DIFERENȚE DIVIZATE ȘI DERIVATE*)

DE

TIBERIU POPOVICIU
Membru corespondent al Academiei R. P. R.
(Cluj)

Lucrare prezentată la Consfătuirea tehnico-științifică asupra mașinilor electronice de calcul din 13 – 15 ianuarie 1960, București.

I.

1. Fie $A[f] = A[f(x)]$ o funcțională liniară (deci aditivă și omogenă), definită pe un spațiu vectorial S de funcții $f = f(x)$, reale, de variabila reală x, definite și *continue* pe un interval I. Vom nota cu a extremitatea stîngă și cu b $(> a)$ extremitatea dreaptă a intervalului I. Vom presupune, fără a mai specifica în mod expres de fiecare dată, că elementele lui S se bucură de toate proprietățile de derivabilitate necesare pentru ca funcționalele liniare considerate să aibă sens și vom presupune că S conține totdeauna orice polinom.

Dacă considerăm șirul $A[x^i]$, $i = 0, 1, \ldots$, două cazuri se pot întîmpla. Sau nu toți termenii acestui șir sînt nuli și atunci există un cel mai mic exponent (și unul singur) i pentru care $A[x^i]$ este $\neq 0$, sau toți termenii șirului sînt egali cu zero. Rezultă de aici că orice funcțională liniară $A[f]$ are un *grad de exactitate* bine determinat. Acest grad de exactitate este numărul întreg $n \geqslant -1$, sau numărul impropriu $n = \infty$, caracterizat de proprietatea :

1°. $n = -1$ dacă $A[1] \neq 0$.

2°. $A[x^i] = 0, i = 0, 1, \ldots, n$, $A[x^{n+1}] \neq 0$ dacă $A[1] = 0$ și dacă cel puțin unul din numerele $A[x^i]$, $i = 0, 1, \ldots$ este diferit de zero.

3°. $n = \infty$ dacă $A[x^i] = 0$, $i = 0, 1, \ldots$

În cazurile 1° și 2° gradul de exactitate este *finit*. Acest caz are loc dacă și numai dacă $A[f]$ este diferit de zero pe cel puțin un polinom. În cazul 3° gradul de exactitate este *infinit* și atunci $A[f]$ este nul pe orice polinom.

---

*) Acest articol a apărut, cu cîteva mici modificări neesențiale, și în limba franceză în revista „Mathematica", 1 (24), fasc. 2.

Pentru ca o funcţională liniară $A[f]$ să fie nulă pe orice polinom de gradul n, este necesar şi suficient ca gradul său de exactitate să fie egal cu n cel puţin (se presupune $n < \infty$). Un polinom de gradul n este o funcţie de forma $\alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \ldots + \alpha_n$, coeficienţii $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ fiind numere reale oarecari. Dacă cel mai înalt coeficient α_0 este $\neq 0$, polinomul se zice de gradul efectiv n.

2. Ne vom ocupa, în particular, de cazul cînd $A[f]$ este o combinaţie liniară a valorilor, pe un număr finit de puncte, ale funcţiei f şi ale unui număr finit de derivate ale sale. O astfel de funcţională liniară este de forma

$$A[f] = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=0}^{k_i-1} a_{i,j} f^{(j)}(z_i), \tag{1}$$

unde $p, k_1, k_2, \ldots, k_p$ sînt numere naturale date, z_i, $i = 1, 2, \ldots, p$, sînt p puncte *distincte* ale intervalului I iar $a_{i,j}$, $j = 0, 1, \ldots, k_i - 1$, $i = 1, 2, \ldots, p$ sînt constante independente de funcţia f. Punctele z_i le vom numi *nodurile* iar constantele $a_{i,j}$ *coeficienţii* funcţionalei liniare (1).

În expresia (1), pe nodul z_i figurează valorile funcţiei f şi ale primelor sale $k_i - 1$ derivate, deci ale primelor k_i derivate ale funcţiei f, dacă convenim ca funcţia însăşi să fie derivata sa de ordinul 0 şi dacă admitem că unii coeficienţi $a_{i,j}$ pot fi egali şi cu 0. Pentru aceasta convenim ca în z_i să fie confundate k_i noduri. Atunci k_i este *ordinul de multiplicitate* al nodului z_i (acest nod se zice *simplu* dacă $k_i = 1$, *dublu* dacă $k_i = 2$ etc.). Mai putem spune că z_i este un nod de ordin k_i de multiplicitate. În felul acesta numărul total al nodurilor, distincte sau nu (deci fiecare nod distinct contat cu ordinul său de multiplicitate) este egal cu $m = k_1 + k_2 + \ldots + k_p$. Numărul m al nodurilor este cel puţin egal cu p şi este egal cu p dacă şi numai dacă toate nodurile sînt simple.

Cele m noduri, distincte sau nu, se pot nota cu $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Dintre aceste puncte k_i coincid cu z_i pentru $i = 1, 2, \ldots, p$. În felul acesta am numerotat (cu primele m numere naturale) o permutare a nodurilor. În principiu permutarea, deci numerotarea nodurilor este arbitrară. Există totuşi anumite numerotări privilegiate, pe care le vom numi *numerotări* (sau permutări) *normale* şi care se obţin cînd pentru fiecare i, cele k_i noduri x_j care coincid cu z_i sînt numerotate cu k_i indici consecutivi. De exemplu, $x_{k_1+k_2+\ldots+k_{i-1}+\nu} = z_i$, $\nu = 1, 2, \ldots, k_i$, $i = 1, 2, \ldots, p$ $(k_0 = 0)$ este o numerotare normală. În particular, dacă şirul $x_1, x_2, \ldots, x_m$ este monoton (nedescrescător sau necrescător), nodurile sînt numerotate normal.

3. Funcţionala (identic) nulă pe S este de forma (1), unde toţi coeficienţii $a_{i,j}$ sînt egali cu 0. Această funcţională liniară are gradul de exactitate egal cu ∞.

O funcţională liniară de forma (1) nu determină complet sistemul de noduri z_i, cu ordinele de multiplicitate respective. Astfel la nodurile deja considerate putem adăuga un număr finit oarecare de noduri oarecari, fără ca această funcţională să se schimbe. Este destul să se arate acest lucru pentru un singur nod nou adăugat. Fie x_0 un nod adăugat la cele precedente.

Atunci putem adăuga lui $A[f]$, fără ca el să se schimbe, termenul $0 \cdot f(x_0)$ dacă x_0 nu coincide cu nici unul dintre nodurile z_i şi termenul $0 \cdot f^{(k_i)}(z_i)$, dacă $x_0 = z_i$.

Riguros vorbind, trebuie, în general, modificat şi spaţiul S de definiţie a lui $A[f]$. Dacă, de exemplu, facem modificarea precedentă pentru $x_0 = z_i$, noua funcţională liniară obţinută, egală cu $A[f]$ pe S, este definită pe un spaţiu vectorial ale cărui elemente admit o derivată de ordinul k_i pe punctul z_i. De la spaţiul vectorial iniţial S s-a cerut în mod necesar numai existenţa derivatelor de ordinul $k_i - 1$ pe z_i ale elementelor sale. Prin adăugarea, în felul arătat, de noi noduri, trebuiesc considerate deci, la rigoare, în general numai anumite restrîngeri (pe nişte submulţimi convenabile ale lui S) ale lui $A[f]$. Deoarece ceea ce urmează este suficient de clar, este inutil să insistăm mai pe larg asupra acestor consideraţiuni.

Să considerăm o funcţională liniară (1) care nu are toţi coeficienţii a_i nuli. Putem presupune, fără a restrînge generalitatea, că avem

$$a_{i,k_i-1} \neq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, p. \tag{2}$$

În acest caz nodurile sînt reduse la numărul lor minim. Dacă condiţiile (2) nu sînt toate verificate putem suprima un număr oarecare de noduri, fără ca funcţionala liniară $A[f]$ să se schimbe, în sensul de mai sus. Se poate uşor vedea cum se pot face aceste suprimări şi cum putem ajunge la numărul minim de noduri.

Să considerăm polinomul de gradul m,

$$l(x) = \prod_{\nu=1}^{m} (x - x_\nu). \tag{3}$$

Atunci[1])

$$A\left[\frac{l(x)}{x - z_i}\right] = a_{i,k_i-1} \left[\frac{l(x)}{x - z_i}\right]^{(k_i-1)}_{x = z_i} = a_{i,k_i-1} (k_i - 1)! \prod_{\nu=1}^{p}{}' (z_i - z_\nu)^{k_\nu},$$
$$i = 1, 2, \ldots, p,$$

care sînt, pe baza ipotezei (2), toţi diferiţi de zero.

Se deduce de aici următoarea

LEMA 1. *O funcţională liniară* (1), *în care nu toţi coeficienţii* a_{ij} *sînt nuli, are un grad de exactitate* (finit şi) *cel mult egal cu* $m - 2$.

Rezultă de aici că dacă o funcţională liniară de forma (1) are un grad de exactitate mai mare decît $m - 2$, atunci această funcţională liniară este identic nulă.

4. Dacă funcţionala liniară (1) are gradul de exactitate egal cu $m - 2$, ea se reduce, afară de un factor diferit de zero şi independent de funcţia f, la *diferenţa divizată* de *ordinul* $m - 1$ pe cele m noduri $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Această diferenţă divizată se notează cu

$$[x_1, x_2, \ldots, x_m; f(x)] \quad \text{sau} \quad [x_1, x_2, \ldots, x_m; f], \tag{4}$$

[1]) $\sum_{\nu=1}^{p}{}'$, $\prod_{\nu=1}^{p}{}'$ înseamnă că în însumare, respectiv în produs se exclude valoarea i a lui ν.

sau în fine cu

$$[\underbrace{z_1, z_1, \ldots, z_1}_{k_1}, \underbrace{z_2, z_2, \ldots, z_2}_{k_2}, \ldots, \underbrace{z_p, z_p, \ldots, z_p}_{k_p}; f]$$

dacă este necesar ca nodurile să fie specificate cu ordinele lor de multiplicitate.

Diferența divizată (4) este o funcțională liniară de forma (1) complet determinată de condiția ca să se anuleze pentru orice polinom de gradul $m-2$ și să se reducă la 1 pe polinomul x^{m-1}.

Diferența divizată se bucură de niște proprietăți și verifică niște formule bine cunoscute. Vom reaminti principalele formule de care ne vom servi în cele ce urmează.

Diferența divizată este simetrică în raport cu nodurile. Rezultă că în notația (4) numerotarea nodurilor este indiferentă.

Avem *relația de recurență*

$$[t_1, t_2, \ldots, t_{\varrho+1}; f] = \frac{[t_2, t_3, \ldots, t_{\varrho+1}; f] - [t_1, t_2, \ldots, t_\varrho; f]}{t_{\varrho+1} - t_1} \tag{5}$$

între diferențele divizate de ordinul ϱ și cele de ordinul $\varrho - 1$. Formula (5) dă și o justificare a denumirii de „diferență divizată". Această formulă este valabilă cu condiția ca diferențele divizate care intervin să aibă sens și ca nodurile t_1, $t_{\varrho+1}$, să fie distincte.

