# O TEOREMĂ RELATIVĂ LA ANUMITE ȘIRURI DE FUNCȚII OLOMORFE

DE

I. MARUȘCIAC
(Cluj)

*Lucrare prezentată în ședința de comunicări din 25 mai 1960 a Institutului de calcul al Academiei R.P.R. — Filiala Cluj.*

Într-o notă a lui G. Julia [1], referitoare la calculul polinomului lui Cebîșev $T_n(z)$ relativ la un domeniu plan, în cursul demonstrației se arată că există un subșir de polinoame de grad $n$, $P_{n_k}(z)$, al șirului $P_n(z)$, precizat în lucrarea citată, care converge uniform către polinomul $T_n(z)$, în domeniul considerat. De aici autorul trage concluzia că întreg șirul $P_n(z)$ converge uniform către $T_n(z)$. Acest lucru nu este evident, dar știind că orice subșir convergent al lui $P_n(z)$ tinde către aceeași limită, anume către $T_n(z)$ (polinomul lui Cebîșev fiind unic), se poate arăta că în acest caz întreg șirul $P_n(z)$ converge uniform către $T_n(z)$.

Acest lucru este valabil în cazul mai general al unui șir de funcții olomorfe într-un domeniu oarecare din planul complex. În prezenta notă dăm demonstrația acestei teoreme.

Fie $\{f_n(z)\}$ un șir infinit de funcții olomorfe în cercul $C : |z| \leqslant R$. Putem presupune că $R \geqslant 1$, căci în caz contrar, prin transformarea $Z = kz$, raza cercului $C' : |Z| \leqslant kR$ este $kR$ și, alegînd convenabil numărul $k$, putem avea $kR \geqslant 1$. Funcțiile $f_n\left(\frac{Z}{k}\right)$ vor rămîne de asemenea olomorfe în cercul $C' : |Z| \leqslant R_1$, $R_1 = kR$. Dacă șirul $\{f_n(z)\}$ este uniform mărginit în cercul $C$, atunci și $\left\{f_n\left(\frac{Z}{k}\right)\right\}$ va fi de asemenea uniform mărginit în cercul $C'$. Avem următoarea :

TEOREMĂ. *Fie $\{f_n(z)\}$ un șir infinit de funcții olomorfe și uniform mărginite în cercul $C' : |z| \leqslant R_1$. Atunci dacă orice subșir convergent al său tinde către o aceeași limită $f(z)$, șirul întreg este uniform convergent către $f(z)$.*

*Demonstraţie.* Scriem dezvoltările după puterile lui $z$ ale funcţiilor $f_n(z)$ :

$$f_n(z) = a_0^{(n)} + a_1^{(n)} z + a_2^{(n)} z^2 + \ldots + a_m^{(n)} z^m + \ldots, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Funcţiile $f_n(z)$ fiind uniform mărginite în cercul $C' : |z| \leqslant R_1$, deci $|f_n(z)| \leqslant M$, rezultă

$$|a_m^{(n)}| \leqslant \frac{M}{R_1^m} \leqslant M,$$

oricare ar fi $n$ şi $m$.

Să presupunem că şirul $\{f_{n_k}(z)\}$ converge uniform către

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_m z^m + \ldots$$

(Un astfel de şir există, deoarece şirul iniţial formează o familie normală).

Să arătăm că în şirul $\{f_n(z)\}$ nu există subşiruri care să nu fie convergente.

Presupunem contrariul, că şirul numerelor $\{a_m^{(n)}\}$, unde $m$ e fix, n-ar fi convergent pentru $n$ variabil şi că ar admite două puncte de acumulare distincte $a'_m$ şi $a''_m$, $a'_m \neq a''_m$.

Deci, din şirul

$$S : 1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots$$

se poate extrage un subşir

$$S_1 : n_1, n'_1, n''_1, n'''_1, \ldots, n_1^{(k)}, \ldots$$

astfel ca $a_m^{n_1}, a_m^{n'_1}, a_m^{n''_1}, a_m^{n'''_1}, \ldots, a_m^{n_1^{(k)}}, \ldots$ să conveargă către $a'_m$, atunci cînd $k \to \infty$.

Din şirul $S_1$ se poate extrage un subşir

$$S_2 : n_1, n_2, n'_2, n''_2, \ldots, n_2^{(k)}, \ldots$$

astfel ca $a_0^{n_1}, a_0^{n_2}, a_0^{n'_2}, a_0^{n''_2}, \ldots, a_0^{n_2^{(k)}}, \ldots$ să conveargă către $a'_0$.

