O PROBLEMĂ LA LIMITĂ ASUPRA UNEI ECUAŢII CU DERIVATE PARŢIALE

DE

DUMITRU RIPIANU
(Cluj)

Lucrare prezentată la Colocviul de teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale din 21—26 septembrie 1959, Bucureşti.

1. Una din problemele tratate în [1] constă în determinarea unei integrale a ecuaţiei cu derivate parţiale (E)

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n} = f + bu + \sum_{k=1}^{n} \sum_{(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)} b_{\beta_1 \beta_2, \ldots, \beta_k} \frac{\partial^k u}{\partial x_{\beta_1} \partial x_{\beta_2} \ldots \partial x_{\beta_k}},$$

integrală ale cărei derivate parţiale, fără argumente repetate, de ordinul $n-1, n-2, \ldots, 2$ iau valori date respectiv pe anumite hiperplane date, ale cărei derivate parţiale de ordinul 1 iau valori date respectiv pe n semidrepte date şi care ia în origină, o valoare numerică dată, hiperplanele şi semidreptele fiind situate în poliedrul pozitiv al axelor $Ox_1, Ox_2, \ldots, Ox_n$.

S-a dovedit că dacă funcţiile care intervin în datele problemei sînt continue într-un paralelipiped construit pe axele $Ox_1, Ox_2, \ldots, Ox_n$, şi dacă paralelipipedul este destul de mic, atunci ecuaţia (E) are în acel paralelipiped o integrală şi una singură, satisfăcînd condiţiile la limită menţionate.

În prezenta notă se extinde problema amintită la ecuaţia cu derivate parţiale de tipul cel mai simplu

$$\frac{\partial^N u}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \ldots \partial x_n^{p_n}} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

impunînd însă condiţiile la limită derivatelor cu ordinele de multiplicitate existente în ecuaţie. În aceste condiţii, integrala determinată nu mai este unică, ci depinde de $\mathcal{N} = 2^{n-1}(N-n)$ funcţii arbitrare, ceea ce ar face evident cu putinţă punerea de alte probleme la limită pentru ecuaţia considerată.

2. Se consideră în spațiul cu n dimensiuni raportat la axele Ox_1, $Ox_2, \ldots, Ox_n$ un paralelipiped P_n, definit de inegalitățile

$$0 \leqslant x_i \leqslant a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

(a_i fiind n numere pozitive date) și cele C_n^k hiperplane $Q_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k}$ de ecuații respectiv :

$$(Q_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k}) : x_{\alpha_i} = \sum_{j=1}^{n-k} p_{\alpha'_{i,j}}^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k} x_{\alpha'_j} \; (i = 1, 2, \ldots, k) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-2), \tag{1}$$

$p_{\alpha'_{i,j}}^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k}$ fiind numere pozitive date, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ una din cele C_n^k grupe care se pot alcătui cu indicii $1, 2, \ldots, n$, iar $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_{n-k}$ restul indicilor pînă la $1, 2, \ldots, n$.

Se va admite că pentru $x_{\alpha'_j} \leqslant a_{\alpha'_j}$ se capătă $x_{\alpha_i} < a_{\alpha_i}$, cu alte cuvinte că

$$\sum_{j=1}^{n-k} p_{\alpha'_{i,j}}^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k} a_{\alpha'_j} < a_{\alpha_i}. \tag{2}$$

Se consideră în sfîrșit ecuația cu derivate parțiale de tipul cel mai simplu

$$\frac{\partial^N u}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \ldots \partial x_n^{p_n}} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{3}$$

unde $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este o funcție continuă în paralelipipedul P_n.

Se pune integralei u a ecuației (3) condiția ca, pe hiperplanele $(Q_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k})$, derivatele ei în raport cu $x_{\alpha'_1}, x_{\alpha'_2}, \ldots, x_{\alpha'_{n-k}}$ (cu ordinele de multiplicitate existente în (3)) să ia valori date, adică

$$\left[\frac{\partial^{N-(p_{\alpha_1}+p_{\alpha_2}+\cdots+p_{\alpha_k})} u}{\partial x_{\alpha'_1}^{p_{\alpha'_1}} \partial x_{\alpha'_2}^{p_{\alpha'_2}} \ldots \partial x_{\alpha'_{n-k}}^{p_{\alpha'_{n-k}}}}\right] = \varphi_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k}(x_{\alpha'_1}, x_{\alpha'_2}, \ldots, x_{\alpha'_{n-k}})$$

pentru $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_k}$ dați de (1), $\varphi_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k}(x_{\alpha'_1}, x_{\alpha'_2}, \ldots, x_{\alpha'_{n-k}})$ fiind C_n^k funcții date. Condiția de mai sus se va însemna cu (C_{n-k}); ea constă de fapt din C_n^k relații, întrucît grupa $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ parcurge toate cele C_n^k grupe ce se pot alcătui cu indicii $1, 2, \ldots, n$, ceea ce se va marca în cursul notei de față prin notația

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k). \tag{4}$$

Se va mai însemna prin

$$[H(x_1, x_2, \ldots, x_n)]_{x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_k}} \tag{5}$$

expresia obținută înlocuind în funcția $H(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pe $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_k}$ cu expresiile lor (1) în $x_{\alpha'_1}, x_{\alpha'_2}, \ldots, x_{\alpha'_{n-k}}$.

Cu notațiile adoptate, condiția (C_{n-k}) se scrie deci

$$(C_{n-k}) : \left[\frac{\partial^{N-(p_{\alpha_1}+p_{\alpha_2}+\cdots+p_{\alpha_k})} u}{\partial x_{\alpha'_1}^{p_{\alpha'_1}} \partial x_{\alpha'_2}^{p_{\alpha'_2}} \ldots \partial x_{\alpha'_{n-k}}^{p_{\alpha'_{n-k}}}}\right]_{x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_k}} = \varphi_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k}(x_{\alpha'_1}, x_{\alpha'_2}, \ldots, x_{\alpha'_{n-k}}). \qquad (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) \tag{6}$$

În prezenta notă se determină forma cea mai generală a integralei ecuației (3) care verifică condițiile (C_{n-k}) $(k = 1, 2, \ldots, n-2)$ și ale cărei derivate în raport cu cîte una din variabile (cu ordinul de multiplicitate existent în (3)), iau valori date respectiv pe n semidrepte trecînd prin origină și așezate în partea pozitivă a poliedrului de coordonate, de ecuații :

$$(D_{\alpha'_1}) : x_{\alpha_i} = p_{\alpha'_{i,1}}^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1}} x_{\alpha'_1} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \qquad (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}), \text{ adică } \alpha'_1 = 1, 2, \ldots, n, \tag{7}$$

deci

$$\left[\frac{\partial^{p_{\alpha'_1}} u}{\partial x_{\alpha'_1}^{p_{\alpha'_1}}}\right]_{x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_{n-1}}} = \varphi_{\alpha'_1}(x_{\alpha'_1}) \qquad (\alpha'_1 = 1, 2, \ldots, n) \tag{8}$$

(funcțiile date $\varphi_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k}(x_{\alpha'_1}, x_{\alpha'_2}, \ldots, x_{\alpha'_{n-k}})$ din (6) s-au notat în (8) unde $k = n-1$ prin $\varphi_{\alpha'_1}(x_{\alpha'_1})$).

Condiția (8) este deci, cum s-a mai remarcat, condiția (6) (C_{n-k}) pentru $k = n-1$, deci condiția (C_1).

În sfîrșit se va mai pune integralei u condiția ca să ia o valoare dată u_0 în origină, condiție care se va însemna cu (C_0).

Integrala u astfel determinată, care se va însemna cu u^*, depinde, cum s-a menționat, de 2^{n-1} $(N - n)$ funcții arbitrare.

3. Să considerăm deci, schimbînd totodată notațiile din (3), ecuația cu derivate parțiale lineară, de tip parabolic, de forma cea mai simplă

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \ldots \partial x_m^{p_m}} = f(x_1, x_2, \ldots, x_m), \tag{9}$$

unde $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ este o funcție continuă de variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_m$ în paralelipipedul P_m determinat de inegalitățile

$$0 \leqslant x_i \leqslant a_i (a_i > 0), \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

din spațiul cu m dimensiuni $Ox_1, x_2, \ldots, x_m$, iar $u(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ funcția necunoscută. (Bineînțeles că $n = p_1 + p_2 + \ldots + p_m$).

Se deduce din (9)

$$\frac{\partial^{p_1}}{\partial x_1^{p_1}} \frac{\partial^{n-p_1} u}{\partial x_2^{p_2} \partial x_3^{p_3} \ldots \partial x_m^{p_m}} = f(x_1, x_2, \ldots, x_m). \tag{10}$$

Integrala ecuației

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \varphi(x) \tag{11}$$

unde $\varphi(x)$ este o funcție continuă pentru $0 \leqslant x \leqslant a$ este

$$f(x) = \sum_{q=0}^{n-1} C_q x^q + \int_0^x \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi(s)ds, \tag{12}$$

C_q $(q = 0, 1, \ldots, n-1)$ fiind constante arbitrare.