În cazul cînd toate nodurile unei diferențe divizate de ordinul ϱ coincid cu un același punct t, această diferență divizată se reduce la $\frac{1}{\varrho!} f^{(\varrho)}(t)$. Avem prin urmare formula,

$$[\underbrace{t, t, \ldots, t}_{\varrho+1}; f] = \frac{1}{\varrho!} f^{(\varrho)}(t). \tag{6}$$

Avem și *formula de descompunere*

$$[t_1, t_2, \ldots, t_\varrho, t_1', t_2', \ldots, t_{\varrho'}'; f] = \left[t_1, t_2, \ldots, t_\varrho; \frac{f(x)}{(x-t_1')(x-t_2')\ldots(x-t_{\varrho'}')}\right] +$$
$$+ \left[t_1', t_2', \ldots, t_{\varrho'}'; \frac{f(x)}{(x-t_1)(x-t_2)\ldots(x-t_\varrho)}\right], \tag{7}$$

care este valabilă cu condiția ca nici unul dintre nodurile $t_1, t_2, \ldots, t_\varrho$ să nu coincidă cu unul dintre nodurile $t_1', t_2', \ldots, t_{\varrho'}'$.

Avem *formula de reducere*

$$[t_1, t_2, \ldots, t_\varrho, t_1', t_2', \ldots, t_{\varrho'}'; f(x)(x-t_1')(x-t_2')\ldots(x-t_{\varrho'}')] =$$
$$= [t_1, t_2, \ldots, t_\varrho; f]. \tag{8}$$

Formulele precedente permit să obținem ușor coeficienții $c_{i,j}$ ai diferenței divizate (4), scrisă sub forma (1),

$$[x_1, x_2, \ldots, x_m; f] = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=0}^{k_i-1} c_{i,j} f^{(j)}(z_i). \tag{9}$$

Dacă punem

$$l_i(x) = \frac{l(x)}{(x-z_i)^{k_i}} = \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq i}}^{p} (x - z_\nu)^{k_\nu}, \quad i = 1, 2, \ldots, p,$$

unde $l(x)$ este polinomul (3), aplicînd convenabil și eventual de repetate ori formulele (6), (7), deducem

$$[x_1, x_2, \ldots, x_m; f] = \sum_{i=1}^{p} \left[\underbrace{z_i, z_i, \ldots, z_i}_{k_i}; \frac{f}{l_i}\right] =$$
$$= \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{(k_i-1)!} \left[\frac{f(x)}{l_i(x)}\right]^{(k_i-1)}_{x=z_i}.$$

Deducem

$$c_{i,j} = \frac{1}{(k_i-1)!} \cdot \binom{k_i-1}{j} \left[\frac{1}{l_i(x)}\right]^{(k_i-1-j)}_{x=z_i},$$

$$j = 0, 1, \ldots, k_i - 1, \quad i = 1, 2, \ldots, p.$$

În particular, avem

$$c_{i,k_i-1} = \frac{1}{(k_i-1)!} \cdot \frac{1}{\prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq i}}^{p} (z_i - z_\nu)^{k_\nu}}, \quad i = 1, 2, \ldots, p.$$

Se vede că în cazul diferenței divizate (4), condițiile (2) sînt verificate. Înseamnă că notația (4) a diferențelor divizate pune în evidență tocmai sistemul de noduri în număr minim.

5. Să notăm cu $L(x_1, x_2, \ldots, x_m; f|x)$ polinomul lui Lagrange-Hermite relativ la funcția f și pe nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Acesta este polinomul (unic) $L(x)$ de gradul $m-1$ care verifică egalitățile

$$L^{(j)}(z_i) = f^{(j)}(z_i), \quad j = 0, 1, \ldots, k_i - 1, \quad i = 1, 2, \ldots, p. \tag{10}$$

Avem

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_m; f|x) =$$
$$= \sum_{\nu=0}^{m-1} (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_\nu)\,[x_1, x_2, \ldots, x_{\nu+1}; f]. \tag{11}$$

Dacă $\nu = 0$, produsul $(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_\nu)$, din membrul al doilea, este înlocuit cu 1. Vom face o astfel de convenție și în alte formule analoage.

Din (10) rezultă că

$$A[f] = A[L(x_1, x_2, \ldots, x_m ; f|x)] \tag{12}$$

şi ţinînd cont de formula (11),

$$A[f] = \sum_{\nu=0}^{m-1} a_\nu\, [x_1, x_2, \ldots, x_{\nu+1} ; f], \tag{13}$$

unde

$$a_\nu = A[(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_\nu)], \quad \nu = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{14}$$

Dacă funcţionala liniară considerată are gradul de exactitate cel puţin egal cu n $(0 \leqq n \leqq m-2)$, avem $a_\nu = 0$, $\nu = 0, 1, \ldots, n$ şi reciproc. Dacă această funcţională liniară are gradul de exactitate egal cu n $(-1 \leqq n \leqq m-2)$ avem, în plus, $a_{n+1} = A[x^{n+1}] \neq 0$ şi reciproc. Această proprietate se poate enunţa sub forma următoarei

LEMA 2. *Pentru ca funcţionala liniară (1) să aibă gradul de exactitate cel puţin egal cu n, este necesar şi suficient ca în expresia sa sub forma (13) să avem $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$. Pentru ca gradul de exactitate să fie chiar n, este, în plus, necesar şi suficient ca să avem $a_{n+1} \neq 0$.*

6. Rezultatul precedent este adevărat pentru o numerotare oarecare a nodurilor.

Să presupunem acum că şirul $x_1, x_2, \ldots, x_m$ al nodurilor (deci numerotarea respectivă) se bucură de proprietatea că dacă i, j sînt doi oarecari dintre indicii $1, 2, \ldots, m$, avem

$$j - i \geqq n + 2 \Rightarrow x_i \neq x_j. \tag{15}$$

Aplicînd formula (5) diferenţelor divizate $[x_1, x_2, \ldots, x_{\nu+1} ; f]$, $\nu = n+2, n+3, \ldots, m-1$ (se presupune $m \geqq n+3$) şi dacă este necesar chiar de mai multe ori (aceasta dacă $m > n+3$), deducem formula $(m \geqq n+3)$,

$$A[f] = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\, [x_1, x_2, \ldots, x_{\nu+1} ; f] + \sum_{i=1}^{m-n-1} \mu_i\, [x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n+1} ; f], \tag{16}$$

unde coeficienţii a_ν, daţi de (14) şi coeficienţii μ_i, $i = 1, 2, \ldots, m-n-1$ sînt independenţi de funcţia f.

Putem atunci enunţa următoarea

LEMA 3. *Pentru ca funcţionala liniară (1) să aibă gradul de exactitate egal cu $n \geqq \max(k_1, k_2, \ldots, k_p) - 2$ (deci pentru ca această funcţională liniară să fie nulă pe orice polinom de gradul $n \geqq \max(k_1, k_2, \ldots, k_p) - 2$) este necesar şi suficient ca ea să fie de forma*

$$A[f] = \sum_{i=1}^{m-n-1} \mu_i\, [x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n+1} ; f], \tag{17}$$

unde μ_i, $i = 1, 2, \ldots, m-n-1$ sînt coeficienţi independenţi de funcţia f.

Pentru ca, sub aceleaşi condiţiuni, gradul de exactitate să fie egal cu n, este, în plus, necesar şi suficient ca să avem $\sum_{i=1}^{m-n-1} \mu_i \neq 0$.

Condiţia este necesară. Într-adevăr, pe de o parte, pe lîngă ipotezele lemei, putem găsi o numerotare a nodurilor astfel ca condiţiile (15) să fie verificate. O astfel de numerotare este, de exemplu, orice numerotare normală. Pe de altă parte, atunci (17) rezultă din formula (16).

Înainte de a merge mai departe observăm că pot exista numerotări, diferite de o numerotare normală, pentru care condiţiile (15) sînt verificate. Astfel dacă luăm $p = 3$, $k_1 = 3$, $k_2 = k_3 = 2$ (deci $m = 7$), $n = 3$, permutările $(P) : z_1, z_1, z_2, z_2, z_1, z_3, z_3$; $(P') : z_1, z_2, z_1, z_1, z_2, z_3, z_3$ dau numerotări care verifică condiţiile (15). Aceste două numerotări diferă prin aceea că formula (17) corespunzătoare lui (P) ne conduce la *aceleaşi* diferenţe divizate ca şi permutarea $(P^*) : z_1, z_1, z_1, z_2, z_2, z_3, z_3$, care corespunde unei numerotări normale, însă formula (17) corespunzătoare lui (P') ne conduce la diferenţe divizate care *nu sînt aceleaşi* (în totalitatea lor). Se poate spune că numerotarea corespunzătoare permutării (P) este, într-un anumit fel, *reductibilă* la o numerotare normală însă nu este astfel pentru permutarea (P'). Noţiunea de „reductibilitate'' care intervine aici este clară fără nici o altă explicaţie.

Să revenim acum la demonstrarea lemei 3 şi să arătăm că condiţia acestei leme este şi suficientă. Într-adevăr, orice diferenţă divizată de ordinul $n+1$ este de grad de exactitate n, deci se anulează pe orice polinom de gradul n. Este clar că aceeaşi proprietate este adevărată şi pentru orice combinaţie liniară de astfel de diferenţe divizate.

Suficienţa ultimei condiţii a lemei rezultă din formula

$$A[x^{n+1}] = \sum_{i=1}^{m-n-1} \mu_i .$$

Condiţia $n \geqq \max(k_1, k_2, \ldots, k_p) - 2$ a lemei este esenţială. Dacă această condiţie nu este satisfăcută se poate să nu existe o relaţie de forma (17). Acest lucru rezultă din faptul că dacă nodurile unei funcţionale liniare de forma (17) sînt reduse la sistemul lor în număr minim, printre aceste noduri nu există nici unul care să aibă un ordin de multiplicitate $> n + 2$. Dacă $n < \max(k_1, k_2, \ldots, k_p) - 2$, nu există nici o numerotare care să verifice proprietatea (15).

II.

7. Vom reaminti noţiunea de funcţională liniară de forma simplă. Funcţionala liniară $A[f]$, definită pe spaţiul S, se zice *de forma simplă*, dacă există un număr întreg $n \geqq -1$ astfel ca pentru orice $f \in S$ să avem

$$A[f] = K\, [\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+2} ; f], \tag{18}$$

unde K este un coeficient diferit de zero şi independent de funcţia f iar $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+2}$ sînt $n+2$ puncte distincte ale intervalului I care, în general, pot depinde de funcţia f. Dacă $n \geqq 0$ punctele ξ_i pot fi alese în interiorul intervalului I. Acest lucru rezultă din proprietăţile de medie ale diferenţelor divizate [6]. În cazul considerat, deci cînd $A[f]$ este de forma (18) indicată, gradul său de exactitate este egal cu n. Rezultă că dacă o funcţională liniară este de forma simplă, ea este de această formă pentru o singură valoare a lui n. Există o importantă proprietate care caracterizează funcţionalele de formă simplă [4] şi care se poate enunţa sub forma

LEMA 4. *Pentru ca funcţionala liniară $A[f]$ să fie de forma simplă, este necesar şi suficient ca să existe un număr întreg $n \geqq -1$ astfel ca să avem $A[f] \neq 0$ pentru orice $f \in S$, convex de ordinul n.*

Proprietatea de a fi de forma simplă este deci foarte intim legată de noţiunea de funcţie convexă de ordin superior.

