНИЕ К ЧИСЛЕННОМУ ИНТЕГРИРОВАНИЮ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО РОДА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В этой работе сперва изучаются кубатурные формулы (1), (2), (4), причем мы стремились определить их остаточный член R, которому мы придали вид (3). В цели получения этого результата мы распространили к кубатурным формулам метод данный И. Радоном [1] для построения квадратурных формул и развитый нами в многочисленных работах [2].

Построение кубатурной формулы (1) сведено в § 1 первой главы к решению уравнений с частными производными (3) при граничных условиях (9). Числа α, β, γ определены так, чтобы эта задача явилась разрешимой. Мы получаем кубатурные формулы (19), (21), (23), в которых функции $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$, $\theta(x, y)$ появляющиеся в выражении остаточного члена R, даны формулами (20), (22) и (24).

В § 2 первой главы определен остаточный член R кубатурной формулы (2), причем эта задача сведена к решению системы уравнений с частными производными (4) при граничных условиях (10_1) — (10_6), а постоянные α_i, β_i, γ_i выбраны так, чтобы эта задача явилась разрешимой.

Мы получили таким образом кубатурную формулу (31), в которой функции $\varphi_i(x, y)$, $\psi_i(x, y)$, $\theta_i(x, y)$ даны формулами (32).

Мы указали на важность этих кубатурных формул при вычислении двойного интеграла, относительно прямоугольника D, с наперед заданным приближением (гл. I, § 3).

Во второй главе работы мы приведем приложение кубатурной формулы (4) к численному решению уравнения с частными производными (5), допускающего единственный интеграл $z(x, y)$ в прямоугольнике Δ ограниченном прямыми с уравнениями соответственно $x = 0$, $x = \lambda$, $y = 0$, $y = \mu$, причем этот интеграл равен нулю на сторонах этого прямоугольника расположенных на осях Ox, Oy.

Мы решили следующую задачу: Определить сеть Γ, образованную прямыми с уравнениями соответственно $x = x_i$, $y = y_k$, причем точки x_i и y_k разделяют промежутки $(0, \lambda)$, $(0, \mu)$ на n и m равных частей и добиться алгоритмом ввиду вычисления чисел $z_{ik}^{(s)}$, $p_{ik}^{(s)}$, $q_{ik}^{(s)}$, где $s = 0, 1, \ldots, \nu$, таким образом чтобы если ε — заданное положительное число, абсолютные значения разностей $z(x_i, y_k) - z_{ik}^{(\nu)}$, $p(x_i, y_k) - p_{ik}^{(\nu)}$, $q(x_i, y_k) - q_{ik}^{(\nu)}$ в узлах сети Γ были меньше 2ε.

FORMULES DE CUBATURE ; APPLICATION À L'INTÉGRATION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE DE TYPE HYPERBOLIQUE

RÉSUMÉ

Dans se travail on étudie d'abord les formules de cubature (1), (2), (4) en nous attachant surtout à la détermination du reste R que nous avons mis sous la forme (3). Pour arriver à ces résultats nous avons étendu aux formules de cubature la méthode que J. Radon [1] a donné pour construire des formules de quadrature et que nous avons développé dans des nombreux travaux [2].

La recherche de la formule de cubature de la forme (1) a été ramenée dans le premier chapitre, § 1, à l'intégration des équations aux dérivées partielles (3) avec les conditions aux limites (9). Les nombres α, β, γ sont déterminés de façon que ce problème soit possible. Nous sommes ainsi conduit aux formules de cubature (19), (21), (23) où les fonctions $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$, $\theta(x, y)$ figurant dans le reste R sont données par les formules (20), (22) et (24).

Dans le premier chapitre du § 2, nous avons déterminé le reste R de la formule de cubature (2), en ramenant ce probleme à l'intégration du système d'équations aux dérivées partielles (4) avec les conditions aux limites (10_1) — (10_6) et où les constantes α_i, β_i, γ_i sont choisis de façon que ce problème soit posible. Nous sommes ainsi conduit à la formule de cubature (31) où les fonctions $\varphi(x, y)$ $\psi(x, y)$, $\theta(x, y)$ sont données par les formules (32).

Nous avons montré l'importance de ces formules de cubature en les appliqant au calcul d'une intégrale double étendue à un rectangle D, avec une approximation donnée (ch. I, §3).

Dans le second chapitre de notre travail, nous avons fait une application de la formule de cubature (4) à l'intégration numérique de l'équation aux dérivées partielles (5), qui admet une intégrale unique $z(x, y)$ dans le rectangle Δ formé par les droites $x = 0$, $x = \lambda$, $y = 0$, $y = \mu$ et qui est nulle sur les côtés de ce rectangle situés sur les axes Ox, Oy.

Le probleme que nous avons résolu est le suivant : déterminer un réseau Γ formé par les droites $x = x_i$, $y = y_k$ où les points x_i et y_k partagent les intervalles $(0, \lambda)$, $(0, \mu)$ en n et m parties égales et chercher un algorithme de calcul pour les nombres $z_{ik}^{(s)}$, $p_{ik}^{(s)}$, $q_{ik}^{(s)}$, où $s = 0, 1, \ldots, \nu$ de façon que ε étant un nombre positif donné, les valeurs absolues des différences $z(x_i, y_k) - z_{ik}^{(\nu)}$, $p(x_i, y_k) - p_{ik}^{(\nu)}$, $q(x_i, y_k) - q_{ik}^{(\nu)}$ sur les noeuds du réseau Γ soit plus petites que 2ε.

BIBLIOGRAFIE

1. J. Radon, *Restausdrücke bei Interpolations und Quadratur Formeln durch bestimmte Integralen.* Monatshefte für Mathematik und Physik 42, 389–396 (1935).
2. D. V. Ionescu, *Cuadraturi numerice.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1957.

Primit la 26. XII. 1959.