Cu ajutorul formulei (12) se deduce din (10)

$$\frac{\partial^{n-p_1} u}{\partial x_2^{p_2}\partial x_3^{p_3}\ldots\partial x_m^{p_m}} = \sum_{q=0}^{p_1-1} C_q^1(x_2, x_3, \ldots, x_m)x_1^q +$$

$$+\int_0^{x_1}\frac{(x_1-s_1)^{p_1-1}}{(p_1-1)!}f(s_1, x_2, x_3, \ldots, x_m)ds_1, \tag{13}$$

unde $C_q^1(x_2, x_3, \ldots, x_m)$ sînt funcții arbitrare de $x_2, x_3, \ldots, x_m$, cu singura restricție ca să fie continue în P_m (restricția în chestiune este necesară spre a putea utiliza formula (12)).

Dacă avem

$$\frac{\partial^{n-(p_1+p_2+\ldots+p_h)}u}{\partial x_{h+1}^{p_{h+1}}\partial x_{h+2}^{p_{h+2}}\ldots\partial x_m^{p_m}} = \sum_{l=1}^{h}\sum_{q=0}^{p_l-1} C_q^l(x_1, x_2, \ldots, x_{l-1}, x_{l+1}, \ldots, x_m)x_l^q +$$

$$+\int_0^{x_h}\frac{(x_h-s_h)^{p_h-1}}{(p_h-1)!}ds_h\int_0^{x_{h-1}}\frac{(x_{h-1}-s_{h-1})^{p_{h-1}-1}}{(p_{h-1}-1)!}ds_{h-1}\ldots \tag{14}$$

$$\ldots\int_0^{x_2}\frac{(x_2-s_2)^{p_2-1}}{(p_2-1)!}ds_2\int_0^{x_1}\frac{(x_1-s_1)^{p_1-1}}{(p_1-1)!}f(s_1, s_2, \ldots, s_h, x_{h+1}, x_{h+2}, \ldots, x_m)ds_1,$$

unde $C_q^l(x_1, x_2, \ldots, x_{l-1}, x_{l+1}, \ldots, x_m)$ sînt funcții arbitrare de $x_1, x_2, \ldots, x_{l-1}, x_{l+1}, \ldots, x_m$, dar continue în P_m, atunci se deduce cu ajutorul lui (12) din (14) scrisă sub forma

$$\frac{\partial^{p_{h+1}}}{\partial x_{h+1}^{p_{h+1}}}\;\frac{\partial^{n-(p_1+p_2+\ldots+p_{h+1})}u}{\partial x_{h+2}^{p_{h+2}}\partial x_{h+3}^{p_{h+3}}\ldots\partial x_m^{p_m}} = \varphi_h(x_{h+1})$$

expresia

$$\frac{\partial^{n-(p_1+p_2+\ldots+p_{h+1})}u}{\partial x_{h+2}^{p_{h+2}}\partial x_{h+3}^{p_{h+3}}\ldots\partial x_m^{p_m}} = \sum_{q=0}^{p_{h+1}-1} C_q^{h+1}(x_1, x_2, \ldots, x_h, x_{h+2}, \ldots, x_m)\,x_{h+1}^q +$$

$$+\int_0^{x_{h+1}}\frac{(x_{h+1}-s_{h+1})^{p_{h+1}-1}}{(p_{h+1}-1)!}\left[\sum_{l=1}^{h}\sum_{q=0}^{p_l-1}\left[C_q^l(x_1, x_2, \ldots, x_{l-1}, x_{l+1}, \ldots, x_m)\right]_{x_{h+1}=s_{h+1}} x_l^q +\right.$$

$$+\int_0^{x_h}\frac{(x_h-s_h)^{p_h-1}}{(p_h-1)!}ds_h\int_0^{x_{h-1}}\frac{(x_{h-1}-s_{h-1})^{p_{h-1}-1}}{(p_{h-1}-1)!}ds_{h-1}\ldots\int_0^{x_2}\frac{(x_2-s_2)^{p_2-1}}{(p_2-1)!}ds_2$$

$$\left.\cdot\int_0^{x_1}\frac{(x_1-s_1)^{p_1-1}}{(p_1-1)!}f(s_1, s_2, \ldots, s_{h+1}, x_{h+2}, x_{h+3}, \ldots, x_m)\,ds_1\right]ds_{h+1}. \tag{15}$$

S-a utilizat notația $H(x_1, x_2, \ldots, x_m)_{x_h=s_h}$ pentru expresia obținută înlocuind în funcția $H(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ pe x_h cu s_h. Ori, dacă $C_q^l(x_1, x_2, \ldots, x_{l-1}, x_{l+1}, \ldots, x_m)$ este o funcție arbitrară de argumentele ei, continuă în P_m, evident că expresia

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_{l-1}, x_{l+1}, \ldots, x_m) =$$

$$= \int_0^{x_{h+1}}\frac{(x_{h+1}-s_{h+1})^{p_{h+1}-1}}{(p_{h+1}-1)!}\left[C_q^l(x_1, x_2, \ldots, x_{l-1}, x_{l+1}, \ldots, x_m)\right]_{x_{h+1}=s_{h+1}}ds_{h+1}$$

este o funcție arbitrară de aceleași argumente, continuă în P_m (adică se poate dispune de funcția $C_q^l(x_1, x_2, \ldots, x_{l-1}, x_{l+1}, \ldots, x_m)$ astfel încît funcția $A(x_1, x_2, \ldots, x_{l-1}, x_{l+1}, \ldots, x_m)$ să ia o formă arbitrară, dată dinainte $\overline{A}(x_1, x_2, \ldots, x_{l-1}, x_{l+1}, \ldots, x_m)$, funcțiile $\overline{A}$, C_q^l fiind continue în P_m).

Așadar, relația (15) se poate scrie

$$\frac{\partial^{n-(p_1+p_2+\ldots+p_{h+1})}u}{\partial x_{h+2}^{p_{h+2}}\partial x_{h+3}^{p_{h+3}}\ldots\partial x_m^{p_m}} = \sum_{l=1}^{h+1}\sum_{q=0}^{p_l-1} C_q^l(x_1, x_2, \ldots, x_{l-1}, x_{l+1}, \ldots, x_m)x_l^q +$$

$$+\int_0^{x_{h+1}}\frac{(x_{h+1}-s_{h+1})^{p_{h+1}-1}}{(p_{h+1}-1)!}ds_{h+1}\int_0^{x_h}\frac{(x_h-s_h)^{p_h-1}}{(p_h-1)!}ds_h\ldots \tag{16}$$

$$\ldots\int_0^{x_2}\frac{(x_2-s_2)^{p_2-1}}{(p_2-1)!}ds_2\int_0^{x_1}\frac{(x_1-s_1)^{p_1-1}}{(p_1-1)!}f(s_1, s_2, \ldots, s_{h+1}, x_{h+2}, x_{h+3}, \ldots, x_m)ds_1.$$

Relațiile (14) și (16) ne arată că dacă relația

$$\frac{\partial^{n-(p_1+p_2+\ldots+p_r)}u}{\partial x_{r+1}^{p_{r+1}}\partial x_{r+2}^{p_{r+2}}\ldots\partial x_m^{p_m}} = \sum_{l=1}^{r}\sum_{q=0}^{p_l-1} C_q^l(x_1, x_2, \ldots, x_{l-1}, x_{l+1}, \ldots, x_m)x_l^q +$$

$$+\int_0^{x_r}\frac{(x_r-s_r)^{p_r-1}}{(p_r-1)!}ds_r\int_0^{x_{r-1}}\frac{(x_{r-1}-s_{r-1})^{p_{r-1}-1}}{(p_{r-1}-1)!}ds_{r-1}\ldots$$

$$\ldots \int_0^{x_2} \frac{(x_2 - s_2)^{p_2-1}}{(p_2-1)\,!}\, ds_2 \int_0^{x_1} \frac{(x_1 - s_1)^{p_1-1}}{(p_1-1)\,!} f(s_1, s_2, \ldots, s_r, x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_m)\, ds_1 \quad (17)$$

are loc pentru $r = h$, atunci relaţia are loc şi pentru $r = h + 1$, $C_q^l(x_1, x_2, \ldots, x_{l-1}, x_{l+1}, \ldots, x_m)$, $(l = 1, 2, \ldots, r)$, fiind funcţii arbitrare de argumente, continue în P_m. Cum relaţia (13) ne spune că relaţia (17) are loc pentru $r = 1$, se deduce că acea relaţie este generală. Luînd în (17) $r = m - 1$, se obţine $\dfrac{\partial^{p_m} u}{\partial x_m^{p_m}}$, de unde cu ajutorul formulei (12), însemnînd cu $C_q^l(x_1, x_2, \ldots, x_{l-1}, x_{l+1}, \ldots, x_m)$ funcţii arbitrare (se poate lăsa acum la o parte cerinţa continuităţii lor), se obţine:

$$u = \sum_{l=1}^{m} \sum_{q=0}^{p_l-1} C_q^l(x_1, x_2, \ldots, x_{l-1}, x_{l+1}, \ldots, x_m)\, x_l^q + F(x_1, x_2, \ldots, x_m),$$

unde

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_m) =$$

$$= \int_0^{x_m} \frac{(x_m - s_m)^{p_m-1}}{(p_m-1)\,!}\, ds_m \int_0^{x_{m-1}} \frac{(x_{m-1} - s_{m-1})^{p_{m-1}-1}}{(p_{m-1}-1)\,!}\, ds_{m-1} \ldots$$

$$\ldots \int_0^{x_2} \frac{(x_2 - s_2)^{p_2-1}}{(p_2-1)\,!}\, ds_2 \int_0^{x_1} \frac{(x_1 - s_1)^{p_1-1}}{(p_1-1)!} f(s_1, s_2, \ldots, s_m)\, ds_1.$$