O funcţie, definită pe I, se zice *convexă de ordinul n* dacă toate diferenţele sale divizate de ordinul $n+1$ pe $n+2$ noduri distincte (aparţinînd lui I) sînt pozitive. Funcţia se zice *neconcavă de ordinul n* (pe I) dacă toate diferenţele sale divizate de ordinul $n+1$ pe puncte distincte (sau nu) sînt nenegative. O funcţie convexă de ordinul n este o funcţie neconcavă de ordinul n particulară.

Numărul n din lema 4 este acela care figurează în formula (18) corespunzătoare. Coeficientul K din această formulă este egal cu $A[x^{n+1}]$, sau cu $A[f]$, unde f este un polinom de gradul $n+1$ cu cel mai înalt coeficient egal cu 1.

Dacă funcţionala liniară $A[f]$ este de forma simplă şi dacă f are o derivată de ordinul $n+1$ (pentru $n \geqq 0$) pe interiorul intervalului I, avem

$$A[f] = \frac{K}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \tag{19}$$

unde K este un coeficient independent de funcţia f (de altfel egal cu acela care figurează în formula (18)) iar ξ este un punct al lui I, chiar din interiorul lui I dacă $n \geqq 0$, şi care depinde, în general, de funcţia f.

Regăsim un caz clasic bine cunoscut dacă $A[f]$ este restul formulei lui Taylor. Atunci (19) este forma clasică a restului dat de Lagrange.

8. Vom reaminti cîteva proprietăţi ale funcţiilor convexe de ordin superior. Orice funcţie neconcavă de ordinul $n > 0$ pe I este continuă pe interiorul lui I şi dacă $n > 1$ ea are o derivată de ordinul $n-1$ continuă pe interiorul lui I. Dacă derivata de ordinul $n+1$, $f^{(n+1)}(x)$, există, condiţia $f^{(n+1)}(x) \geqq 0$ pe I este necesară şi suficientă pentru ca funcţia să fie neconcavă de ordinul n pe I. Aceeaşi condiţie este numai necesară, iar condiţia $f^{(n+1)}(x) > 0$ este numai suficientă pentru ca funcţia f să fie convexă de ordinul n pe I. Dacă $f^{(n+1)}(x) \geqq 0$ pe I şi dacă nu există nici un subinterval nenul al lui I pe care $f^{(n+1)}(x)$ să fie nul, f este o funcţie convexă de ordinul n pe I. În particular avem

LEMA 5. *Pentru ca un polinom f de gradul efectiv $> n$ să fie convex de ordinul n pe I, este necesar şi suficient ca să avem $f^{(n+1)}(x) \geqq 0$ pe I.*

Condiţia este suficientă. Într-adevăr, derivata de ordinul $n+1$ a unui polinom de gradul efectiv $> n$ nu este identic nulă, deci nu se poate anula decît pe un număr finit ($\geqq 0$) de puncte. Această derivată nu se poate deci anula identic pe nici un subinterval de lungime pozitivă a lui I.

Necesitatea condiţiei rezultă din cele spuse mai sus.

Un polinom de gradul efectiv n este un polinom de gradul n, care nu se reduce (pe un interval de lungime pozitivă) la un polinom de gradul $n-1$.

Convexitatea de ordinul -1 este echivalentă cu pozitivitatea, iar neconcavitatea de ordinul -1 cu nenegativitatea funcţiei. Convexitatea de ordinul 0 este echivalentă cu creşterea iar neconcavitatea de ordinul 0 cu nedescreşterea funcţiei.

9. O funcţie convexă de ordinul n se bucură de proprietatea că orice diferenţă divizată de ordinul $n+1$ a sa pe $n+2$ noduri *nu toate confundate*, este pozitivă. Se presupune, bineînţeles, că această diferenţă divizată există în sensul de la nr. **1**, deci că funcţia are efectiv derivatele care intervin în expresia de forma (1) a diferenţei divizate.

Fie o funcţională liniară de forma (17). Ţinînd seamă de lema 4, rezultă că dacă toţi coeficienţii μ_i, $i = 1, 2, \ldots, m-n-1$ sînt $\geqq 0$, sau toţi sînt $\leqq 0$, şi dacă există cel puţin un coeficient μ_i diferit de zero pentru care nodurile $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n+1}$ ale diferenţei divizate corespunzătoare să nu fie toate confundate, atunci funcţionala liniară (17) este de grad de exactitate n şi este de formă simplă.

Condiţia ca coeficienţii μ_i să fie de acelaşi semn nu este, în general, necesară pentru ca funcţionala liniară (17) să aibă gradul de exactitate n şi să fie de formă simplă.

Să presupunem acum că $x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_m$ şi că ordinele de multiplicitate ale nodurilor distincte sînt $\leqq n+2$. Pe baza unor rezultate deja obţinute [5], rezultă că pentru $n = -1$, 0 sau 1, condiţia ca toţi coeficienţii μ_i ai funcţionalei liniare (17) să fie de acelaşi semn şi ca să existe cel puţin un indice i pentru care $\mu_i \neq 0$ iar nodurile $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n+1}$ să nu fie toate confundate, este *necesară* şi suficientă pentru ca funcţionala liniară considerată să fie de gradul de exactitate n şi de formă simplă. Bineînţeles că pentru $n = -1$ ultima condiţie, ca nodurile $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n+1}$ să nu fie toate confundate, nu se pune. Vom relua aici demonstraţia pe care am dat-o, cu oarecari mici modificări neesenţiale, în lucrarea citată [5].

Pe baza celor spuse este destul să arătăm că dacă funcţionala liniară (17) este de gradul de exactitate n (pentru $n = -1$, 0 sau 1) şi este de forma simplă, nici unul dintre coeficienţii μ_i nu poate fi diferit de zero şi, în acelaşi timp, de semn contrar cu numărul $A[x^{n+1}] = \sum_{i=1}^{m-n-1} \mu_i$ (care este în mod necesar $\neq 0$). Presupunînd deci că $\sum_{i=1}^{m-n-1} \mu_i \neq 0$, proprietatea este echivalentă cu faptul că inegalităţile $\left(\sum_{\nu=1}^{m-n-1} \mu_\nu\right) \mu_i \geqq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m-n-1$

sînt verificate. În demonstrație ținem seamă de faptul că dacă f este o funcție neconcavă de ordinul n, $A[f]$ este în mod necesar de semn neschimbat (este tot timpul $\geqq 0$, sau tot timpul $\leqq 0$). Mai precis de faptul că, pe lîngă ipoteza $\sum_{i=1}^{m-n-1} \mu_i \neq 0$, avem $\left(\sum_{\nu=1}^{m-n-1} \mu_\nu\right) A[f] \geqq 0$, pentru orice funcție f neconcavă de ordinul n.

10. Pentru demonstrație vom distinge cele trei cazuri, după valorile -1, 0, 1 ale lui n.

Cazul 1. $n = -1$. Putem presupune $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$ și funcționala liniară (17) se reduce la $A[f] = \sum_{i=1}^{m} \mu_i f(x_i)$. Dacă $0 < \varepsilon < \min\limits_{i=1,2,\ldots,m-1} (x_{i+1} - x_i)$, funcția continuă

$$f_i(x) = \frac{1}{2\varepsilon}\left(|x - x_i + \varepsilon| + |x - x_i - \varepsilon| - 2\,|x - x_i|\right)$$

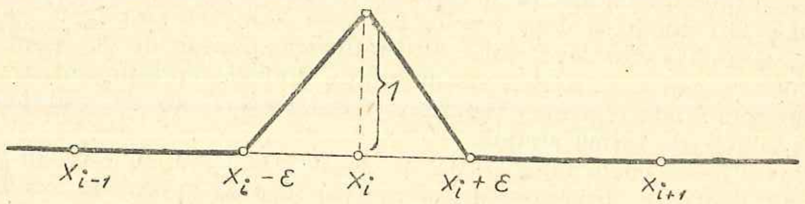

Fig. 1

este negativă, se reduce la 1 pe x_i și la 0 pe celelalte noduri. Avem deci $A[f_i] = \mu_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ și rezultă că $\left(\sum_{\nu=1}^{m} \mu_\nu\right) \mu_i \geqq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, ceea ce demonstrează proprietatea.

Cazul 2. $n = 0$. Putem presupune, fără a restrînge generalitatea, că toate nodurile sînt duble. Să presupunem deci că m este par și că $x_{2i-1} = x_{2i}$, $i = 1, 2, \ldots, \frac{m}{2}$, $x_1 < x_3 < \ldots < x_{m-1}$. Funcționala liniară (17) se reduce la $A[f] = \sum_{i=1}^{m-1} \mu_i\, [x_i, x_{i+1}; f]$. Cazul cînd unele sau toate nodurile sînt simple este cuprins aici ca un caz particular. Dacă, de exemplu, în loc de nodul dublu $x_{2i-1} = x_{2i}$, avem un nod simplu care coincide cu acest punct, este suficient să luăm $\mu_{2i-1} = 0$ în formula precedentă. Atunci derivata funcției f pe acest punct dispare în expresia lui $A[f_i]$

Trebuie acum să distingem două subcazuri, după paritatea indicelui i a coeficientului μ_i.

1°. Fie i par. Atunci numerele x_i, x_{i+1}, sînt distincte ($x_i < x_{i+1}$) și funcția continuă

$$f_i(x) = \frac{1}{2}\left(x_{i+1} - x_i + |3x - 2x_i - x_{i+1}| - |3x - x_i - 2x_{i+1}|\right)$$
$$i = 2, 4, \ldots, m-2,$$

este nedescrescătoare. Avem $A[f_i] = \mu_i$ și deci

$$\left(\sum_{\nu=1}^{m-1} \mu_\nu\right) \mu_i \geqq 0, \tag{20}$$

pentru $i = 2, 4, \ldots, m-2$.

