O PROBLEMĂ EXTREMALĂ ÎN CLASA FUNCŢIILOR UNIVALENTE

DE

PETRU T. MOCANU

(Cluj)

Comunicare prezentată la sesiunea ştiinţifică din 20—22 mai 1959 a Universităţii „Babeş—Bolyai", Cluj.

1. Să considerăm clasa S a funcţiilor

$$w = f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

olomorfe şi univalente în cercul unitate, $|z| < 1$.

Fie a un număr complex oarecare şi fie ecuaţia

$$f(u) = a,$$

unde $f \in S$. Ne punem problema găsirii valorilor extreme ale modulelor rădăcinilor situate în cercul unitate ale ecuaţiei de mai sus, atunci cînd f descrie clasa S. Evident că soluţia acestei probleme poate fi furnizată de rezultatul clasic al lui Koebe, care afirmă că pentru orice funcţie din clasa S au loc delimitările exacte

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{r}{(1-r)^2}, \quad r = |z|,$$

egalităţile fiind valabile numai pentru funcţia lui Koebe

$$f(z) = \frac{z}{(1 + e^{i\alpha} z)^2}, \quad \alpha \text{ real.}$$

Se vede uşor că minimul, r_1, al modulelor rădăcinilor este dat de cea mai mică rădăcină a ecuaţiei

$$\frac{r}{(1-r)^2} = |a|, \quad \text{adică} \quad r_1 = \frac{2|a| + 1 - \sqrt{4|a| + 1}}{2|a|},$$

iar maximul, r_2, este dat de cea mai mare rădăcină a ecuaţiei

$$\frac{r}{(1+r)^2} = |a|, \quad \text{adică} \quad r_2 = \frac{-2|a| + 1 - \sqrt{-4|a| + 1}}{2a}.$$

Să observăm că în al doilea caz, pentru ca soluţia să fie posibilă trebuie ca $|a| \leqslant \frac{1}{4}$.

2. Problema astfel pusă se pretează la o generalizare, care conduce la rezultate noi.

Pentru aceasta, să considerăm o funcţie $g(z)$ olomorfă sau meromorfă (cu polul unic $z = 0$) în cercul unitate şi care nu se anulează în origine, $g(0) \neq 0$.

Fie ecuaţia

$$f(u) = g(u), \tag{1}$$

unde $f \in S$; ne punem problema de a găsi valorile extreme (minimul r_1 şi maximul r_2) ale modulelor rădăcinilor situate în cercul unitate ale acestei ecuaţii, atunci cînd funcţia f descrie clasa S.

După natura funcţiei $g(z)$, se pot întîmpla următoarele cazuri:

1. Există o coroană circulară cu centrul în origine, situată în interiorul cercului unitate, care să conţină orice rădăcină z a ecuaţiei (1), $|z| < 1$ (presupunînd că există funcţii $f \in S$, pentru care ecuaţia (1) are rădăcini în cercul unitate).

2. Există funcţii $f \in S$, pentru care ecuaţia (1) are rădăcini z, $|z| < 1$, de modul oricît de aproape de 1.

3. Oricare ar fi funcţia $f \in S$, ecuaţia (1) nu are nici o rădăcină în cercul unitate.

Evident că în primul caz $0 < r_1 < r_2 < 1$, în al doilea caz $0 < r_1 < r_2 = 1$, iar în al treilea caz $r_1 = r_2 = 1$. Din cauza compactităţii clasei S şi a condiţiei $g(0) \neq 0$, nu putem avea $r_1 = 0$. Deci există totdeauna un cerc cu centru în origine, care să nu conţină nici o rădăcină a ecuaţiei (1), oricare ar fi funcţia $f \in S$. Rezultatul pe care îl vom găsi ne va permite, după cum vom vedea, să precizăm în ce condiţii poate avea loc fiecare din cazurile precedente.