4. Spre a utiliza notaţiile adoptate în (3), se va considera deci ecuaţia

$$\frac{\partial^N u}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \ldots \partial x_n^{p_n}} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (18)$$

$$(N = p_1 + p_2 + \ldots + p_n;\ p_i \text{ întregi} \geqslant 1;\ i = 1, 2, \ldots, n),$$

unde $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este o funcţie dată, continuă în paralelipipedul P_n din spaţiul cu n dimensiuni al variabilelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$, definit de relaţiile $0 \leqslant x_i \leqslant a_i$ $(a_i > 0;\ i = 1, 2, \ldots, n)$, a cărei integrală generală este

$$u = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{l=1}^{n} \sum_{q=0}^{p_l-1} C_q^l(x_1, x_2, \ldots, x_{l-1}, x_{l+1}, \ldots, x_n)\, x_l^q,$$

în care

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= \int_0^{x_n} \frac{(x_n - s_n)^{p_n-1}}{(p_n-1)!}\, ds_n \int_0^{x_{n-1}} \frac{(x_{n-1} - s_{n-1})^{p_{n-1}-1}}{(p_{n-1}-1)\,!}\, ds_{n-1} \ldots$$

$$\ldots \int_0^{x_2} \frac{(x_2 - s_2)^{p_2-1}}{(p_2-1)\,!}\, ds_2 \int_0^{x_1} \frac{(x_1 - s_1)^{p_1-1}}{(p_1-1)\,!} f(s_1, s_2, \ldots, s_n)\, ds_1, \quad (19)$$

iar C_q^l sînt N funcţii arbitrare, de variabilele respective.

Dacă se introduce pentru comoditate operatorul $\Delta_{x_{\beta_1}^{p_{\beta_1}} x_{\beta_2}^{p_{\beta_2}} \ldots x_{\beta_q}^{p_{\beta_q}}}$ — unde $x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_q}$ este o grupă de q $(1 \leqslant q \leqslant n)$ variabile din variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_n$, iar $p_{\beta_1}, p_{\beta_2}, \ldots, p_{\beta_q}$ reprezintă respectiv ordinele de multiplicitate ale derivatelor în raport cu variabilele $x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_q}$ în ecuaţia (18) — definit de relaţia

$$\Delta_{x_{\beta_1}^{p_{\beta_1}} x_{\beta_2}^{p_{\beta_2}} \ldots x_{\beta_q}^{p_{\beta_q}}} \varphi(x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_q}) =$$

$$= \int_0^{x_{\beta_q}} \frac{(x_{\beta_q} - s_{\beta_q})^{p_{\beta_q}-1}}{(p_{\beta_q}-1)\,!}\, ds_{\beta_q} \int_0^{x_{\beta_{q-1}}} \frac{(x_{\beta_{q-1}} - s_{\beta_{q-1}})^{p_{\beta_{q-1}}-1}}{(p_{\beta_{q-1}}-1)\,!}\, ds_{\beta_{q-1}} \ldots$$

$$\ldots \int_0^{x_{\beta_2}} \frac{(x_{\beta_2} - s_{\beta_2})^{p_{\beta_2}-1}}{(p_{\beta_2}-1)\,!}\, ds_{\beta_2} \int_0^{x_{\beta_1}} \frac{(x_{\beta_1} - s_{\beta_1})^{p_{\beta_1}-1}}{(p_{\beta_1}-1)\,!} \varphi(s_{\beta_1}, s_{\beta_2}, \ldots, s_{\beta_q})\, ds_{\beta_1}, \quad (20)$$

$\varphi(s_{\beta_1}, s_{\beta_2}, \ldots, s_{\beta_q})$ fiind o funcţie arbitrară, continuă sau mai general mărginită şi integrabilă în raport cu argumentele $s_{\beta_1}, s_{\beta_2}, \ldots, s_{\beta_q}$ — atunci se deduce din (19) că integrala cea mai generală a ecuaţiei

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_{\beta_1}^{p_{\beta_1}} \partial x_{\beta_2}^{p_{\beta_2}} \ldots \partial x_{\beta_r}^{p_{\beta_r}}} = \varphi(x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_r})$$

$$(n = p_{\beta_1} + p_{\beta_2} + \ldots + p_{\beta_r})$$

este

$$u = \Delta_{x_{\beta_1}^{p_{\beta_1}} x_{\beta_2}^{p_{\beta_2}} \ldots x_{\beta_r}^{p_{\beta_r}}} \varphi(x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_r}) + \sum_{l=1}^{r} \sum_{q=1}^{p_{\beta_l}-1} C_q^{\beta_l}(\ldots)\, x_{\beta_l}^q + \sum_{l=1}^{r} C^{\beta_l}(\ldots), \quad (21)$$

unde $C^{\beta_l}(\ldots), C_q^{\beta_l}(\ldots)$ $(q = 1, 2, \ldots, p_{\beta_l} - 1;\ l = 1, 2, \ldots, r)$ sînt funcţii arbitrare de variabilele $x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_{l-1}}, x_{\beta_{l+1}}, \ldots, x_{\beta_r}$. În condiţia (6) (C_{n-k}), care în cazul nostru (al ecuaţiei (18)) se scrie

$$(C_{n-k}):\ \left[\frac{\partial^{N-(p_{\alpha_1}+p_{\alpha_2}+\ldots+p_{\alpha_k})} u}{\partial x_{\alpha'_1}^{p_{\alpha'_1}} \partial x_{\alpha'_2}^{p_{\alpha'_2}} \ldots \partial x_{\alpha'_{n-k}}^{p_{\alpha'_{n-k}}}}\right]_{x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_k}} = \varphi_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k}(x_{\alpha'_1}, x_{\alpha'_2}, \ldots, x_{\alpha'_{n-k}}) \quad (22)$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

$x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_k}$ se înlocuiesc cu expresiile lor (1) în $x_{\alpha'_1}, x_{\alpha'_2}, \ldots, x_{\alpha'_{n-k}}$ *după* efectuarea derivărilor în raport cu $x_{\alpha'_1}, x_{\alpha'_2}, \ldots, x_{\alpha'_{n-k}}$, obţinîndu-se expresia $\varphi_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k}(x_{\alpha'_1}, x_{\alpha'_2}, \ldots, x_{\alpha'_{n-k}})$. (23)

Dacă înlocuirea se face *înainte* de derivare, atunci în condiţia (C_{n-1}) toate funcţiile C_0^l din (19) (notate acum cu C^l) sînt funcţii de argumentele $x_{\alpha_1'}, x_{\alpha_2'}, \ldots, x_{\alpha_{n-1}'}$, întrucît dacă $l \neq \alpha_1$, x_{α_1} se află între argumentele lui C^l; înlocuindu-l pe x_{α_1} cu expresia lui (1), C^l este deci funcţie de $x_{\alpha_1'}, x_{\alpha_2'}, \ldots, x_{\alpha_{n-1}'}$. Pentru simplificarea problemei, se va păstra convenţia (23) în întreaga notă (simplificarea constă în faptul că cu convenţia (23), în condiţia (C_{n-1}) singură funcţia C^{α_1} este funcţie de variabilele $x_{\alpha_1'}, x_{\alpha_2'}, \ldots, x_{\alpha_{n-1}'}$; în general, în condiţia (C_{n-k}) singură funcţia $C^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k}(\ldots)$ dintre funcţiile $C^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k}(\ldots)$ din (32) este funcţie de variabilele $x_{\alpha'}, x_{\alpha_2'}, \ldots, x_{\alpha_{n-k}'}$).

Condiţia (22) se scrie deci cu ajutorul convenţiei (23)

$$\frac{\partial^{N-p_{\alpha_1}} C^{\alpha_1}(x_{\alpha_1'}, x_{\alpha_2'}, \ldots, x_{\alpha_{n-1}'})}{\partial x_{\alpha_1'}^{p_{\alpha_1'}} \partial x_{\alpha_2'}^{p_{\alpha_2'}} \ldots \partial x_{\alpha_{n-1}'}^{p_{\alpha_{n-1}'}}} = H^{\alpha_1}(x_{\alpha_1'}, x_{\alpha_2'}, \ldots, x_{\alpha_{n-1}'}) =$$

$$= \varphi_{\alpha_1}(x_{\alpha_1'}, x_{\alpha_2'}, \ldots, x_{\alpha_{n-1}'}) - \left| \frac{\partial^{N-p_{\alpha_1}} \left(u_0 - \sum_{l=1}^{n} C^l(\ldots)\right)}{\partial x_{\alpha_1'}^{p_{\alpha_1'}} \partial x_{\alpha_2'}^{p_{\alpha_2'}} \ldots \partial x_{\alpha_{n-1}'}^{p_{\alpha_{n-1}'}}} \right|_{x_{\alpha_1}}, \tag{24}$$

unde u_0 este dat de (19):

$$u_0 = \Delta_{x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_n^{p_n}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{l=1}^{n} \sum_{q=1}^{p_l - 1} C_q^l(\ldots)\, x_l^q + \sum_{l=1}^{n} C^l_{(\ldots)}. \tag{25}$$

Se deduce deci din (24), (21)

$$C^{\alpha_1}(x_{\alpha_1'}, x_{\alpha_2'}, \ldots, x_{\alpha_{n-1}'}) =$$

$$= \Delta_{x_{\alpha_1'}^{p_{\alpha_1'}} x_{\alpha_2'}^{p_{\alpha'}} \ldots x_{\alpha_{n-1}'}^{p_{\alpha_{n-1}'}}} H^{\alpha_1}(x_{\alpha_1'}, x_{\alpha_2'}, \ldots, x_{\alpha_{n-1}'}) + \tag{26}$$

$$+ \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{q=1}^{p_{\alpha_l'}-1} C_q^{\alpha_1, \alpha_l'}(\ldots)\, x_{\alpha_l'}^q + \sum_{l=1}^{n-1} C^{\alpha_1, \alpha_l'}(\ldots).$$

Se înseamnă prin $C_q(\ldots)$, $C(\ldots)$ nişte funcţii arbitrare conţinînd argumentele obţinute scoţînd din argumentele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ argumentele afectate de indicii scrişi superior.