La fel, din şirul $S_2$ se poate extrage un subşir

$$S_3 : n_1, n_2, n_3, n'_3, \ldots n_3^{(k)}, \ldots$$

astfel ca $a_1^{n_1}, a_1^{n}, a_1^{n_3}, a_1^{n'_3}, \ldots, a_1^{n_3^{(k)}}, \ldots$ să conveargă către $a'_1$ ş. a. m. d., din şirul $S_m$ se poate extrage un subşir

$$S_{m+1} : n_1, n_2, n_3, n_4, \ldots n_m, n_{m+1}, n'_{m+1}, \ldots n_{m+1}^{(k)}, \ldots$$

astfel ca şirul $a_{m-1}^{n_1}, a_{m-1}^{n_2}, a_{m-1}^{n_3}, a_{m-1}^{n_4}, \ldots, a_{m-1}^{n_m}, a_{m-1}^{n_{m+1}}, a_{m-1}^{n'_{m+1}}, \ldots, a_{m-1}^{n_{m+1}^{(k)}}, \ldots$ să conveargă către $a'_{m-1}$, iar din şirul $S_{m+1}$ se poate extrage un subşir

$$S_{m+2} : n_1, n_2, n_3, n_4, \ldots, n_{m+1}, n_{m+2}, n'_{m+2}, \ldots, n_{m+2}^{(k)}, \ldots$$

astfel ca $a_{m+1}^{n_1}, a_{m+1}^{n_2}, a_{m+1}^{n_3}, a_{m+1}^{n_4}, \ldots, a_{m+1}^{n_{m+1}}, a_{m+1}^{n_{m+2}}, a_{m+1}^{n'_{m+2}}, \ldots, a_{m+1}^{n_{m+2}^{(k)}}, \ldots$ să conveargă către $a'_{m+1}$, şi aşa mai departe.



Folosind procedeul diagonal, vom avea

$$\left\{a_l^{n_p}\right\} \to a'_l, \text{ atunci cînd } p \to \infty, \; l = 0, 1, 2, 3, \ldots, m-1, m, m+1, \ldots$$

şirul $\{n_p\}$ fiind un subşir al tuturor şirurilor $S_k$, oricare ar fi $k$.

Deci, subşirul de funcţii $\{f_{n_p}(z)\}$ este un subşir convergent către

$$f_1(z) = a'_0 + a'_1 z + a'_2 z^2 + \ldots + a'_m z^m + \ldots$$

Conform teoremei lui Vitali, convergenţa este şi uniformă.

Extrăgînd acum din şirul $\{a_m^{(n)}\}$ un subşir converge către $a''_m$ şi operînd cu acest subşir, la fel ca mai sus, găsim un alt subşir $\{n'_p\}$ astfel încît $\{f_{n'_p}(z)\}$ converge tot uniform către

$$f_2(z) = a''_0 + a''_1 z + a''_2 z^2 + \ldots + a'_m z^m + \ldots$$

Însă prin ipoteză avem

$$f_1(z) = f_2(z) = f(z),$$

de unde, în particular $a'_m = a''_m = a_m$, adică o contradicţie, care arată că nici un şir $\{a_m^{(n)}\}$ nu poate fi oscilant. Prin urmare, întreg şirul $\{f_n(z)\}$ tinde către $f(z)$ în $C'$. Aplicînd cuoscuta teoremă a lui Vitali, se constată că şirul converge uniform către $f(z)$, în $C'$.

*Universitatea „Babeş—Bolyai" Cluj,*
*Catedra de Teoria funcţiilor*

## ТЕОРЕМА О НЕКОТОРЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ


### КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В этой заметке доказывается следующая теорема:

*Пусть $\{f_n(z)\}$ — бесконечная последовательность голоморфных и равномерно ограниченных в круге $(C) : |z| \leqslant R$ функций. Тогда если всякая сходящаяся подпоследовательность данной последовательности стремится к тому же пределу $f(z)$, то целая последовательность равномерно сходится к $f(z)$.*

## UN THÉORÈME RELATIF À CERTAINES SUITES DE FONCTIONS HOLOMORPHES

RÉSUMÉ

Dans cette note on démontre le théorème suivant :

*Soit* $\{f_n(z)\}$ *une suite infinie de fonctions holomorphes et uniformément bornées dans un cercle* $(C): |z| \leqslant R$. *Si n'importe quelle de ses suites partielles convergentes tend vers une même limite* $f(z)$, *la suite entière converge uniformément vers* $f(z)$.

BIBLIOGRAFIE

1. G. Julia, *Sur les polynomes de Tchebicheff*. C. R. Acad. Sci., **182**, p. 1201, 1455 (1926).
2. P. Montel, *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leures applications*. Paris, 1927.

Primit la 15. IX. 1959.