3. Pentru fixarea ideilor să presupunem că sîntem în primul caz. Fie r minimul modulelor rădăcinilor ecuaţiei (1) şi fie $f(u)$ acea funcţie din clasa S pentru care acest minim este atins (astfel de funcţie există deoarece S este un spaţiu compact). Dacă z, $|z| = r$, este rădăcina ecuaţiei (1), care are modulul minim, atunci avem

$$f(z) = g(z), \quad z = re^{i\theta}, \quad \theta \text{ real.}$$

Să considerăm o variaţie a funcţiei f, dată de formula lui S c h i f f e r - G o l u z i n [1]:

$$f^*(u) = f(u) + \lambda A(u;\zeta;\psi;) + 0(\lambda^2), \ |\zeta| < 1, \ \lambda > 0, \ \psi \text{ real,}$$

unde

$$A(u;\zeta;\psi) = e^{i\psi}\frac{f^2(u)}{f(u)-f(\zeta)} - e^{i\psi}f(u)\left[\frac{f(\zeta)}{\zeta f'(\zeta)}\right]^2 -$$

$$- e^{-i\psi}\frac{uf'(u)}{u-\zeta}\zeta\left[\frac{f(\zeta)}{\zeta f'(\zeta)}\right]^2 + e^{-i\psi}\frac{u^2f'(u)}{1-\bar\zeta u}\bar\zeta\overline{\left[\frac{f(\zeta)}{\zeta f'(\zeta)}\right]}^2. \tag{2}$$

Se ştie că pentru λ suficent de mic, funcţia f^* aparţine clasei S.

Dacă în ecuaţia (1) înlocuim pe f cu f^*, această ecuaţie devine

$$f(u) + \lambda A(u;\zeta;\psi) + O(\lambda^2) = g(u). \tag{3}$$

Această ecuaţie va avea (pentru λ suficient de mic) o rădăcină z^*, care va fi o variaţie a rădăcinii z a ecuaţiei (1):

$$z^* = z + \lambda h + O(\lambda^2), \quad h = \left.\frac{\partial z^*}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=0}$$

Pentru a-l obţine pe h, vom înlocui în ecuaţia (3) pe u cu z^*, vom deriva identitatea obţinută în raport cu λ şi-l vom face pe $\lambda = 0$. Se obţine

$$h = \frac{A}{g'(z)-f'(z)}$$

unde

$$A = A(z;\zeta;\psi)$$

Deoarece funcţia f este extremală, rezultă

$$|z^*| \geqslant |z| = r.$$

Dar

$$|z^*|^2 = z^*\bar z^* = |z|^2 + 2\lambda\mathcal{R}(h\bar z) + O(\lambda^2).$$

Deci trebuie să fie satisfăcută inegalitatea

$$\mathcal{R}(h\bar z) \geqslant 0.$$

Ţinînd seama de expresia lui h şi introducînd notaţiile

$$f(z) = g(z) = g, \quad f'(z) = l, \quad g'(z) = \omega,$$

inegalitatea de mai sus se scrie

$$\mathcal{R}\left(\frac{\bar z A}{\omega - l}\right) \geqslant 0.$$

Înlocuind pe A cu expresia sa dată de (2), obţinem

$$\mathcal{R}\left\{e^{i\psi}\left[\frac{g^2}{\omega-l}\frac{\bar z}{g-f(\zeta)} - \frac{\bar z g}{\omega-l}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta f'(\zeta)}\right)^2 - \frac{z\bar z l}{\omega-l}\frac{\zeta}{z-\zeta}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta f'(\zeta)}\right)^2 -\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{z\bar z^2\bar l}{\bar\omega-\bar l}\frac{\zeta}{1-\bar z\zeta}\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta f'(\zeta)}\right)^2\right]\right\} \geqslant 0.$$

Din cauza arbitrarităţii lui ψ, trebuie ca paranteza dreaptă să fie nulă

$$\frac{g^2}{\omega-l}\frac{1}{g-f(\zeta)} = \left[\frac{g}{\omega-l} + \frac{zl}{\omega-l}\frac{\zeta}{z-\zeta} - \frac{z\bar z\bar l}{\bar\omega-\bar l}\frac{\zeta}{1-\bar z\zeta}\right]\left(\frac{f(\zeta)}{\zeta f'(\zeta)}\right)^2.$$

Rezultă că funcţia extremală $w = f(\zeta)$ trebuie să satisfacă ecuaţia diferenţială

$$\left(\frac{\zeta w'}{w}\right)^2\frac{g^2}{g-w} = \frac{1}{\bar\omega-\bar l}\frac{a+b\zeta+c\zeta^2}{(z-\zeta)(1-\bar z\zeta)}, \tag{4}$$

unde

$$a = (\bar{\omega} - \bar{l}) z g$$

$$b = (\bar{\omega} - \bar{l}) [z l - (1 + r^2) g] - (\omega - l) z r^2 \bar{l}$$

$$c = (\bar{\omega} - \bar{l}) \bar{z} (g - z) + (\omega - l) r^2 \bar{l}.$$

Dacă am presupune că r este maximul modulelor rădăcinilor ecuației (1), repetînd raționamentele anterioare, se deduce că funcția extremală verifică de asemenea ecuația diferențială (4).