Se va însemna prin $u_{C_{n-1}}$ integrala ecuaţiei (18) care satisface condiţia (22) (C_{n-1}), prin $u_{C_{n-1}, C_{n-2}}$ integrala ecuaţiei (18) care satisface condiţiile (C_{n-1}) şi (C_{n-2}) etc. (se înţelege integrala de forma cea mai generală posibilă).

Se deduce din (25), (26)

$$u_{C_{n-1}} = u_0 - \sum_{\beta_1=1}^{n} C^{\beta_1}(\ldots) + \sum_{(\beta_1)} \Delta_{x_{\beta_1'}^{p_{\beta_1'}} x_{\beta_2'}^{p_{\beta_2'}} \ldots x_{\beta_{n-1}'}^{p_{\beta_{n-1}'}}} H^{\beta_1}(x_{\beta_1'}, x_{\beta_2'}, \ldots, x_{\beta_{n-1}'})$$

$$+ \sum_{\beta_1=1}^{n} \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{q=1}^{p_{\beta_l'}-1} C_q^{\beta_1, \beta_l'}(\ldots)\, x_{\beta_l'}^q + \sum_{(\beta_1, \beta_2)} C^{\beta_1, \beta_2}(\ldots). \tag{27}$$

Condiţia (22) (C_{n-2}) se scrie cu ajutorul lui (23), (27)

$$\frac{\partial^{N-(p_{\alpha_1}+p_{\alpha_2})} C^{\alpha_1, \alpha_2}(x_{\alpha_1'}, x_{\alpha_2'}, \ldots, x_{\alpha_{n-2}'})}{\partial x_{\alpha_1'}^{p_{\alpha_1'}} \partial x_{\alpha_2'}^{p_{\alpha_2'}} \ldots \partial x_{\alpha_{n-2}'}^{p_{\alpha_{n-2}'}}} = H^{\alpha_1, \alpha_2}(x_{\alpha_1'}, x_{\alpha_2'}, \ldots, x_{\alpha_{n-2}'}) =$$

$$= \varphi_{\alpha_1, \alpha_2}(x_{\alpha_1'}, x_{\alpha_2'}, \ldots, x_{\alpha_{n-2}'}) -$$

$$- \left[\frac{\partial^{N-(p_{\alpha_1}+p_{\alpha_2})} \left(u_{C_{n-1}} - \sum_{(\beta_1, \beta_2)} C^{\beta_1, \beta_2}(\ldots)\right)}{\partial x_{\alpha_1'}^{p_{\alpha_1'}} \partial x_{\alpha_2'}^{p_{\alpha_2'}} \ldots \partial x_{\alpha_{n-2}'}^{p_{\alpha_{n-2}'}}} \right]_{x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}}. \tag{28}$$

Se deduce deci din (23), (21)

$$C^{\alpha_1, \alpha_2}(x_{\alpha_1'}, x_{\alpha_2'}, \ldots, x_{\alpha_{n-2}'}) = \Delta_{x_{\alpha_1'}^{p_{\alpha_1'}} x_{\alpha_2'}^{p_{\alpha_2'}} \ldots x_{\alpha_{n-2}'}^{p_{\alpha_{n-2}'}}} H^{\alpha_1, \alpha_2}(x_{\alpha_1'}, x_{\alpha_2'}, \ldots, x_{\alpha_{n-2}'})$$

$$+ \sum_{l=1}^{n-2} \sum_{q=1}^{p_{\alpha_l'}-1} C_q^{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_l'}(\ldots)\, x_{\alpha_l'}^q + \sum_{l=1}^{n-2} C^{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_l'}(\ldots), \tag{29}$$

iar din (27), (29)

$$u_{C_{n-1}, C_{n-2}} = u_{C_{n-1}} - \sum_{(\beta_1, \beta_2)} C^{(\beta_1, \beta_2)}(\ldots) +$$

$$+ \sum_{(\beta_1, \beta_2)} \Delta_{x_{\beta_1'}^{p_{\beta_1'}} x_{\beta_2'}^{p_{\beta_2'}} \ldots x_{\beta_{n-2}'}^{p_{\beta_{n-2}'}}} H^{\beta_1, \beta_2}(x_{\beta_1'}, x_{\beta_2'}, \ldots, x_{\beta_{n-2}'}) +$$

$$+ \sum_{(\beta_1, \beta_2)} \sum_{l=1}^{n-2} \sum_{q=1}^{p_{\beta_l'}-1} C_q^{\beta_1, \beta_2, \beta_l'}(\ldots)\, x_{\beta_l'}^q + \sum_{(\beta_1, \beta_2, \beta_3)} C^{\beta_1, \beta_2, \beta_3}(\ldots). \tag{30}$$

Însemnînd deci

$$H^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k}(x_{\alpha_1'}, x_{\alpha_2'}, \ldots, x_{\alpha_{n-k}'}) = \varphi_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k}(x_{\alpha_1'}, x_{\alpha_2'}, \ldots, x_{\alpha_{n-k}'})$$

$$- \left[\frac{\partial^{N-(p_{\alpha_1}+p_{\alpha_2}+\ldots+p_{\alpha_k})} \left(u_{C_{n-1}, C_{n-2}, \ldots, C_{n-k+1}} - \sum_{(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)} C^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k}(\ldots)\right)}{\partial x_{\alpha_1'}^{p_{\alpha_1'}} \partial x_{\alpha_2'}^{p_{\alpha_2'}} \ldots \partial x_{\alpha_{n-k}'}^{p_{\alpha_{n-k}'}}} \right]_{x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_k}}, \tag{31}$$

şi avînd

$$u_{C_{n-1}, C_{n-2}, \dots, C_{n-k+1}} = u_{C_{n-1}, C_{n-2}, \dots, C_{n-k+2}} - \sum_{(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{k-1})} C^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{k-1}}(\dots) +$$

$$+ \sum_{(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{k-1})} \Delta_{x_{\beta'_1}^{p_{\beta'_1}} x_{\beta'_2}^{p_{\beta'_2}} \dots x_{\beta'_{n-k+1}}^{p_{\beta'_{n-k+1}}}} H^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{k-1}}(x_{\beta'_1}, x_{\beta'_2}, \dots, x_{\beta'_{n-k+1}}) +$$

$$+ \sum_{(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{k-1})} \sum_{l=1}^{n-k+1} \sum_{q=1}^{p_{\beta'_l}-1} C_q^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{k-1}, \beta'_l}(\dots)\, x_{\beta'_l}^q + \sum_{(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)} C^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k}(\dots), \quad (32)$$

se deduce din (31), (32) că condiţia (22) (C_{n-k}) se scrie

$$\frac{\partial^{N-(p_{\alpha_1}+p_{\alpha_2}+\dots+p_{\alpha_k})} C^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}(x_{\alpha'_1}, x_{\alpha'_2}, \dots, x_{\alpha'_{n-k}})}{\partial x_{\alpha'_1}^{p_{\alpha'_1}} \partial x_{\alpha'_2}^{p_{\alpha'_2}} \dots \partial x_{\alpha'_{n-k}}^{p_{\alpha'_{n-k}}}} = H^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}(x_{\alpha'_1}, x_{\alpha'_2}, \dots, x_{\alpha'_{n-k}}),$$

aşa că de aici se deduce cu ajutorul lui (21)

$$C^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}(x_{\alpha'_1}, x_{\alpha'_2}, \dots, x_{\alpha'_{n-k}}) =$$

$$= \Delta_{x_{\alpha'_1}^{p_{\alpha'_1}} x_{\alpha'_2}^{p_{\alpha'_2}} \dots x_{\alpha'_{n-k}}^{p_{\alpha'_{n-k}}}} H^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}(x_{\alpha'_1}, x_{\alpha'_2}, \dots, x_{\alpha'_{n-k}}) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{n-k} \sum_{q=1}^{p_{\alpha'_l}-1} C_q^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha'_l}(\dots)\, x_{\alpha'_l}^q + \sum_{l=1}^{n-k} C^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha'_l}(\dots), \quad (33)$$

iar din (32), (33)

$$u_{C_{n-1}, C_{n-2}, \dots, C_{n-k}} = u_{C_{n-1}, C_{n-2}, \dots, C_{n-k+1}} - \sum_{(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)} C^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k}(\dots) +$$

$$+ \sum_{(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)} \Delta_{x_{\beta'_1}^{p_{\beta'_1}} x_{\beta'_2}^{p_{\beta'_2}} \dots x_{\beta'_{n-k}}^{p_{\beta'_{n-k}}}} H^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k}(x_{\beta'_1}, x_{\beta'_2}, \dots, x_{\beta'_{n-k}}) +$$

$$+ \sum_{(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)} \sum_{l=1}^{n-k} \sum_{q=1}^{p_{\beta'_l}-1} C_q^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k, \beta'_l}(\dots)\, x_{\beta'_l}^q + \sum_{(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{k+1})} C^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{k+1}}(\dots). \quad (34)$$