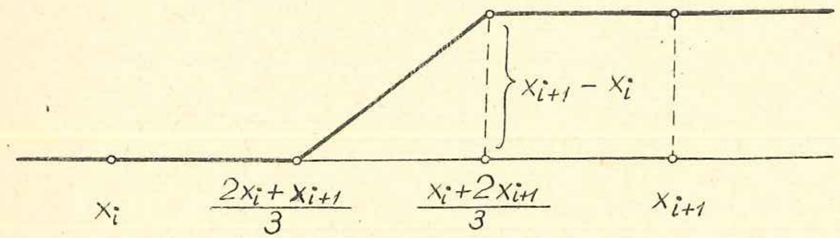

Fig. 2

2°. Fie i impar. Atunci $x_{i-1} < x_i = x_{i+1} < x_{i+2}$. Dacă $0 < \varepsilon < \min(x_i - x_{i-1}, x_{i+2} - x_{i+1})$, funcția continuă

$$f_i(x) = \frac{1}{2}\left(2\varepsilon + |x - x_i + \varepsilon| - |x - x_i - \varepsilon|\right)$$
$$i = 1, 3, \ldots, m-1$$

este nedescrescătoare și avem $A[f_i] = \varepsilon\left(\frac{\mu_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + \frac{\mu_{i+1}}{x_{i+2} - x_{i+1}}\right) + \mu_i$.

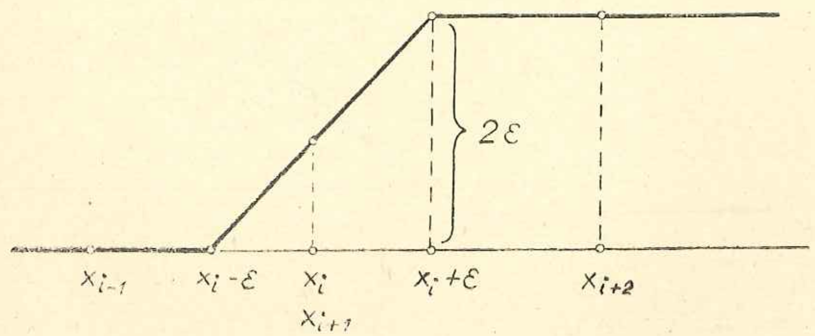

Fig. 3

Dacă $\mu_i \neq 0$, pentru ε suficient de mic, $A[f_i]$ este de asemenea $\neq 0$ şi de acelaşi semn cu μ_i. Se deduce că inegalitatea (20) este adevărată şi pentru $i = 1, 3, \ldots, m-1$.

Inegalitatea (20) este deci adevărată pentru $i=1, 2, \ldots, m-1$ şi proprietatea este demonstrată.

Cazul 3. $n = 1$. Putem presupune, fără a restrînge generalitatea, că toate nodurile sînt triple. Fie deci m un multiplu de 3 şi fie $x_{3i-2} = x_{3i-1} = x_{3i}$, $i = 1, 2, \ldots, \frac{m}{3}$, $x_1 < x_4 < x_7 < \ldots < x_{m-2}$. Funcţionala liniară (17) se reduce la $A[f] = \sum\limits_{i=1}^{m-2} \mu_i [x_i, x_{i+1}, x_{i+2}; f]$. Cazurile în care unele sau toate nodurile sînt duble sau simple sînt cuprinse în precedentul ca şi cazuri particulare. Dacă, de ex., în loc de nodul triplu $x_{3i-2} = x_{3i-1} = x_{3i}$ avem un nod dublu care coincide cu acest punct, este destul să luăm $\mu_{3i-2} = 0$ în formula precedentă. Atunci derivata a doua a funcţiei f pe acest punct dispare în expresia lui $A[f]$. Dacă în loc de un nod dublu avem un nod simplu în acest punct, este destul să luăm $\mu_{3i-2} = 0$ iar pe μ_{3i-1}, μ_{3i-3} astfel ca să avem $(x_{3i+1} - x_{3i})\mu_{3i-3} = (x_{3i-2} - x_{3i-3})\mu_{3i-1}$. Atunci în expresia lui $A[f]$ dispare şi derivata întîia a lui f pe acest punct.

Şi aici vom distinge două subcazuri, după valorile indicelui i faţă de divizorul 3.

1°. Să considerăm perechea de coeficienţi μ_i, μ_{i+1} unde $i+1$ este un multiplu de 3. Avem $x_{i+1} < x_{i+2}$ şi funcţia continuă

$$f_i(x) = (x_{i+2} - x_{i+1}) \frac{x - \lambda + |x - \lambda|}{2},$$

$$i = 2, 5, 8, \ldots, m-4,$$

unde $x_{i+1} < \lambda < x_{i+2}$, este neconcavă de ordinul 1. Avem

$$A[f_i] = \frac{\mu_i(x_{i+2} - \lambda) + \mu_{i+1}(\lambda - x_{i+1})}{x_{i+2} - x_{i+1}}.$$

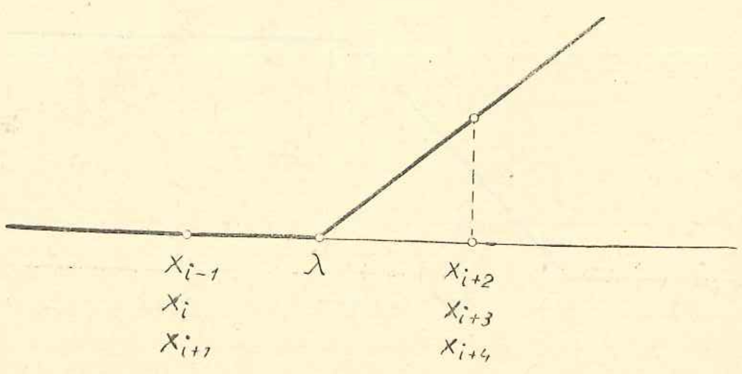

Fig. 4

Se vede că dacă $\mu_i \neq 0$ şi $\lambda \in (x_{i+1}, x_{i+2})$ este suficient de aproape de x_{i+1}, $A[f_i]$ este $\neq 0$ şi are acelaşi semn cu μ_i iar dacă $\mu_{i+1} \neq 0$ şi $\lambda \in (x_{i+1}, x_{i+2})$ este suficient de aproape de x_{i+2}, $A[f_i]$ este $\neq 0$ şi de acelaşi semn cu μ_{i+1}. Rezultă că

$$\left(\sum_{\nu=1}^{m-2} \mu_\nu\right) \mu_i \geqq 0, \qquad (21)$$

pentru $i = 2, 3, 5, 6, 8, 9, \ldots, m-4, m-3$.

2°. Să presupunem acum că i este congruent cu 1 modulo 3. Atunci $x_i = x_{i+1} = x_{i+2}$. Dacă $0 < \varepsilon < \min(x_i - x_{i-1}, x_{i+3} - x_{i+2})$, funcţia continuă

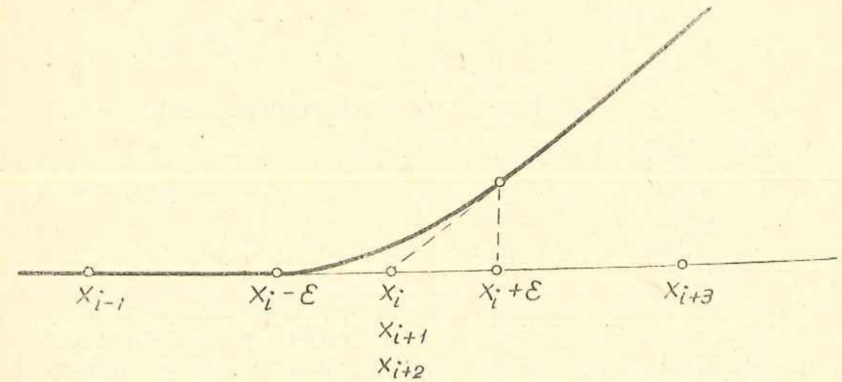

Fig. 5

$$f_i(x) = \frac{1}{2}\Big\{4\varepsilon(x - x_i) + (x - x_i + \varepsilon)\,|x - x_i + \varepsilon| - (x - x_i - \varepsilon)\,|x - x_i - \varepsilon|\Big\}$$

$$i = 1, 4, 7, \ldots, m-2$$

este neconcavă de ordinul 1 şi avem

$$A[f_i] = \varepsilon^2 \left(\frac{\mu_{i-2} - \mu_{i-1}}{(x_i - x_{i-1})^2} + \frac{\mu_{i+2} - \mu_{i+1}}{(x_{i+3} - x_{i+2})^2}\right) + 2\varepsilon \left(\frac{\mu_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + \frac{\mu_{i+1}}{x_{i+3} - x_{i+2}}\right) + \mu_i$$

Dacă $\mu_i \neq 0$, pentru ε suficient de mic, $A[f_i]$ este $\neq 0$ şi este de acelaşi semn cu μ_i. Rezultă că inegalitatea (21) este adevărată şi pentru $i = 1, 4, 7, \ldots, m-2$. Inegalitatea (21) este deci adevărată pentru $i = 1, 2, \ldots, m-2$ şi proprietatea este demonstrată.

11. Proprietatea pe care am demonstrat-o pentru $n = -1$, 0 şi 1 nu mai este adevărată pentru $n > 1$. Pentru a arăta acest lucru este destul să demonstrăm că dacă $n > 1$, $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+4}$ şi dacă μ', μ'' sînt două numere pozitive destul de mari (în orice caz $\mu' + \mu'' > 1$), funcţionala liniară

$$\mu'[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f] - [x_2, x_3, \ldots, x_{n+3}; f] + \mu''[x_3, x_4, \ldots, x_{n+4}; f] \qquad (22)$$

este (de grad de exactitate n şi) de forma simplă. Într-adevăr, să introducem printre nodurile x_i încă $n+3$ noduri, formînd astfel şirul de noduri $x'_1 < x'_2 < \ldots < x'_{2n+7}$, $x'_{2i-1} = x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n+4$. Din formulele de medii ale diferenţelor divizate [3] rezultă că

$$[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f] = \sum_{i=1}^{n+2} \alpha_i [x'_i, x'_{i+1}, \ldots, x'_{i+n+1}; f]$$

$$[x_2, x_3, \ldots, x_{n+3}; f] = \sum_{i=3}^{n+4} \beta_i [x'_i, x'_{i+1}, \ldots, x'_{i+n+1}; f]$$

$$[x_3, x_4, \ldots, x_{n+4}; f] = \sum_{i=5}^{n+6} \gamma_i [x'_i, x'_{i+1}, \ldots, x'_{i+n+1}; f],$$

unde α_i, β_i, γ_i sînt coeficienţi pozitivi, independenţi de funcţia f (şi $\sum_{i=1}^{n+2}\alpha_i = \sum_{i=3}^{n+4}\beta_i = \sum_{i=5}^{n+6}\gamma_i = 1$). Funcţionala liniară (22) se poate scrie sub forma

$$\sum_{i=1}^{n+6} (\mu'\alpha_i + \mu''\gamma_i - \beta_i)\,[x'_i, x'_{i+1}, \ldots, x'_{i+n+1}; f],$$

unde $\alpha_{n+3} = \alpha_{n+4} = \alpha_{n+5} = \alpha_{n+6} = \beta_1 = \beta_2 = \beta_{n+5} = \beta_{n+6} = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 0$. Proprietatea pe care o avem în vedere rezultă din faptul că nu există nici un indice i pentru care coeficienţii α_i, β_i să fie nuli în acelaşi timp (se vede uşor că acest lucru nu este adevărat pentru $n = 0$ sau pentru $n = 1$).