4. Se poate arăta, ca și în [1], că funcția extremală $w = f(\zeta)$ transformă cercul unitate, $|\zeta| < 1$, în întreg planul tăiat de-a lungul unui număr finit de arce analitice. Fie k punctul de pe cercul $|\zeta| = 1$ care corespunde extermității unei astfel de tăieturi. Evident că pentru $\zeta = k$ avem $w' = 0$. Rezultă că trinomul $a + b\zeta + c\zeta^2$ trebuie să admită rădăcina dublă $\zeta = k$. Condiția ca rădăcina să fie dublă este

$$\{(\bar{\omega} - \bar{l}) [(1 - r^2) g + z l] - (\omega - l) z r^2 \bar{l}\}^2 - 4(\bar{\omega} - \bar{l})^2 z l g (1 - r^2) = 0. \quad (5)$$

Ecuația diferențială (4) va primi forma

$$\left(\frac{\zeta w'}{w}\right)^2 \frac{g^2}{g - w} = C \frac{(1 - \bar{k}\zeta)^2}{(z - \zeta)(1 - \bar{z}\zeta)}.$$

Dacă facem $\zeta \to 0$, se deduce $C = zg$. Împărțind ambii membri cu $z - \zeta$ și făcînd $\zeta \to z$, obținem relația :

$$(1 - \bar{k} z)^2 = \frac{z l}{f} (1 - r^2). \quad (6)$$

Ținînd seama de (5) și (6) deducem relația

$$\left\{g(\bar{\omega} - \bar{l}) \left[1 - r^2 + \frac{(1 - \bar{k} z)^2}{1 - r^2}\right] - (\omega - l) z^2 \frac{1 - \bar{k} z}{1 - r^2} \bar{g}\right\}^2 = 4 (\bar{\omega} - \bar{l}) (1 - \bar{k} z)^2 g^2,$$

de unde se obține ușor următoarea relație

$$g(\bar{\omega} - \bar{l}) = k^2 (\omega - l) \bar{g}.$$

Înlocuind aici pe l cu expresia sa dată de (6), se obține

$$k^2 = \frac{z}{\bar{z}} \frac{1 - \bar{\Omega}}{1 - \Omega}, \quad \text{unde} \quad \Omega = \frac{z g'(z)}{g(z)}.$$

Dacă $z = r e^{i\theta}$, se deduce formula

$$k = \pm e^{i\theta} \frac{1 - \bar{\Omega}}{|1 - \Omega|}. \quad (7)$$

Cele două valori ale lui k vor corespunde celor două valori extreme pe care vrem să le găsim.

5. Ecuația diferențială (4) se poate scrie, în definitiv, sub forma

$$\left(\frac{\zeta w'}{w}\right)^2 \frac{g}{g - w} = \frac{z(1 - \bar{k}\zeta)^2}{(z - \zeta)(1 - \bar{z}\zeta)},$$

unde k este dat de formula (7), sau încă sub forma

$$\frac{\sqrt{g}\, dw}{w\sqrt{g - w}} = \frac{\sqrt{z}(1 - \bar{k}\zeta)}{\zeta\sqrt{H(\zeta)}} d\zeta,$$

unde $H(\zeta) = (z - \zeta)(1 - \bar{z}\zeta)$.

Deci, integrînd, avem

$$\sqrt{g} \int_g^w \frac{dw}{w\sqrt{g - w}} = \sqrt{z} \int_z^\zeta \frac{1 - \bar{k}\zeta}{\zeta\sqrt{H(\zeta)}} d\zeta.$$

De aici deducem imediat că *funcția extremală căutată este dată sub formă implicită de ecuația*

$$\mathrm{Log} \frac{\sqrt{g} - \sqrt{g - w}}{\sqrt{g} + \sqrt{g - w}} = \mathrm{Log} \frac{(1 - r^2)\zeta}{2\sqrt{z H(\zeta)} + 2z - (1 + r^2)\zeta} - q \,\mathrm{Log} \frac{1 + r^2 - 2\bar{z}\zeta - 2\sqrt{\bar{z} H(\zeta)}}{1 - r^2}, \quad (8)$$

unde

$$q = \pm \frac{1 - \Omega}{|1 - \Omega|}$$

(cele două determinări ale lui q corespund celor două valori extreme).