Se deduce din (34) că condiţia (22) (C_{n-k-1}) se scrie

$$\frac{\partial^{N-(p_{\alpha_1}+p_{\alpha_2}+\dots+p_{\alpha_{k+1}})} C^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k+1}}(x_{\alpha'_1}, x_{\alpha'_2}, \dots, x_{\alpha'_{n-k-1}})}{\partial x_{\alpha'_1}^{p_{\alpha'_1}} \partial x_{\alpha'_2}^{p_{\alpha'_2}} \dots \partial x_{\alpha'_{n-k-1}}^{p_{\alpha'_{n-k-1}}}} =$$

$$= H^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k+1}}(x_{\alpha'_1}, x_{\alpha'_2}, \dots, x_{\alpha'_{n-k-1}}) = \varphi_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k+1}}(x_{\alpha'_1}, x_{\alpha'_2}, \dots, x_{\alpha'_{n-k-1}}) - \quad (35)$$

$$- \left[\frac{\partial^{N-(p_{\alpha_1}+p_{\alpha_2}+\dots+p_{\alpha_{k+1}})}\left(u_{C_{n-1}, C_{n-2}, \dots, C_{n-k}} - \sum_{(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{k+1})} C^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{k+1}}(\dots)\right)}{\partial x_{\alpha'_1}^{p_{\alpha'_1}} \partial x_{\alpha'_2}^{p_{\alpha'_2}} \dots \partial x_{\alpha'_{n-k-1}}^{p_{\alpha'_{n-k-1}}}}\right]_{x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_{k+1}}}$$

Se deduce dar din (32) şi (34) că dacă relaţia

$$u_{C_{n-1}, C_{n-2}, \dots, C_{n-s}} = u_{C_{n-1}, C_{n-2}, \dots, C_{n-s+1}} - \sum_{(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)} C^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s}(\dots) +$$

$$+ \sum_{(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)} \Delta_{x_{\beta'_1}^{p_{\beta'_1}} x_{\beta'_2}^{p_{\beta'_2}} \dots x_{\beta'_{n-s}}^{p_{\beta'_{n-s}}}} H^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s}(x_{\beta'_1}, x_{\beta'_2}, \dots, x_{\beta'_{n-s}}) +$$

$$+ \sum_{(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)} \sum_{l=1}^{n-s} \sum_{q=1}^{p_{\beta'_l}-1} C_q^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s, \beta'_l}(\dots)\, x_{\beta'_l}^q + \sum_{(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{s+1})} C^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{s+1}}(\dots) \quad (36)$$

are loc pentru $s = k-1$, atunci relaţia are loc şi pentru $s = k$. Cum din (27), (30) se deduce că relaţia în chestiune are loc pentru $s = 1$, $s = 2$, înseamnă că ea este generală. Din (31), (35) se deduce că dacă relaţia

$$H^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s}(x_{\alpha'_1}, x_{\alpha'_2}, \dots, x_{\alpha'_{n-s}}) = \varphi_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s}(x_{\alpha'_1}, x_{\alpha'_2}, \dots, x_{\alpha'_{n-s}}) -$$

$$- \left[\frac{\partial^{N-(p_{\alpha_1}+p_{\alpha_2}+\dots+p_{\alpha_s})}\left(u_{C_{n-1}, C_{n-2}, \dots, C_{n-s+1}} - \sum_{(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)} C^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s}(\dots)\right)}{\partial x_{\alpha'_1}^{p_{\alpha'_1}} \partial x_{\alpha'_2}^{p_{\alpha'_2}} \dots \partial x_{\alpha'_{n-s}}^{p_{\alpha'_{n-s}}}}\right]_{x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_s}}, \quad (37)$$

are loc pentru $s = k$, atunci ea are loc şi pentru $s = k+1$. Cum din (24), (28) se deduce că relaţia în chestiune are loc pentru $s = 1$, $s = 2$, înseamnă că ea este generală. Făcînd în (36) $s = 1, 2, \dots, s$, se obţine prin sumarea relaţiilor obţinute şi utilizarea relaţiei (25)

$$u_{C_{n-1}, C_{n-2}, \dots, C_{n-s}} = \Delta_{x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_n^{p_n}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{s} \sum_{(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)} \Delta_{x_{\beta'_1}^{p_{\beta'_1}} x_{\beta'_2}^{p_{\beta'_2}} \dots x_{\beta'_{n-k}}^{p_{\beta'_{n-k}}}} H^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k}(x_{\beta'_1}, x_{\beta'_2}, \dots, x_{\beta'_{n-k}}) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{n} \sum_{q=1}^{p_l-1} C_q^l(\dots)\, x_l^q + \sum_{k=1}^{s} \sum_{(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta^k)} \sum_{l=1}^{n-k} \sum_{q=1}^{p_{\beta'_l}-1} C_q^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k, \beta'_l}(\dots)\, x_{\beta'_l}^q +$$

$$+ \sum_{(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{s+1})} C^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{s+1}}(\dots). \quad (38)$$

Se deduce deci din (37) şi (38) relaţia de recurenţă

$$H^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s}(x_{\alpha'_1}, x_{\alpha'_2}, \dots, x_{\alpha'_{n-s}}) = \varphi_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s}(x_{\alpha'_1}, x^{\alpha'_2}, \dots, x_{\alpha'_{n-s}}) -$$

$$- \left[\frac{\partial^{N-(p_{\alpha_1}+p_{\alpha_2}+\dots+p_{\alpha_s})}}{\partial x_{\alpha'_1}^{p_{\alpha'_1}} \partial x_{\alpha'_2}^{p_{\alpha'_2}} \dots \partial x_{\alpha'_{n-s}}^{p_{\alpha'_{n-s}}}} \left\{ \Delta_{x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_n^{p_n}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \right.\right.$$

$$+ \sum_{k=1}^{s-1} \sum_{(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)_s} \Delta_{x_{\beta'_1}^{p_{\beta'_1}} x_{\beta'_2}^{p_{\beta'_2}} \dots x_{\beta'_{n-k}}^{p_{\beta'_{n-k}}}} H^{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k}(x_{\beta'_1}, x_{\beta'_2}, \dots, x_{\beta'_{n-k}}) +$$

$$+\sum_{l=1}^{n}\sum_{q=1}^{p_l-1} C_q^l(\ldots)x_l^q + \sum_{k=1}^{s-1}\sum_{(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_k)_s}\sum_{l=1}^{n-k}\sum_{q=1}^{p_{\beta'_l}-1} C_q^{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_k,\beta'_l}(\ldots)\,x^q_{\beta'_l}\Bigg\}\Bigg|\Bigg|_{x_{\alpha_1},x_{\alpha_2},\ldots,x_{\alpha_s}}, \tag{39}$$

unde, spre deosebire de (36), (38), în care sumele $\sum\limits_{(\beta_1)}, \ldots, \sum\limits_{(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{s+1})}$ se extind la toate cele $C_n^1, \ldots$, respectiv C_n^{s+1} grupe de 1, ..., respectiv $s+1$ indici alcătuite din indicii $1, 2, \ldots, n$, în (39) sumele $\sum\limits_{(\beta_1)_s}, \ldots, \sum\limits_{(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{s-1})_s}$ se extind la toate cele $C_s^1, \ldots$, respectiv C_s^{s-1} grupe de 1, ..., respectiv $s-1$ indici alcătuite din indicii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, dat fiind că grupa de indici $\{\beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_{n-t}\}$ este mulțimea complementară a grupei $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t\}$ $(1 \leqslant t \leqslant s-1)$ (considerată ca o mulțime) în raport cu mulțimea $\mathcal{N} = \{1,2,\ldots, n\}$. Însemnînd deci $\{\beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_{n-t}\}$ cu $C_{\mathcal{N}}\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t\}$, dacă $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t\} \subset \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\}$, atunci $C_{\mathcal{N}}\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t\} = \{\beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_{n-t}\} \supset C_{\mathcal{N}}\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\} = \{\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_{n-s}\}$, așa că variabilele $x_{\alpha'_1}, x_{\alpha'_2}, \ldots, x_{\alpha'_{n-s}}$ se vor afla printre variabilele $x_{\beta'_1}, x_{\beta'_2}, \ldots, x_{\beta'_{n-t}}$. Dacă $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t\} \overline{\subset} \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\}$, se obține pentru un anumit indice $h(1 \leqslant h \leqslant t)$: $\beta_h \overline{\subset} \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\}$, deci $\beta_h \subset \{\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_{n-s}\}$ deci $\beta_h = \alpha'_{h'}$, h' fiind unul dintre numerele $1, 2, \ldots, n-s$, așa că variabila $x_{\alpha'_h}$ nu se va afla printre variabilele $x_{\beta'_1}, x_{\beta'_2}, \ldots, x_{\beta'_{n-t}}$, în care caz

$$\frac{\partial^{N-(p_{\alpha_1}+p_{\alpha_2}+\cdots+p_{\alpha_s})}}{\partial x_{\alpha'_1}^{p_{\alpha'_1}}\partial x_{\alpha'_2}^{p_{\alpha'_2}}\ldots\partial x_{\alpha'_{n-s}}^{p_{\alpha'_{n-s}}}}\Delta_{x_{\beta'_1}^{p_{\beta'_1}}x_{\beta'_2}^{p_{\beta'_2}}\ldots x_{\beta'_{n-t}}^{p_{\beta'_{n-t}}}} H^{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t}(x_{\beta'_1}, x_{\beta'_2}, \ldots, x_{\beta'_{n-t}}) =$$

$$= \frac{\partial^{N-(p_{\alpha_1}+p_{\alpha_2}+\cdots+p_{\alpha_s})}}{\partial x_{\alpha'_1}^{p_{\alpha'_1}}\partial x_{\alpha'_2}^{p_{\alpha'_2}}\ldots\partial x_{\alpha'_{n-s}}^{p_{\alpha'_{n-s}}}} C_q^{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t,\beta'_l}(\ldots)\,x^q_{\beta'_l} \equiv 0.$$