În fine să ne reamintim că pentru ca o funcţională liniară de forma (1) să aibă gradul de exactitate n şi să fie de forma simplă, este necesar ca ordinele de multiplicitate $k_1, k_2, \ldots, k_p$ ale nodurilor, presupuse reduse la numărul lor minim, să fie toate $\leqq n+2$ [5].

III.

12. Ne vom ocupa de restul unor formule de aproximare ale funcţionalei liniare $A[f]$. Aceste formule pot fi considerate ca nişte generalizări ale formulei de interpolare a lui Lagrange, care are ca un caz particular formula lui Taylor.

Fie $A[f]$ o funcţională liniară definită pe spaţiul S, aşa cum s-a explicat la nr. **1**. Vom considera un şir finit sau infinit de puncte

$$y_0, y_1, \ldots \tag{23}$$

distincte sau nu. Vom considera o secţiune

$$y_0, y_1, \ldots, y_s \tag{24}$$

a acestui şir şi polinomul lui Lagrange-Hermite $L(y_0, y_1, \ldots, y_s; f|x)$ pe aceste puncte şi relativ la funcţia f. Pentru orice $x \in I$ acest polinom este o

funcţională liniară de forma (1). Mai precis, polinomul se poate pune sub forma (1), unde $a_{i,j}$ sînt polinoame independente de funcţia f, numărul total al nodurilor, distincte sau nu, fiind egal cu $s+1$. Trebuie să observăm că există valori ale lui x (în număr finit) pentru care numărul minim de noduri este mai mic decît $s+1$.

Avem formula de aproximare

$$A[f] = A[L(y_0, y_1, \ldots, y_s; f|x)] + R_s[f], \tag{25}$$

unde $R_s[f]$ este restul acestei formule.

Formula (11) ne dă

$$A[f] = \sum_{\nu=0}^{s} c^{\nu}[y_0, y_1, \ldots, y_\nu; f] + R^s[f], \tag{26}$$

unde

$$c_\nu = A\left[\prod_{i=0}^{\nu-1}(x - y_i)\right], \ \nu = 0, 1, \ldots, s. \tag{27}$$

Formula (25) este complet caracterizată prin faptul că ea este de forma (16), cu un rest $R_s[f]$ funcţională liniară de grad de exactitate cel puţin egal cu s. Într-adevăr, pentru orice polinom f de gradul s, polinomul $L(y_0, y_1, \ldots, y_s; f|x)$ se reduce la f, deci $R_s[f]$ este nul. Atunci coeficienţii c_ν, daţi de formula (26) sînt bine determinaţi şi, pentru un ν dat, c_ν este independent de s.

Presupunem, bineînţeles, că condiţiile de existenţă, date la nr. **1**, sînt verificate pentru funcţionala liniară $R_s[f]$. Astfel, punctele (24), sau punctele (23) dacă ele intervin toate, aparţin intervalului I. Diferenţele divizate $[y_0, y_1, \ldots, y_\nu; f]$, $\nu = 0, 1, \ldots, s$, există în sensul explicat la nr. **4** etc.

Este clar că dacă restul $R_s[f]$ este definit, toate resturile $R_0[f]$, $R_1[f], \ldots, R_{s-1}[f]$ sînt de asemenea funcţionale liniare definite pe S.

În cele ce urmează vom studia cîteva cazuri cînd restul $R_s[f]$ al formulei de aproximare (25) este de forma simplă.

13. Să considerăm o funcţională liniară $A[f]$ de forma (1). Afară numai dacă nu se specifică în mod expres contrarul, ne vom ocupa numai de funcţionale liniare de această formă. Restul $R_s[f]$ al formulei (25) este atunci de aceeaşi formă. Ordinele de multiplicitate ale nodurilor pot fi luate toate $\leqq \max(k_1, k_2, \ldots, k_p, s+1)$, deci dacă $s+2 \geqq \max(k_1, k_2, \ldots, k_p)$, se poate aplica lema 3 şi funcţionala liniară $R_s[f]$ este o combinaţie liniară de diferenţe divizate de ordinul $s+1$. Pentru a pune efectiv pe $R_s[f]$ sub forma (17) este întîi destul a realiza o numerotare convenabilă a nodurilor astfel încît condiţia (15) corespunzătoare să fie verificată.

Pentru a merge mai departe, vom distinge cazurile cînd şirul (24) şi şirul nodurilor $z_1, z_2, \ldots, z_p$ ale funcţionalei liniare $A[f]$ au, sau nu au termeni comuni. În cele ce urmează vom studia numai cazul cînd coincidenţa are loc *cel mult pentru unul singur dintre nodurile* z_i. Fie z_1 nodul cu care poate coincide un termen al şirului (24) şi al cărui ordin de multiplicitate este k_1. Să presupunem că $x_1, x_2, \dots, x_m$ este o numerotare normală a nodurilor lui $A[f]$, astfel ca $x_1 = x_2 = \dots = x_{k_1} = z_1$. Atunci (dacă $p > 1$) nici unul din termenii șirului (24) nu coincide cu unul din punctele $x_{k_1+1}, x_{k_1+2}, \dots, x_m$.

Fie k $(0 \leqq k \leqq k_1)$ cel mai mic dintre numerele k_1 și numărul termenilor egali cu z_1 ai șirului (24). Egalitatea $k = 0$ înseamnă că nici unul din termenii șirului (24) nu coincide cu unul dintre nodurile z_i. Dacă $k > 0$, șirul (24) conține cel puțin k termeni care coincid cu z_1. Să notăm cu s' cel mai mic indice astfel ca șirul $y_0, y_1, \dots, y_{s'-1}$ (avînd s' termeni) să conțină cel puțin k termeni egali cu z_1. Avem $s' \geqq k$ și dacă $k = 0$ vom lua $s' = 0$.

Nodurile funcționalei liniare $R_s[f]$ se pot scrie în șirul $y_s, y_{s-1}, \dots, y_0, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_m$. Numărul lor este $s + 1 + m - k$, dar ele nu reprezintă, în mod necesar, nodurile reduse la numărul lor minim. Numerotarea corespunzătoare acestui șir verifică condiția (15) (cu $n = s$) dacă $s \geqq s' + m - k - 1$ $(\geqq m - 1)$. Rezultă că dacă $m \leqq k$ funcționala liniară $R_s[f]$ este nulă identic[2]). Însă inegalitatea $m \leqq k$ are loc dacă și numai dacă toate nodurile x_i sînt confundate cu același punct z_1 și șirul (24) conține cel puțin m termeni egali cu z_1.

În cazul contrar, deci dacă $p > 1$ sau dacă $p = 1$, $k < k_1$ (în ambele cazuri avem $m > k$), avem formula

$$R_s[f] = \sum_{i=k+1}^{m} \mu_i^{(s)} [y_0, y_1, \dots, y_{s+1+k-i}, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_i; f], \tag{28}$$

unde coeficienții $\mu_i^{(s)}$ sînt independenți de funcția f.

Putem calcula coeficientul $\mu_m^{(s)}$ în felul următor. Fie $x_m = z_\mu$. Atunci, ținînd cont de formula (1), coeficientul lui $f^{(k_\mu - 1)}(z_\mu)$ în membrul întîi al lui (28) este egal cu $a_{\mu, k_\mu - 1}$ și același coeficient în membrul al doilea este egal cu $\mu_m^{(s)}$ înmulțit cu

$$\frac{1}{(k_\mu - 1)!} \cdot \frac{1}{P(z_\mu) \prod\limits_{\nu=k+1}^{m-k_\mu} (z_\mu - x_\nu)}, \text{ dacă } p > 1 \text{ (atunci } \mu \neq 1)$$

$$\frac{1}{(k_1 - 1)!} \cdot \frac{k!}{P^{(k)}(z_1)}, \text{ dacă } p = 1,\ k < k_1,$$

unde $P(x) = (x - y_0)(x - y_1) \dots (x - y_{s+1+k-m})$.

Rezultă că

$$\mu_m^{(s)} = \begin{cases} (k_\mu - 1)!\, P(z_\mu) \prod\limits_{\nu=k+1}^{m-k_\mu} (z_\mu - x_\nu) a_{\mu, k_\mu - 1} & \text{dacă } p > 1 \\ \dfrac{(k_1 - 1)!}{k!} P^{(k)}(z_1) a_{1, k_1 - 1} & \text{dacă } p = 1,\ k < k_1. \end{cases}$$

---

[2]) Proprietatea poate să nu aibă loc dacă $s < s' + m - k - 1$.

Presupunînd deci că condiția (2) *este verificată, avem* $\mu_m^{(s)} \neq 0$.

Rezultă că dacă ipotezele precedente sînt verificate și *dacă coeficienții* $\mu_i^{(s)}$, $i = k + 1, k + 2, \dots, m$ *sînt toți de același semn, restul* $R_s[f]$ *este de grad de exactitate s și este de forma simplă.* Coeficientul K din formula (18) corespunzătoare este egal cu $R_s[x^{s+1}] = A[(x - y_0)(x - y_1) \dots (x - y_s)]$.

În cele ce urmează vom presupune, afară numai dacă nu se specifică contrarul, că pentru funcționala liniară $A[f]$ condiția (2) este verificată.

14. Se obține un interesant caz particular luînd pentru $A[f]$ diferența divizată (4). Pentru a enunța proprietatea respectivă, punem $a' = \min(z_1, z_2, \dots, z_p)$, $b' = \max(z_1, z_2, \dots, z_p)$. Astfel $[a', b'] \subseteq I$ este cel mai mic interval închis care conține nodurile funcționalei $A[f]$. Avem atunci

TEOREMA 1. *Dacă pe lîngă notațiile și pe lîngă ipotezele precedente:* 1°. *punctele* (24) *sînt sau toate* $\leqq a'$, *sau toate* $\geqq b'$, 2°. *avem* $p > 1$ *sau* $p = 1$ *și* $k < k_1$, 3°. *avem* $s' = k$, $s \geqq m - 1$, *restul* $R_s[f]$ *al formulei de aproximare*

$$[x_1, x_2, \dots, x_m; f] =$$
$$= \sum_{\nu=0}^{s} \left[x_1, x_2, \dots, x_m; \prod_{i=0}^{\nu-1} (x - y_i) \right] [y_0, y_1, \dots, y_\nu; f] + R_s[f] \tag{29}$$

are gradul de exactitate s și este de formă simplă.

Pentru demonstrare va fi suficient să se verifice că coeficienții $\mu_i^{(s)}$ ai formulei (28) corespunzătoare sînt toți de același semn. Vom calcula acești coeficienți.

Vom calcula mai general coeficienții $\mu_i^{(s)}$ ai formulei (28) pentru o funcțională liniară $A[f]$ de forma (1), presupunînd că condițiile 2° și 3° ale teoremei 1 sînt verificate. Pentru a face calculul, observăm că avem

$$A[f(x)(x - z_1)^k] =$$
$$= \sum_{i=k+1}^{m} \mu_i^{(s)} \left[x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_i; \frac{f(x)}{(x - y_k)(x - y_{k+1}) \dots (x - y_{s+1+k-i})} \right]. \tag{30}$$

Dacă aici $k = 0$, $A[f(x)(x - z_1)^k]$ se reduce la $A[f]$.