Rezolvînd ecuația (8) în raport cu w, se obține

$$w = 4g \frac{\Phi(\zeta)}{[1 + \Phi(\zeta)]^2}, \quad (8')$$

unde

$$\Phi(\zeta) = \frac{(1 - r^2)^{q+1} \zeta}{[2\sqrt{zH(\zeta)} + 2z - (1 + r^2)\zeta]\left[1 + r^2 - 2\bar{z}\zeta - 2\sqrt{\bar{z} H(\zeta)}\right]^q}$$

(se va alege acea determinare a funcției multiforme $\Phi(\zeta)$ în așa fel ca funcția (8′) să aparțină clasei S).

Derivînd relația (8′) se obține

$$w' = 4g \frac{\Phi'(\zeta)[1 - \Phi(\zeta)]}{[1 + \Phi(\zeta)]^3}.$$

Pe de altă parte avem

$$\Phi'(0) = \left(\frac{1 + r}{1 - r}\right)^q \frac{1 - r^2}{4z}.$$

Punînd condiția $w'(0) = 1$, se obține relația

$$\frac{g(z)}{z} \left(\frac{1 + r}{1 - r}\right)^q (1 - r^2) = 1,$$

sau

$$\frac{1-r^2}{r}\left|g(re^{i\theta})\right| . \exp\left[\mathcal{R}(q)\ln\frac{1+r}{1-r}\right] . \exp\left\{i\left|\arg g(re^{i\theta}) - \theta + \mathcal{J}(q)\ln\frac{1+r}{1-r}\right|\right\} = 1.$$

Deducem în definitiv următoarea

TEOREMĂ. *Dacă $z = re^{i\theta}$ este o rădăcină a ecuației* (1) *al cărei modul are o valoare extremă (cînd f descrie clasa S), atunci r și θ verifică sistemul de ecuații*

$$\begin{cases} \dfrac{1-r^2}{r}\left|g(re^{i\theta})\right|\left(\dfrac{1+r}{1-r}\right)^{R(q)} = 1 \\ \arg g(re^{i\theta}) - \theta + \mathcal{J}(q)\ln\dfrac{1+r}{1-r} = 0 \end{cases} \tag{9}$$

unde

$$q = \pm\frac{1-\Omega}{|1-\Omega|}, \qquad \Omega = \frac{re^{i\theta}g'(re^{i\theta})}{g(re^{i\theta})}.$$

Funcția extremală $w = f(\zeta)$ este dată sub formă implicită de ecuația (8).

6. Presupunînd că putem elimina pe θ între cele două ecuații ale sistemului (9), obținem, pentru cele două determinări ale lui q, două ecuații în r:

$$E_1(r) = 0, \qquad E_2(r) = 0. \tag{10}$$

Putem avea următoarele trei cazuri (care corespund celor trei cazuri menționate la punctul 2.:

1) Ambele ecuații (10) admit rădăcini în intervalul (0, 1) și fie r_1, respectiv r_2 cea mai mică, respectiv cea mai mare dintre aceste rădăcini, adică $r_1 < r_2 < 1$.

Atunci putem afirma că *r_1 este minimul, iar r_2 este maximul modulelor rădăcinilor situate în cercul unitate ale ecuației $f(z) = g(z)$, oricare ar fi funcția $f(z) \in S$.*

2) Numai una dintre ecuațiile (10) admite rădăcini în intervalul (0,1); fie r_1 cea mai mică rădăcină ($0 < r_1 < 1$).

Atunci putem afirma că *r_1 este minimul modulelor rădăcinilor ecuației $f(z) = g(z)$ oricare ar fi funcția $f \in S$.* În acest caz $r_2 = 1$, adică ecuația $f(z) = g(z)$ admite rădăcini în cercul unitate de modul oricît de apropiat de 1 (cînd f descrie clasa S).