Cu ajutorul relației (39) se pot calcula din aproape în aproape expresiile $H^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s}(x_{\alpha'_1}, x_{\alpha'_2}, \ldots, x_{\alpha'_{n-s}})$ plecînd de la expresia lui $H^{\alpha_1}(x_{\alpha'_1}, x_{\alpha'_2}, \ldots, x_{\alpha'_{n-1}})$ dată de (24), (25)

$$H^{\alpha_1}(x_{\alpha'_1}, x_{\alpha'_2}, \ldots, x_{\alpha'_{n-1}}) = \varphi_{\alpha_1}(x_{\alpha'_1}, x_{\alpha'_2}, \ldots, x_{\alpha'_{n-1}}) -$$

$$-\underset{\boxed{1}}{\Bigg[}\frac{\partial^{N-p_{\alpha_1}}}{\partial x_{\alpha'_1}^{p_{\alpha'_1}}\partial x_{\alpha'_2}^{p_{\alpha'_2}}\ldots\partial x_{\alpha'_{n-1}}^{p_{\alpha'_{n-1}}}}\underset{\boxed{2}}{\Bigg[}\Delta_{x_1^{p_1}x_2^{p_2}\ldots x_n^{p_n}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) +$$

$$+\sum_{l=1}^{n}\sum_{q=1}^{p_l-1} C_q^l(\ldots)\,x_l^q\Bigg]_{\boxed{2}}\Bigg]_{\boxed{1}\,x_{\alpha_1}} \tag{40}$$

(cifrele $\boxed{\alpha}$, $\alpha = 1,2$ marchează deschiderea, respectiv închiderea parantezei mari $\underset{\boxed{\alpha}}{[}\;\ldots\;]_{\boxed{\alpha}}$ respective).

Se obține atunci din (39)

$$H^{\alpha_1,\alpha_2}(x_{\alpha'_1}, x_{\alpha'_2}, \ldots, x_{\alpha'_{n-2}}) = \varphi_{\alpha_1,\alpha_2}(x_{\alpha'_1}, x_{\alpha'_2}, \ldots, x_{\alpha'_{n-2}}) -$$

$$-\underset{\boxed{1}}{\Bigg[}\frac{\partial^{N-(p_{\alpha_1}+p_{\alpha_2})}}{\partial x_{\alpha'_1}^{p_{\alpha'_1}}\partial x_{\alpha'_2}^{p_{\alpha'_2}}\ldots\partial x_{\alpha'_{n-2}}^{p_{\alpha'_{n-2}}}}\underset{\boxed{2}}{\Bigg[}\Delta_{x_1^{p_1}x_2^{p_2}\ldots x_n^{p_n}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) +$$

$$+\sum_{\beta_1=\alpha_1,\alpha_2}\Delta_{x_{\beta'_1}^{p_{\beta'_1}}x_{\beta'_2}^{p_{\beta'_2}}\ldots x_{\beta'_{n-1}}^{p_{\beta'_{n-1}}}}\underset{\boxed{3}}{\Bigg[}\varphi_{\beta_1}(x_{\beta'_1}, x_{\beta'_2}, \ldots, x_{\beta'_{n-1}}) -$$

$$-\underset{\boxed{4}}{\Bigg[}\frac{\partial^{N-p_{\beta_1}}}{\partial x_{\beta'_1}^{p_{\beta'_1}}\partial x_{\beta'_2}^{p_{\beta'_2}}\ldots\partial x_{\beta'_{n-1}}^{p_{\beta'_{n-1}}}}\underset{\boxed{5}}{\Bigg[}\Delta_{x_1^{p_1}x_2^{p_2}\ldots x_n^{p_n}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) +$$

$$+\sum_{l=1}^{n}\sum_{q=1}^{p_l-1} C_q^l(\ldots)\,x_l^q\Bigg]_{\boxed{5}}\Bigg]_{\boxed{4}\,x_{\beta_1}}\Bigg]_{\boxed{3}} + \sum_{l=1}^{n}\sum_{q=1}^{p_l-1} C_q^l(\ldots)\,x_l^q +$$

$$+\sum_{\beta_1=\alpha_1,\alpha_2}\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{q=1}^{p_{\beta'_l}-1} C_q^{\beta_1,\beta'_l}(\ldots)\,x^q_{\beta'_l}\Bigg]_{\boxed{2}}\Bigg]_{\boxed{1}\,x_{\alpha_1},x_{\alpha_2}}. \tag{41}$$

(suma $\sum\limits_{\beta_1=\alpha_1,\alpha_2}$ înseamnă o sumă extinsă la valorile α_1 și α_2 ale indicelui de sumație β_1).

Dacă se ia în (19) $C_q^l \equiv 0$ $(l = 1, 2, \ldots, n;\ q = 0, 1, \ldots, p_l - 1)$ se deduce din (18) (în notația (20)) :

$$\frac{\partial^{p_1+p_2+\cdots+p_n}\left[\Delta_{x_1^{p_1}x_2^{p_2}\ldots x_n^{p_n}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right]}{\partial x_1^{p_1}\partial x_2^{p_2}\ldots\partial x_n^{p_n}} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Dacă în (17) se schimbă n cu N, m cu n (deci $N = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$), r cu σ, atunci luînd pentru u integrala particulară (42)

$$u = \Delta_{x_1^{p_1}x_2^{p_2}\ldots x_n^{p_n}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{43}$$

a ecuației (18) dată de (19) pentru $C_q^l \equiv 0$, se obține

$$\frac{\partial^{N-(p_1+p_2+\cdots+p_\sigma)}\left[\Delta_{x_1^{p_1}x_2^{p_2}\ldots x_n^{p_n}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right]}{\partial x_{\sigma+1}^{p_{\sigma+1}}\partial x_{\sigma+2}^{p_{\sigma+2}}\ldots\partial x_n^{p_n}} =$$

$$= \int_0^{x_\sigma}\frac{(x_\sigma - s_\sigma)^{p_\sigma-1}}{(p_\sigma - 1)!}\,ds_\sigma\int_0^{x_{\sigma-1}}\frac{(x_{\sigma-1} - s_{\sigma-1})^{p_{\sigma-1}-1}}{(p_{\sigma-1} - 1)!}\,ds_{\sigma-1}\ldots$$

$$\ldots\int_0^{x_2}\frac{(x_2 - s_2)^{p_2-1}}{(p_2-1)!}\,ds_2\int_0^{x_1}\frac{(x_1 - s_1)^{p_1-1}}{(p_1-1)!}f(s_1, s_2, \ldots, s_\sigma, x_{\sigma+1}, x_{\sigma+2}, \ldots, x_n)\,ds_1, \tag{44}$$

dat fiind că în expresia lui u neintrînd funcţii arbitrare C^l_q, nici în expresia lui $\dfrac{\partial^{p_{\sigma+1}+p_{\sigma+2}+\ldots+p_n}u}{\partial x_{\sigma+1}^{p_{\sigma+1}}\,\partial x_{\sigma+2}^{p_{\sigma+2}}\ldots\partial x_n^{p_n}}$ nu vor intra.