Dacă $k < k_1$ această formulă rezultă, aplicînd formulele (7), (8), prin identificarea acelor părți ale expresiei lui $R_s[f]$, scoase din (26) și din (28), care conțin numai termenii corespunzători nodului z_1. Dacă $k = k_1$ formula rezultă în același fel, identificînd termenii care provin din nodurile $z_2, z_3, \dots, z_p$.

Să luăm acum ca funcție f polinomul
$(x_i - y_{s+1+k-i})(x - y_k)(x - y_{k+1}) \dots (x - y_{s+k-i})(x - x_{k+1})(x - x_{k+2}) \dots (x - x_{i-1})$, unde $(x - x_{k+1})(x - x_{k+2}) \dots (x - x_{i-1})$ este înlocuit cu 1 pentru $i = k + 1$ și $(x - y_k)(x - y_{k+1}) \dots (x - y_{s+k-m})$ cu 1 pentru $s = m - 1$. Atunci membrul al doilea al formulei (30) se reduce la $\mu_i^{(s)}$ și obținem

$$\mu_i^{(s)} = (x_i - y_{s+1+k-i})\, A \left[\prod_{\nu=1}^{i-1} (x - x_\nu) \prod_{\nu=k}^{s+k-i} (x - y_\nu) \right], \tag{31}$$

$$i = k + 1, k + 2, \dots, m.$$

În cazul teoremei 1 avem $A[f] = [x_1, x_2, \ldots, x_m; f]$ şi ţinînd seamă de formula (8), avem

$$\mu_i^{(s)} = (x_i - y_{s+1+k-i}) \cdot \left[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_m; \prod_{\nu=k}^{s+k-i} (x - y_\nu)\right], \quad (32)$$
$$i = k+1, k+2, \ldots, m.$$

Dar polinomul $(x - y_k)(x - y_{k+1}) \ldots (x - y_{s+k-i})$ are o derivată de ordinul $m - i$, negativă pe intervalul (a', b') dacă punctele (24) sînt la dreapta lui b' şi dacă $s - m + 1$ este impar. În celelalte cazuri compatibile cu teorema 1, această derivată este pozitivă pe (a', b'). Rezultă că coeficienţii $\mu_i^{(s)}$ sînt pozitivi dacă punctele (24) sînt sau la stînga lui a' sau la dreapta lui b' cu $s - m + 1$ impar şi sînt negativi dacă punctele (24) sînt la dreapta lui b' cu $s - m + 1$ par. S-a presupus $a' < b'$. Dacă $a' = b'$ sîntem în cazul $p = 1$, $k < k_1$ şi se vede uşor că proprietatea este încă adevărată.

Teorema 1 este deci demonstrată.

În cazul teoremei 1, în formulele (27) avem $c_0 = c_1 = \ldots = c_{m-2} = 0$, deci dacă $s < m - 1$ avem $R_s[f] = [x_1, x_2, \ldots, x_m; f]$.

Teorema 1 generalizează nişte proprietăţi date de H. D. Kloostermann [1]. Se obţin aceste proprietăţi pentru

$$x_i = x + (i-1)h, \ i = 1, 2, \ldots, m \ (h \neq 0); \ y_i = x, \ i = 0, 1, \ldots, s$$
$$x_i = x, \ i = 1, 2, \ldots, m; \ y_i = x + ih, \ i = 0, 1, \ldots, n \ (h \neq 0),$$

respectiv şi dacă, în plus, presupunem că funcţia f admite o derivată continuă de ordinul $s + 1$ pe interiorul celui mai mic interval care conţine punctele x_i, y_i.

15. Să reluăm formula (28) şi să ţinem seamă de condiţiile sub care această formulă a fost stabilită. Putem atunci să găsim o relaţie simplă între coeficienţii $\mu_i^{(s)}, \mu_i^{(s+1)}$. Avem

$$R_s[f] - c_{s+1}[y_0, y_1, \ldots, y_{s+1}; f] = R_{s+1}[f] =$$
$$= \prod_{i=k+1}^{m} \frac{\mu_i^{(s+1)}}{x_i - y_{s+2+k-i}} \{[y_0, y_1, \ldots, y_{s+1+k-i}, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_i; f] -$$
$$- [y_0, y_1, \ldots, y_{s+2+k-i}, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{i-1}; f]\}$$

unde a doua diferenţă divizată din membrul al doilea se reduce la $[y_0, y_1, \ldots, y_{s+1}; f]$ pentru $i = k + 1$. Formula are sens, deoarece, pe lîngă ipotezele semnalate, avem $x_i \neq y_{s+2+k-i}$, $i = k+1, k+2, \ldots, m$.

Comparînd cu formula (28), deducem

$$\mu_i^{(s+1)} = (x_i - y_{s+2+k-i})(\mu_i^{(s)} + \mu_{i+1}^{(s)} + \ldots + \mu_m^{(s)}) \quad (33)$$
$$i = k+1, k+2, \ldots, m.$$

Aceste formule permit să enunţăm

TEOREMA 2. *Pe lîngă ipotezele sub care s-a stabilit formula (28) şi dacă: 1°. toate punctele (24) sînt $\leqq a'$ sau toate sînt $\geqq b'$, 2°. există o valoare s_0 a lui s pentru care toţi coeficienţii $\mu_i^{(s)}$ sînt de acelaşi semn,*

atunci restul $R_s[f]$ al formulei de aproximare (25) este de gradul de exactitate s şi este de formă simplă pentru $s \geqq s_0$.

Într-adevăr, sub ipotezele teoremei, se vede că dacă coeficienţii $\mu_i^{(s)}$ sînt toţi de acelaşi semn, coeficienţii $\mu_i^{(s+1)}$ sînt de asemenea toţi de acelaşi semn.

16. Se poate pune întrebarea dacă, pentru o funcţională liniară $A[f]$, de exemplu, de forma (1), există totdeauna valori ale lui s pentru care restul $R_s[f]$ să fie de forma simplă? Sau dacă acest rest este de formă simplă pentru un s destul de mare? Vom da un exemplu care ne arată că răspunsul la aceste întrebări este negativ.

Fie $A[f] = f(0) + f'(0)$ şi să luăm punctele $y_\nu = (\nu + 1)(\nu + 2)$, $\nu = 0, 1, \ldots$ În acest caz avem ($s \geqq 0$),

$$R_s[f] = (-1)^s s!(s+1)!\{[0, 0, y_0, y_1, \ldots, y_{s-1}; f] -$$
$$- (s+2)[0, y_0, y_1, \ldots, y_s; f]\}.$$

Ţinînd seamă de rezultatele precedente, $R_s[f]$, care este de gradul de exactitate s, nu este de forma simplă pentru nici o valoare a lui $s \geqq 0$. Pentru $s = 0$ diferenţa divizată $[0, 0, y_0, y_1, \ldots, y_{s-1}; f]$ se înlocuieşte cu $[0, 0; f]$.

17. Exemplul precedent ne arată că nu este fără interes următoarea

TEOREMA 3. *Pe lîngă ipotezele sub care s-a stabilit formula (28) şi dacă toate punctele (23) sînt confundate într-un acelaşi punct care nu aparţine intervalului deschis (a', b'),*

atunci restul $R_s[f]$ este de gradul de exactitate s şi este de forma simplă pentru s destul de mare.

În acest caz avem sau $k = 0$ (dacă punctele (24) sînt în exteriorul intervalului $[a', b']$) sau $k = k_1$ (dacă punctele (24) coincid toate cu a' sau toate cu b'). Va fi destul să dăm demonstraţia pentru $k = 0$.

Fie deci $k = 0$. Formulele (33) devin

$$\mu_i^{(s+1)} = (x_i - y_0)(\mu_i^{(s)} + \mu_{i+1}^{(s)} + \ldots + \mu_m^{(s)}), \ i = 1, 2, \ldots, m. \quad (34)$$

Vom alege acum notaţiile astfel ca şirul $x_1, x_2, \ldots, x_m$ să fie nedescrescător respectiv necrescător, după cum $y_0 < a'$ respectiv $y_0 > b'$. Atunci numerele $x_i - y_0$ sînt diferite de zero, de acelaşi semn şi şirul $|x_1 - y_0|, |x_2 - y_0|, \ldots, |x_m - y_0|$ al valorilor lor absolute este nedescrescător. Din (34) deducem

$$\mu_i^{(s)} = \sum_{j=i}^{m} M_{i,j}^{(s)} \mu_j^{(m-1)}, \ i = 1, 2, \ldots, m, \quad (35)$$

unde matricea triunghiulară $(M_{i,j}^{(s)})$ este puterea a $(s-m+1)$-a a matricei triunghiulare

$$\begin{pmatrix} x_1-y_0 & x_1-y_0 & \dots & x_1-y_0 \\ 0 & x_2-y_0 & \dots & x_2-y_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots 0 & x_m-y_0 \end{pmatrix}.$$

Să notăm cu $W_i(z_1, z_2, \dots, z_r)$ funcția simetrică $\sum z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \dots z_r^{\alpha_r}$, suma fiind extinsă la soluțiile în numere întregi nenegative ale ecuației în α, $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r = i$ $(W_0(z_1, z_2, \dots, z_r) = 1)$. Avem

$$M_{i,j}^{(s)} = (x_i - y_0)\, W_{s-m}(x_i - y_0, x_{i+1} - y_0, \dots, x_j - y_0), \tag{36}$$
$$j = i, i+1, \dots, m,\ i = 1, 2, \dots, m.$$

18. Înainte de a merge mai departe, vom stabili o lemă care prezintă un interes, independent de aplicația pe care i-o dăm aici.

LEMA 6. *Dacă numerele nenegative* $z_1, z_2, \dots, z_{r-1}$ $(r > 1)$ *sînt cuprinse în intervalul* $[0, z_r]$, *avem inegalitatea*

$$\frac{W_i(z_1, z_2, \dots, z_r)}{\binom{r-1+i}{i}} \geqq \frac{W_i(z_1, z_2, \dots, z_{r-1})}{\binom{r-2+i}{i}}, \tag{37}$$

egalitatea fiind adevărată dacă și numai dacă sau $i = 0$, *sau* $i > 0$ *și toate numerele* $z_1, z_2, \dots, z_r$ *sînt egale.*

Proprietatea este evidentă pentru $i = 0$ și pentru $i > 0$ și $z_1 = z_2 = \dots = z_{r-1} = 0$.