3) Niciuna dintre ecuațiile (10) nu admite rădăcini în intervalul (0, 1). Atunci $r_1 = r_2 = 1$ și putem afirma că *ecuația $f(z) = g(z)$ nu admite nicio rădăcină în cercul unitate oricare ar fi funcția $f \in S$.*

Se poate pune aici problema de a găsi condiții necesare și suficiente (sau poate numai suficiente) pentru funcția $g(z)$ astfel ca să aibă loc unul din cele trei cazuri de mai sus. Pare interesant mai ales cazul al treilea. Dacă vom numi *funcție excepțională* relativă la clasa S orice funcție $g(z)$ astfel ca ecuația $f(z) = g(z)$ să nu admită nici o rădăcină în cercul unitate, oricare ar fi $f(z) \in S$, atunci se poate pune problema de a găsi clase de funcții excepționale relative la clasa S.

7. Să dăm o aplicație simplă a rezultatelor de mai sus. Mai întîi să observăm că dacă $g(z) = a =$ const., atunci $\Omega = 0$, $q = \pm 1$ și se regăsește imediat rezultatul amintit la punctul **1**.

Să luăm $g(z) = (1 + z)^m$, m real. În acest caz se găsește foarte ușor că

$$E_1(r) = (1-r)^2(1+r)^m - r, \qquad E_2(r) = (1+r)^{2+m} - r.$$

Se vede imediat că ecuația $E_2(r) = 0$ nu are rădăcini în intervalul (0, 1), pe cînd $E_1(r) = 0$ are o rădăcină în acest interval. Putem deci afirma că *oricare ar fi funcția $f \in S$, ecuația*

$$(1+z)^{\mu}f(z) = 1, \qquad \mu \text{ real}$$

nu admite nici o rădăcină în cercul cu centrul în origine și de rază (maximă) dată de rădăcina cuprinsă în intervalul (0,1) *a ecuației*

$$(1-r)^2(1+r)^{-\mu} - r = 0.$$

8. Amintim, în sfîrșit, fără demonstrație, că cu ajutorul metodelor variaționale se poate ajunge, urmînd o cale analoagă cu cea de mai sus, la următorul rezultat:

Oricare ar fi funcția $f(z) \in S$, ecuația $f(z) = f'(z)$ nu admite nici o rădăcină în interiorul cercului cu centrul în origine și de rază maximă $\rho = \sqrt{2} - 1 = 0{,}41\ldots$

Funcția extremală este funcția lui Koebe.

Universitatea „Babeș—Bolyai" Cluj,
Catedra de teoria funcțiilor

ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА В КЛАССЕ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Главный результат этой заметки следующий:

Рассматривается класс S функций $f(z)$, $[f(0)=0,\ f'(0)=1]$ голоморфных и однолистных в единичном круге. Пусть $g(z)$ — голоморфная или мероморфная в этом круге функция (с единственным полюсом $z=0$), $g(0)\neq 0$.

Доказывается теорема: *если $z = re^{i\theta}$, $r < 1$ есть корень уравнения $f(z) = g(z)$, модуль которого r принимает экстремальное значение (когда f пробегает класс S), то r и θ удовлетворяют системе уравнений* (9) *и экстремальная функция $f \in S$ дана в неявном виде уравнением* (8).

UN PROBLÈME EXTRÉMAL DANS LA CLASSE DES FONCTIONS UNIVALENTES

RÉSUMÉ

Le résultat principal de cette note est le suivant :

On considère la classe S des fonctions $f(z)$, $[f(0) = 0,\ f'(0) = 1]$, holomorphes, et univalentes dans le cercle unité. Soit $g(z)$, $(g(0) \neq 0)$, une fonction holomorphe ou méromorphe (avec le pôle unique $z = 0$) dans ce cercle. On démontre le théorème suivant :

Si $z = re^{i\theta}$, $r < 1$, *est une racine de l'equation* $f(z) = g(z)$, *dont le module* r *a une valeur extrémale (lorsque* f *varie dans la classe* S*), alors* r *et* θ *vérifient le système* (9) *et la fonction extrémale* $f \in S$ *est donnée par l'équation* (8).

BIBLIOGRAFIE

1. Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного* Москва-Ленинград, 1952.

Primit la 1. IX. 1959.