Mai general, dacă în (13) se înlocuieşte x_1 cu x_{φ_1}, apoi în deducerea lui $\dfrac{\partial^{n-(p_{\varphi_1}+p_2)}u}{\partial x_1^{p_1}\,\partial x_3^{p_3}\ldots\partial x_{\varphi_1-1}^{p_{\varphi_1-1}}\,\partial x_{\varphi_1+1}^{p_{\varphi_1+1}}\ldots\partial x_m^{p_m}}$ pe x_2 cu $x_{\varphi_2}, \ldots$, în sfîrşit în deducerea lui

$$\frac{\partial^{n-(p_{\varphi_1}+p_{\varphi_2}+\ldots+p_{\varphi_{r-1}}+p_r)}u}{\partial x_1^{p_1}\ldots\partial x_{\varphi_1-1}^{p_{\varphi_1-1}}\,\partial x_{\varphi_1+1}^{p_{\varphi_1+1}}\ldots\partial x_{\varphi_{r-1}-1}^{p_{\varphi_{r-1}-1}}\,\partial x_{\varphi_{r-1}+1}^{p_{\varphi_{r-1}+1}}\ldots\partial x_{r-1}^{p_{r-1}}\,\partial x_{r+1}^{p_{r+1}}\ldots\partial x_m^{p_m}}$$

pe x_r cu x_{φ_r}, se obţine în notaţiile (42) pentru integrala (43), în loc de relaţia (17) relaţia

$$\frac{\partial^{N-(p_{\varphi_1}+p_{\varphi_2}+\ldots+p_{\varphi_\sigma})}\left[\triangle_{x_1^{p_1}x_2^{p_2}\ldots x_n^{p_n}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right]}{\partial x_{\varphi'_1}^{p_{\varphi'_1}}\,\partial x_{\varphi'_2}^{p_{\varphi'_2}}\ldots\partial x_{\varphi'_{n-\sigma}}^{p_{\varphi'_{n-\sigma}}}} =$$

$$= \int_0^{x_{\varphi_\sigma}} \frac{(x_{\varphi_\sigma}-s_{\varphi_\sigma})^{p_{\varphi_\sigma}-1}}{(p_{\varphi_\sigma}-1)!}\,ds_{\varphi_\sigma} \int_0^{x_{\varphi_{\sigma-1}}} \frac{(x_{\varphi_{\sigma-1}}-s_{\varphi_{\sigma-1}})^{p_{\varphi_{\sigma-1}}-1}}{(p_{\varphi_{\sigma-1}}-1)!}\,ds_{\varphi_{\sigma-1}}\ldots \tag{45}$$

$$\ldots\int_0^{x_{\varphi_2}} \frac{(x_{\varphi_2}-s_{\varphi_2})^{p_{\varphi_2}-1}}{(p_{\varphi_2}-1)!}\,ds_{\varphi_2}\int_0^{x_{\varphi_1}} \frac{(x_{\varphi_1}-s_{\varphi_1})^{p_{\varphi_1}-1}}{(p_{\varphi_1}-1)!}\, f\underset{s_{\varphi_1},\quad s_{\varphi_2},\ \ldots,\ s_{\varphi_\sigma}}{(\ldots, x_{\varphi'_1}, \ldots, x_{\varphi'_2}, \ldots, x_{\varphi'_{n-\sigma}}, \ldots)}\, ds_{\varphi_1},$$

unde grupele de indici $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\sigma, \varphi'_1, \varphi'_2, \ldots, \varphi'_{n-\sigma}$ alcătuiesc şirul $1, 2, \ldots, n$ (scris într-o anumită ordine), iar notaţia

$$f\underset{s_{\varphi_1},\quad s_{\varphi_2},\ \ldots,\ s_{\varphi_\sigma}}{(\ldots, x_{\varphi'_1}, \ldots, x_{\varphi'_2}, \ldots, x_{\varphi'_{n-\sigma}}, \ldots)}$$

marchează funcţia $f(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ în care variabilele $s_{\varphi'_1}, s_{\varphi'_2}, \ldots, s_{\varphi'_{n-\sigma}}$ s-au înlocuit respectiv cu $x_{\varphi'_1}, x_{\varphi'_2}, \ldots, x_{\varphi'_{n-\sigma}}$. Cu ajutorul formulei (45) expresiile (40), (41) se scriu respectiv

$$H^{\alpha_1}(x_{\alpha'_1}, x_{\alpha'_2}, \ldots, x_{\alpha'_{n-1}}) = \varphi_{\alpha_1}(x_{\alpha'_1}, x_{\alpha'_2}, \ldots, x_{\alpha'_{n-1}}) -$$

$$-\left[\int_0^{x_{\alpha_1}} \frac{(x_{\alpha_1}-s_{\alpha_1})^{p_{\alpha_1}-1}}{(p_{\alpha_1}-1)!}\, f\underset{s_{\alpha_1}}{(\ldots, x_{\alpha'_1}, \ldots, x_{\alpha'_2}, \ldots, x_{\alpha'_{n-1}}, \ldots)}\,ds_{\alpha_1} +\right.$$

$$\left.+\sum_{l=1}^{n}\sum_{q=1}^{p_l-1}\frac{\partial^{N-p_{\alpha_1}}C^l_q(\ldots)\,x_l^q}{\partial x_{\alpha'_1}^{p_{\alpha'_1}}\,\partial x_{\alpha'_2}^{p_{\alpha'_2}}\ldots\partial x_{\alpha'_{n-1}}^{p_{\alpha'_{n-1}}}}\right]_{x_{\alpha_1}}, \tag{46}$$

$$H^{\alpha_1, \alpha_2}(x_{\alpha'_1}, x_{\alpha'_2}, \ldots, x_{\alpha'_{n-2}}) = \varphi_{\alpha_1, \alpha_2}(x_{\alpha'_1}, x_{\alpha'_2}, \ldots, x_{\alpha'_{n-2}}) -$$

$$-\underset{\boxed{1}}{\Bigg[}\int_0^{x_{\alpha_2}} \frac{(x_{\alpha_2}-s_{\alpha_2})^{p_{\alpha_2}-1}}{(p_{\alpha_2}-1)!}\,ds_{\alpha_2}\int_0^{x_{\alpha_1}}\frac{(x_{\alpha_1}-s_{\alpha_1})^{p_{\alpha_1}-1}}{(p_{\alpha_1}-1)!}\, f\underset{s_{\alpha_1},\ s_{\alpha_2}}{(\ldots, x_{\alpha'_1}, \ldots, x_{\alpha'_2}, \ldots, x_{\alpha'_{n-2}}, \ldots)}\,ds_{\alpha_1} +$$

$$+\int_0^{x_{\alpha_2}} \frac{(x_{\alpha_2}-s_{\alpha_2})^{p_{\alpha_2}-1}}{(p_{\alpha_2}-1)!}\underset{\boxed{2}}{\Bigg[}\varphi_{\alpha_1}\underset{s_{\alpha_2}}{(\ldots, x_{\alpha'_1}, \ldots, x_{\alpha'_2}, \ldots, x_{\alpha'_{n-2}}, \ldots)} -$$

$$-\underset{\boxed{3}}{\Bigg[}\int_0^{x_{\alpha_1}} \frac{(x_{\alpha_1}-s_{\alpha_1})^{p_{\alpha_1}-1}}{(p_{\alpha_1}-1)!}\, f\underset{s_{\alpha_1},\ s_{\alpha_2}}{(\ldots, x_{\alpha'_1}, \ldots, x_{\alpha'_2}, \ldots, x_{\alpha'_{n-2}}, \ldots)}\,ds_{\alpha_1} +$$

$$+\sum_{l=1}^{n}\sum_{q=1}^{p_l-1}\frac{\partial^{N-p_{\alpha_1}}C^l_q(\ldots)\,x_l^q}{\ldots\partial x_{\alpha'_1}^{p_{\alpha'_1}}\ldots\partial x_{\alpha'_2}^{p_{\alpha'_2}}\ldots\partial x_{\alpha'_{n-2}}^{p_{\alpha'_{n-2}}}\ldots\partial s_{\alpha_2}}\Bigg]_{\boxed{3}\,x_{\alpha_1} = x_{\alpha_1}(\ldots, x_{\alpha'_1}, \ldots}$$

$$\underset{s_{\alpha_2}}{\ldots, x_{\alpha'_2}, \ldots, x_{\alpha'_{n-2}}, \ldots)}\Bigg]_{\boxed{2}} ds_{\alpha_2} +$$

$$+\int_0^{x_{\alpha_1}} \frac{(x_{\alpha_1}-s_{\alpha_1})^{p_{\alpha_1}-1}}{(p_{\alpha_1}-1)!}\underset{\boxed{4}}{\Bigg[}\varphi_{\alpha_2}\underset{s_{\alpha_1}}{(\ldots, x_{\alpha'_1}, \ldots, x_{\alpha'_2}, \ldots, x_{\alpha'_{n-2}}, \ldots)} -$$

$$-\underset{\boxed{5}}{\Bigg[}\int_0^{x_{\alpha_2}} \frac{(x_{\alpha_2}-s_{\alpha_2})^{p_{\alpha_2}-1}}{(p_{\alpha_2}-1)!}\, f\underset{s_{\alpha_1},\ s_{\alpha_2}}{(\ldots, x_{\alpha'_1}, \ldots, x_{\alpha'_2}, \ldots, x_{\alpha'_{n-2}}, \ldots)}\,ds_{\alpha_2} +$$

$$+\sum_{l=1}^{n}\sum_{q=1}^{p_l-1}\frac{\partial^{N-p_{\alpha_2}}C^l_q(\ldots)\,x_l^q}{\ldots\partial x_{\alpha'_1}^{p_{\alpha'_1}}\ldots\partial x_{\alpha'_2}^{p_{\alpha'_2}}\ldots\partial x_{\alpha'_{n-2}}^{p_{\alpha'_{n-2}}}\ldots\partial s_{\alpha_1}} - \Bigg]_{\boxed{5}\,x_{\alpha_2} = x_{\alpha_2}\underset{s_{\alpha_1}}{(\ldots, x_{\alpha'_1}, \ldots, x_{\alpha'_2}, \ldots,}}$$

$$\ldots, x_{\alpha'_{n-2}}, \ldots)\Bigg]_{\boxed{4}} ds_{\alpha_1} + \frac{\partial^{N-(p_{\alpha_1}+p_{\alpha_2})}}{\partial x_{\alpha'_1}^{p_{\alpha'_1}}\,\partial x_{\alpha'_2}^{p_{\alpha'_2}}\ldots\partial x_{\alpha'_{n-2}}^{p_{\alpha'_{n-2}}}}\underset{\boxed{6}}{\Bigg[}\sum_{l=1}^{n}\sum_{q=1}^{p_l-1} C^l_q(\ldots)\,x_l^q +$$

$$+\sum_{\beta_1=\alpha_1, \alpha_2}\ \sum_{l=1}^{n-1}\ \sum_{q=1}^{p_{\beta'_l}-1} C_q^{\beta_1, \beta'_l}(\ldots)\,x^q_{\beta'_l}\Bigg]_{\boxed{6}}\Bigg]_{\boxed{1}\,x_{\alpha_1},\ x_{\alpha_2}}. \tag{47}$$