Să presupunem că $z_1, z_2, \dots, z_{r-1}$ nu sînt toți nuli. Atunci avem în mod necesar $z_r > 0$. Avem

$$W_i(z_1, z_2, \dots, z_r) = [z_1, z_2, \dots, z_r;\ x^{r-1+i}],$$
$$W_i(z_1, z_2, \dots, z_{r-1}) = [z_1, z_2, \dots, z_{r-1};\ x^{r-2+i}] =$$
$$= [z_1, z_2, \dots, z_r;\ x^{r-2+i}(x - z_r)],$$

de unde

$$\binom{r-1+i}{i}\left[\frac{W_i(z_1, z_2, \dots, z_r)}{\binom{r-1+i}{i}} - \frac{W_i(z_1, z_2, \dots, z_{r-1})}{\binom{r-2+i}{i}}\right] = W_i(z_1, z_2, \dots, z_r) -$$
$$- \frac{r-1+i}{r-1} W_i(z_1, z_2, \dots, z_{r-1}) = \frac{1}{r-1}[z_1, z_2, \dots, z_r;\ x^{r-2+i}\{(r-1+i)z_r - ix\}].$$

Dar derivata de ordinul $r-1$ a polinomului $x^{r-2+i}\{(r-1+i)z_r - ix\}$ este egală cu $\frac{(r-1+i)!}{(i-1)!} x^{i-1}(z_r - x)$, *și este deci pozitivă pe intervalul* $(0, z_r)$.

Rezultă că polinomul considerat este convex de ordinul $r-2$. Inegalitatea (37) rezultă de aici imediat.

Cazul egalității este ușor de studiat.

Lema 6 este deci demonstrată.

Numărul $\binom{r-1+i}{i}$ este tocmai numărul termenilor funcției simetrice $W_i(z_1, z_2, \dots, z_r)$. Inegalitatea (37) se poate scrie și sub forma unei inegalități între două valori medii,

$$\sqrt[i]{\frac{W_i(z_1, z_2, \dots, z_r)}{\binom{r-1+i}{i}}} \geqq \sqrt[i]{\frac{W_i(z_1, z_2, \dots, z_{r-1})}{\binom{r-2+i}{i}}}.$$

Dacă avem $0 < z_1 \leqq z_2 \leqq \dots \leqq z_r$, caz care mai cu seamă ne interesează în demonstrarea teoremei 3, putem deduce o altă inegalitate remarcabilă. În acest caz avem

$$(\nu-1)W_i(z_1, z_2, \dots, z_\nu) - (\nu - 1 + i)W_i(z_1, z_2, \dots, z_{\nu-1}) \geqq 0,\ \nu = 2, 3, \dots, r.$$

și dacă adunăm membru cu membru aceste inegalități, deducem $(r > 1)$,

$$\frac{W_i(z_1, z_2, \dots, z_r)}{\sum_{\nu=1}^{r-1} W_i(z_1, z_2, \dots, z_\nu)} \geqq \frac{i+1}{r-1}. \tag{38}$$

19. Să revenim la demonstrarea teoremei 3. Ținînd seamă de (36) și de (38), deducem

$$\frac{M_{i,m}^{(s)}}{\sum_{j=i}^{m-1} M_{i,j}^{(s)}} \geqq \frac{s-m+1}{m-i} \geqq \frac{s-m+1}{m-1},\ i = 1, 2, \dots, m-1 \tag{39}$$

și dacă mai ținem seamă și de formula (35), obținem

$$\mu_i^{(s)} = \left\{\frac{M_{i,m}^{(s)}}{\sum_{j=i}^{m-1} M_{i,j}^{(s)}}\,\mu_m^{(m-1)} + \frac{\sum_{j=i}^{m-1} \mu_j^{(m-1)} M_{i,j}^{(s)}}{\sum_{j=i}^{m-1} M_{i,j}^{(s)}}\right\} \sum_{j=i}^{m-1} M_{i,j}^{(s)}$$
$$i = 1, 2, \dots, m-1.$$

Observăm acum că : 1°. Sumele $\sum_{j=i}^{m-1} M_{i,j}^{(s)}$, $i = 1, 2, \dots, m-1$ sînt diferite de zero și de același semn.

2°. Cîtul

$$\frac{\sum_{j=i}^{m-1} \mu_j^{(m-1)} M_{i,j}^{(s)}}{\sum_{j=i}^{m-1} M_{i,j}^{(s)}}$$

este o medie aritmetică ponderată a numerelor $\mu_i^{(m-1)}, \mu_{i+1}^{(m-1)}, \ldots, \mu_{m-1}^{(m-1)}$. Aceste numere rămîn cuprinse între două numere fixe independente de s (între $\min\limits_{i=1,2,\ldots,m-1} \mu_i^{(m-1)}$ şi $\max\limits_{i=1,2,\ldots,m-1} \mu_i^{(m-1)}$).

3°. Coeficientul $\mu_m^{(m-1)}$ este diferit de zero, sub ipotezele teoremei 3 (vezi nr. **13**). Din (39) rezultă atunci că, pentru

$$s > (m-1)\left(1 + \max_{i=1,2,\ldots,m-1} \left|\frac{\mu_i^{(m-1)}}{\mu_m^{(m-1)}}\right|\right),$$

toate numerele $\mu_i^{(s)}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ sînt diferite de zero şi de acelaşi semn (semnul lor este acela al lui $[\mathrm{sg}(x_i - y_0)]^{s-m} \cdot \mathrm{sg}\, \mu_m^{(m-1)}$).

Teorema 3 este astfel demonstrată pentru $k = 0$. Pentru $k = k_1$ (în acest caz $p > 1$) demonstraţia se face în mod analog, bazîndu-ne pe formula (35) pentru $k = k_1$.

Teorema 3 este deci demonstrată.

20. Pentru a da un exemplu, fie funcţionala liniară

$$A[f] = f(6) - f(0) - 0{,}28\,[f'(0) + f'(6)] -$$
$$- 1{,}62\,[f'(1) + f'(5)] - 2{,}2 \times f'(3),$$

care este restul în formula de cuadratură a lui Hardy [2]

$$\int_0^6 f(x)dx = 0{,}28\,[f(0) + f(6)] + 1{,}62\,[f(1) + f(5)] + 2{,}2 \times f(3) + R^*[f],$$

aplicată funcţiei $f'(x)$ $(R^*[f'] = A[f])$.

$A[f]$ este de gradul de exactitate 6, dar nu este de forma simplă [7]. Dacă considerăm dezvoltarea tayloriană

$$A[f] = \sum_{\nu=7}^{s} A[x^\nu] \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} + R_s[f],$$

în virtutea teoremei 3, restul $R_s[f]$ este de gradul de exactitate s şi este de forma simplă pentru s destul de mare.

În acest caz avem $p = 5$, $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = 2$, $m = 10$, $k = s' = 2$, $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = x_4 = 1$, $x_5 = x_6 = 3$, $x_7 = x_8 = 5$, $x_9 = x_{10} = 6$, $y_0 = y_1 = \ldots = 0$. Putem aplica formula (31) şi găsim

$$\mu_3^{(s)} = A[x^s], \qquad \mu_7^{(s)} = 5A[x^{s-4}(x-1)^2(x-3)^2],$$
$$\mu_4^{(s)} = A[x^{s-1}(x-1)], \qquad \mu_8^{(s)} = 5A[x^{s-5}(x-1)^2(x-3)^2(x-5)],$$
$$\mu_5^{(s)} = 3A[x^{s-2}(x-1)^2], \qquad \mu_9^{(s)} = 6A[x^{s-6}(x-1)^2(x-3)^2(x-5)^2],$$
$$\mu_6^{(s)} = 3A[x^{s-3}(x-1)^2(x-3)], \qquad \mu_{10}^{(s)} = 6A[x^{s-7}(x-1)^2(x-3)^2(x-5)^2(x-6)].$$

Cu ajutorul acestor formule se pot calcula coeficienţii $\mu_i^{(9)}$, făcînd $s=9$, ţinînd seamă de faptul că $A[f]$ are gradul de exactitate 6 şi calculînd numerele

$$A[x^7] = 64{,}8 \quad A[x^8] = 1\,555{,}2 \quad A[x^9] = 19\,828{,}8.$$

Calculul coeficienţilor $\mu_i^{(s)}$ pentru $s > 9$ se poate face cu ajutorul formulelor de recurenţă (33), care devin aici

$$\mu_3^{(s+1)} = \mu_3^{(s)} + \mu_4^{(s)} + \mu_5^{(s)} + \mu_6^{(s)} + \mu_7^{(s)} + \mu_8^{(s)} + \mu_9^{(s)} + \mu_{10}^{(s)}$$
$$\mu_4^{(s+1)} = \mu_4^{(s)} + \mu_5^{(s)} + \mu_6^{(s)} + \mu_7^{(s)} + \mu_8^{(s)} + \mu_9^{(s)} + \mu_{10}^{(s)}$$
$$\mu_5^{(s+1)} = 3(\mu_5^{(s)} + \mu_6^{(s)} + \mu_7^{(s)} + \mu_8^{(s)} + \mu_9^{(s)} + \mu_{10}^{(s)})$$
$$\mu_6^{(s+1)} = 3(\mu_6^{(s)} + \mu_7^{(s)} + \mu_8^{(s)} + \mu_9^{(s)} + \mu_{10}^{(s)})$$
$$\mu_7^{(s+1)} = 5(\mu_7^{(s)} + \mu_8^{(s)} + \mu_9^{(s)} + \mu_{10}^{(s)})$$
$$\mu_8^{(s+1)} = 5(\mu_8^{(s)} + \mu_9^{(s)} + \mu_{10}^{(s)})$$
$$\mu_9^{(s+1)} = 6(\mu_9^{(s)} + \mu_{10}^{(s)}), \quad \mu_{10}^{(s+1)} = 6\mu_{10}^{(s)}$$
$$s = 9, 10, \ldots$$

Este destul să se facă calculele pînă la valoarea 13 a lui s şi găsim valorile coeficienţilor $\mu_i^{(s)}$ cuprinse în tabloul

i \ s	9	10	11	12	13
3	19 828,8	174 960	1 108 792,8	3 888 777,6	−19 594 483,2
4	18 273,6	155 131,2	933 832,8	2 779 984,8	−23 483 260,8
5	50 349,6	410 572,8	2 336 104,8	5 538 456	−78 789 736,8
6	37 519,2	259 524	1 104 386,4	−1 469 858,4	−95 405 104,8
7	44 064	244 944	543 024	−7 971 696	−151 659 216
8	18 144	24 624	−681 696	−10 686 816	−111 800 736
9	388,8	−79 315,2	−965 779,2	−8 734 003,2	−70 039 987,2
10	−13 608	−81 648	−489 888	−2 939 328	−17 635 968

Se vede că restul este de formă simplă pentru $s \geqq 13$, pe baza teoremei 2.

РАЗДЕЛЕННЫЕ РАЗНОСТИ И ПРОИЗВОДНЫЕ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

1. В этой работе мы изучаем остаточный член $R_s[f]$ формулы приближения (25), где $A[f]$ — линейный функционал, определен на векторном пространстве S, образованном функциями $f=f(x)$, причем эти функции вещественного переменного x — вещественны, определены и *непрерывны* на интервале I с концами a и b $(a < b)$. Пространство S

содержит все многочлены и его элементы обладают всеми свойствами дифференцируемости, необходимыми для того, чтобы рассматриваемые линейные функционалы имели смысль.

$L(y_0, y_1, \ldots, y_s; f \mid x)$ — интерполяционный многочлен Лагранжа-Эрмита, относительный функции f и узлов (24), принадлежащих конечной или бесконечной последовательности различных или совпадающих точек (23); формула (25) вполне характеризована тем, что она — вида (26), где коэффициенты c_ν независимы от функции f и что остаточный член $R^s[f]$ равен нулью на всяком многочлене степени s. Коэффициенты c_ν — вида (27) и мы воспользуемся известным обозначением $[y_0, y_1, \ldots, y_\nu; f]$ для разделенной разности функции f на узлах $y_0, y_1, \ldots, y_\nu$.

Формула (25) является обобщением интерполяционной формулы Лагранжа-Ермита, стало быть, в частности, формулы Тейлора.

2. Мы изучаем несколько случаев в которых остаточный член $R_s[f]$ — степени точности s и *простого вида;* это значит, что его можно написать в виде

$$R_s[f] = K[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{s+2}; f],$$

где K не зависит от функции f а ξ_i — $s+2$ различных точек расположенные внутри интервала I $(s \geqq 0)$ и зависящие, вообще говоря, от функции f.

Мы изучаем в частности эту задачу, для линейного функционала (1), где $p, k_1, k_2, \ldots, k_p$ — заданные натуральные числа, z_i, $i=1, 2, \ldots, p$ — p *различных* точек I, а $a_{i,j}$ — числа не зависящие от функции f. Этот случай важен потому что линейные функционалы этого вида появляются в многочисленных формулах численного дифференцирования и интегрирования.

3. Теоремой 1 мы доказываем, что остаточный член формулы (29) — простого вида если $s \geqq m-1$ и если точки (24) все $\leqq a'$ или все $\geqq b'$, где $[a', b']$ — наименьший замкнутый интервал содержащий все различные или совпадающие узлы $x_1, x_2, \ldots, x_m$ разделенной разности из левой части формулы (29).

Этот результат верный при следующих условиях:

Пусть, вообще, $x_1, x_2, \ldots, x_m$ узлы z_i линейного функционала (1), причем каждый узел считается со своим порядком кратности. Пусть $m = k_1 + k_2 + \ldots + k_p$, точки $x_1, x_2, \ldots, x_m$ образуют неубывающую или невозрастающую последовательность, или, в более общем случае, нормальную перестановку (это понятие пояснено в тексте). Точки $x_1, x_2, \ldots, x_{k_1}$ — узлы совпадающие с z_1 и ни одна из точек $y_0, y_1, \ldots$ не совпадает с одним из узлов $z_2, z_3, \ldots, z_p$ (если $p > 1$). Имеем $s \geqq s' + m - k - 1$ $(\geqq m-1)$, где k — наименьшее из чисел k_1 и число членов последовательности (24) совпадающих с z_1, а s' — наименьший значок при котором последовательность $y_0, y_1, \ldots, y_{s'-1}$ содержит не менее k членов, равных z_1. Если $k=0$, то следует принять $s'=0$; наконец, мы предполагаем $p > 1$ или $p=1$ и $k < k_1$.

При этих условиях, рассматривая линейный функционал (1), имеем для остаточного члена $R_s[f]$ формулы (25) выражение (28), где коэффициенты $\mu_i^{(s)}$ не зависят от функции f.

Это — и условия при которых установлены упомянутые свойства формулы (29).

4. При прежных предположениях и если взять для $A[f]$ линейный функционал (1), если все точки $y_0, y_1, \ldots \leqq a'$, или если все эти точки $\geqq b'$ и если существует такое s_0 при котором коэффициенты $\mu_i^{(s)}$ имеют такой же знак для $s=s_0$, то $R[f]$ — простого вида для $s \geqq s_0$.

Доказывается, сверх того, что *если все точки* $y_0, y_1, \ldots$, совпадают, то $R[f]$ — простого вида для достаточно большого s.

В качестве приложения, доказывается, что остаточный член $R_s[f]$ формулы

$$A[f] = \sum_{\nu=7}^{s} A[x^\nu] \frac{f^{(\nu)}_{(0)}}{\nu!} + R_s[f]$$

где

$$A[f] = f(6) - f(0) - 0{,}28\,[f'(0) + f'(6)] -$$

$$- 1{,}62\,[f'(1) + f'(5)] - 2{,}2\,f'(3) \text{ — простого вида для } s \geqq 13.$$

DIFFÉRENCES DIVISÉES ET DÉRIVÉES

RÉSUMÉ

1. Dans ce travail nous étudions le reste $R_s[f]$ de la formule d'approximation (25), où $A[f]$ est une fonctionnelle linéaire définie sur un espace vectoriel S formé par des fonctions $f = f(x)$, réelles, de la variable réelle x, définies et *continues* sur un intervalle I d'extrémités a et b $(a < b)$. L'espace S contient tous les polynomes et ses éléments vérifient toutes les propriétés de dérivabilité nécessaires pour que les fonctionnelles linéaires considérées aient un sens.

$L(y_0, y_1, \ldots, y_s; f \mid x)$ est le polynome d'interpolation de Lagrange-Hermite relatif à la fonction f et aux noeuds (24) qui font partie de la suite, finie ou infinie, de points (23), distincts ou non.

La formule (25) est complètement caractérisée par le fait qu'elle est de la forme (26), où les coefficients c sont indépendants de la fonction f et que le reste $R_s[f]$ a le degré d'exactitude au moins égal à s, ce qui signifie que $R_s[f]$ est nul sur tout polynome du degré s. Les coefficients c_ν sont de la forme (27) et nous employons la notation connue $[y_0, y_1, \ldots, y_\nu; f]$ de la différence divisée de la fonction f sur les noeuds $y_0, y_1, \ldots, y_\nu$.

La formule (25) est une généralisation de la formule d'interpolation de Lagrange-Hermite donc, en particulier, de la formule de Taylor.

2. Nous étudions quelques cas où le reste $R_s[f]$ est du degré d'exactitude s et est de la *forme simple*, ce qui signifie qu'il peut se mettre sous la forme $R_s[f] = K[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{s+2}; f]$, où K est indépendant de la fonction f et les ξ_i sont $s+2$ points distincts de l'intérieur de l'intervalle I $(s \geqq 0)$ et qui dépendent en général de la fonction f.

Nous examinons ce problème, en particulier, pour la fonctionnelle linéaire (1), où $p, k_1, k_2, \ldots, k_p$ sont des nombres naturels données, $z_i, i = 1, 2, \ldots, p$, p points *distincts* de I et $a_{i,j}$ des nombres qui ne dépendent pas de la fonction f. Ce cas est important puisque des fonctionnelles linéaires de cette forme interviennent dans beaucoup de formules de dérivation et d'intégration numérique.

3. Par le théorème 1 nous démontrons que le reste $R_s[f]$ de la formule (29) est de la forme simple si $s \geqq m - 1$, et si tous les points (24) sont $\leqq a'$ ou bien tous $\geqq b'$, où $[a', b']$ est le plus petit intervalle fermé qui contient tous les noeuds, distincts ou non, $x_1, x_2, \ldots, x_m$ de la différence divisée du premier membre de la formule (29). Ce resultat est valable sous les condions suivantes.

Désignons, en général, par $x_1, x_2, \ldots, x_m$, les noeuds z_i de la fonctionnelle linéaire (1), chaque noeud étant compté avec son ordre de multiplicité. Soit $m = k_1 + k_2 + \ldots + k_p$. Les $x_1, x_2, \ldots, x_m$ forment une suite non-décroissante ou non-croissante ou, en général, une permutation normale (notion précisée dans le texte). Les $x_1, x_2, \ldots, x_{k_1}$, sont les noeuds qui coincident avec z_1 et aucun des points $y_0, y_1, \ldots$ ne coincide pas avec l'un des noeuds $z_2, z_3, \ldots, z_p$ (si $p > 1$). Nous avons $s \geqq s' + m - k - 1$ $(\geqq m - 1)$, où k est le plus petit des nombres k_1 et le nombre des termes de la suite (24) qui coincident avec z_1 et s' est le plus petit indice tel que la suite $y_0, y_1, \ldots, y_{s'-1}$ contienne au moins k termes égaux à z_1. Si $k=0$ nous prenons $s' = 0$. Enfin, on suppose $p > 1$ ou bien $p = 1$ et $k < k_1$.

Sous ces conditions, en prenant la fonctionnelle linéaire (1), nous avons, pour le reste $R_s[f]$ de la formule (25), l'expression (28), où les coefficients $\mu_i^{(s)}$ sont indépendants de la fonction f. Ces sont aussi les conditions sous lesquelles sont établies les propriétés signalées pour la formule (29).

4. Sous les hypothèses précédentes et si nous prenons pour $A[f]$ la fonctionnelle linéaire (1), si tous les points $y_0, y_1, \ldots$ sont $\leqq a'$ ou bien tous sont $\geqq b'$ et s'il existe un s_0 tel que les coefficients $\mu_i^{(s)}$ soient du même signe pour $s = s_0$, alors $R_s[f]$ est de la forme simple pour $s \geqq s_0$.

On démontre que *si (de plus) les points $y_0, y_1, \ldots$ sont tous confondus, $R_s[f]$ est de la forme simple pour s suffisamment grand.*

Comme un exemple, nous démontrons que le reste $R_s[f]$, de la formule

$$A[f] = \sum_{\nu=7}^{s} A[x^\nu] \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} + R^s[f],$$

où $A[f] = f(6) - f(0) - 0{,}28\ [f'(0) + f'(6)] - 1{,}62\ [f'(1) + f'(5)] - 2{,}2\, f'(3)$ est de la forme simple pour $s \geqq 13$.

BIBLIOGRAFIE

1. Kloostermann H. D., *Derivatives and finite differences.* Duke Math. Journal, **17**, 169–186 (1950).
2. Микеладзе Ш. Е., *Численные методы математического анализа,* (§ 112), Москва, 1953.
3. Popoviciu T., *Introduction a la théorie des différences divisées.* Bull. Math. de la Soc. Roumaine des Sci., **42**, 65–78 (1940).
4. — *Asupra formei restului în unele formule de aproximare ale analizei.* Lucr. Ses. gen. ştiinţifice, Acad. R. P. R., 1950, 183–185.
5. — *Asupra restului în unele formule de derivare numerică.* Studii şi cercetări matematice, **III**, 53–122 (1952).
6. — *Folytonos függvények középértéktételeiről.* Magy. Tud. Akad., III oszt. kozlem., **IV**, 353–356 (1954).
7. — *Asupra restului în unele formule liniare de aproximare ale analizei.* Studii şi cercetări de matematică (Cluj), **X**, nr. 2, 337–389 (1959) (apărut şi în limba franceză în Mathematica, **1 (24)**, 95–142 (1960).

Primit la 19. II. 1960.