Notația

$$\frac{\partial^{N-p_{\alpha_1}} C_q^l(\ldots)\, x_l^q}{\ldots \partial x_{\alpha'_1}^{p_{\alpha'_1}} \ldots \partial x_{\alpha'_2}^{p_{\alpha'_2}} \ldots \partial x_{\alpha'_{n-2}}^{p_{\alpha'_{n-2}}} \ldots \partial s_{\alpha_2}}$$

marchează derivata în raport cu argumentele respective a expresiei obținute înlocuind în funcția $C_q^l(\ldots)\, x_l^q$ variabila x_{α_2} cu s_{α_2}. Evident că expresiile lui $H^{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}(x_{\alpha'_1}, x_{\alpha'_2}, \ldots, x_{\alpha'_{n-3}})$, ... etc., date de (39) sînt din ce în ce mai complicate. Se va mai da expresia dată de (39) a lui $H^{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}(x_{\alpha'_1}, x_{\alpha'_2}, \ldots, x_{\alpha'_{n-3}})$, fără a o mai transforma cu ajutorul formulei (45).

$$\begin{aligned}
&H^{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}(x_{\alpha'_1}, x_{\alpha'_2}, \ldots, x_{\alpha'_{n-3}}) = \varphi_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}(x_{\alpha'_1}, x_{\alpha'_2}, \ldots, x_{\alpha'_{n-3}}) - \\
&- {}_{\boxed{1}}\Bigg[\frac{\partial^{N-(p_{\alpha_1}+p_{\alpha_2}+p_{\alpha_3})}}{\partial x_{\alpha'_1}^{p_{\alpha'_1}}\, \partial x_{\alpha'_2}^{p_{\alpha'_2}} \ldots \partial x_{\alpha'_{n-3}}^{p_{\alpha'_{n-3}}}}\; {}_{\boxed{2}}\Bigg[\Delta_{x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_n^{p_n}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \\
&+ \sum_{\beta_1=\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} \Delta_{x_{\beta'_1}^{p_{\beta'_1}} x_{\beta'_2}^{p_{\beta'_2}} \ldots x_{\beta'_{n-1}}^{p_{\beta'_{n-1}}}}\; {}_{\boxed{3}}\Bigg[\varphi_{\beta_1}(x_{\beta'_1}, x_{\beta'_2}, \ldots, x_{\beta'_{n-1}}) - \\
&- {}_{\boxed{4}}\Bigg[\frac{\partial^{N-p_{\beta_1}}}{\partial x_{\beta'_1}^{p_{\beta'_1}}\, \partial x_{\beta'_2}^{p_{\beta'_2}} \ldots \partial x_{\beta'_{n-1}}^{p_{\beta'_{n-1}}}}\; {}_{\boxed{5}}\Bigg[\Delta_{x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_n^{p_n}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \\
&+ \sum_{l=1}^{n} \sum_{q=1}^{p_l-1} C_q^l(\ldots)\, x_l^q \Bigg]_{\boxed{5}} \Bigg]_{\boxed{4}\, x_{\beta_1}} \Bigg]_{\boxed{3}} + \sum_{(\beta_1, \beta_2)_3} \Delta_{x_{\beta'_1}^{p_{\beta'_1}} x_{\beta'_2}^{p_{\beta'_2}} \ldots x_{\beta'_{n-2}}^{p_{\beta'_{n-2}}}}\; {}_{\boxed{6}}\Bigg[\varphi_{\beta_1, \beta_2}(x_{\beta'_1}, \\
&x_{\beta'_2}, \ldots, x_{\beta'_{n-2}}) - {}_{\boxed{7}}\Bigg[\frac{\partial^{N-(p_{\beta_1}+p_{\beta_2})}}{\partial x_{\beta'_1}^{p_{\beta'_1}}\, \partial x_{\beta'_2}^{p_{\beta'_2}} \ldots \partial x_{\beta'_{n-2}}^{p_{\beta'_{n-2}}}}\; {}_{\boxed{8}}\Bigg[\Delta_{x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_n^{p_n}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \\
&+ \sum_{\gamma_1=\beta_1, \beta_2} \Delta_{x_{\gamma'_1}^{p_{\gamma'_1}} x_{\gamma'_2}^{p_{\gamma'_2}} \ldots x_{\gamma'_{n-1}}^{p_{\gamma'_{n-1}}}}\; {}_{\boxed{9}}\Bigg[\varphi_{\gamma_1}(x_{\gamma'_1}, x_{\gamma'_2}, \ldots, x_{\gamma'_{n-1}}) - \qquad (48)\\
&- {}_{\boxed{10}}\Bigg[\frac{\partial^{N-p_{\gamma_1}}}{\partial x_{\gamma'_1}^{p_{\gamma'_1}}\, \partial x_{\gamma'_2}^{p_{\gamma'_2}} \ldots \partial x_{\gamma'_{n-1}}^{p_{\gamma'_{n-1}}}}\; {}_{\boxed{11}}\Bigg[\Delta_{x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_n^{p_n}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \\
&+ \sum_{l=1}^{n} \sum_{q=1}^{p_l-1} C_q^l(\ldots)\, x_l^q \Bigg]_{\boxed{11}} \Bigg]_{\boxed{10}\, x_{\gamma_1}} \Bigg]_{\boxed{9}} + \sum_{l=1}^{n} \sum_{q=1}^{p_l-1} C_q^l(\ldots)\, x_l^q +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ \sum_{\gamma_1=\beta_1,\beta_2} \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{q=1}^{p_{\gamma'_l}-1} C_q^{\gamma_1, \gamma'_l}(\ldots)\, x_{\gamma'_l}^q \Bigg]_{\boxed{8}} \Bigg]_{\boxed{7}\, x_{\beta_1}, x_{\beta_2}} \Bigg]_{\boxed{6}} + \sum_{l=1}^{n} \sum_{q=1}^{p_l-1} C_q^l(\ldots)\, x_l^q + \\
&+ \sum_{\beta_1=\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3} \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{q=1}^{p_{\beta'_l}-1} C_q^{\beta_1, \beta'_l}(\ldots)\, x_{\beta'_l}^q + \sum_{(\beta_1,\beta_2)_3} \sum_{l=1}^{n-2} \sum_{q=1}^{p_{\beta'_l}-1} C_q^{\beta_1, \beta_2, \beta'_l}(\ldots)\, x_{\beta'_l}^q \Bigg]_{\boxed{2}} \Bigg]_{\boxed{1}\, x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, x_{\alpha_3}}.
\end{aligned}$$

Avînd cu ajutorul lui (39), (40) expresiile lui H^{β_1}, H^{β_1,β_2}, ..., $H^{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s}(x_{\beta'_1}, x_{\beta'_2}, \ldots, x_{\beta'_{n-s}})$, relația (38) ne dă pe $u_{c_{n-1}, c_{n-2}, \ldots, c_{n-s}}$. Funcția u_0 este dată de (25). Pentru $u_{c_{n-1}}$ se obține din (38) cu $s = 1$ (care este în fond formula (27)) și (46) expresia

$$\begin{aligned}
u_{c_{n-1}} &= \Delta_{x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_n^{p_n}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{l=1}^{n} \sum_{q=1}^{p_l-1} C_q^l(\ldots)\, x_l^q + \\
&+ \sum_{(\beta_1)} \Delta_{x_{\beta'_1}^{p_{\beta'_1}} x_{\beta'_2}^{p_{\beta'_2}} \ldots x_{\beta'_{n-1}}^{p_{\beta'_{n-1}}}}\; {}_{\boxed{1}}\Big[\varphi_{\beta_1}(x_{\beta'_1}, x_{\beta'_2}, \ldots, x_{\beta'_{n-1}}) - \\
&- {}_{\boxed{2}}\Bigg[\int_0^{x_{\beta_1}} \frac{(x_{\beta_1} - s_{\beta_1})^{p_{\beta_1}-1}}{(p_{\beta_1} - 1)!} f(\ldots, x_{\beta'_1}, \ldots, \underset{s_{\beta_1}}{x_{\beta'_2}}, \ldots, x_{\beta'_{n-1}}, \ldots)\, ds_{\beta_1} + \\
&+ \sum_{l=1}^{n} \sum_{q=1}^{p_l-1} \frac{\partial^{N-p_{\beta_1}} C_q^l(\ldots)\, x_l^q}{\partial x_{\beta'_1}^{p_{\beta'_1}}\, \partial x_{\beta'_2}^{p_{\beta'_2}} \ldots \partial x_{\beta'_{n-1}}^{p_{\beta'_{n-1}}}} \Bigg]_{\boxed{2}\, x_{\beta_1}} \Bigg]_{\boxed{1}} + \sum_{\beta_1=1}^{n} \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{q=1}^{p_{\beta'_l}-1} C_q^{\beta_1, \beta'_l}(\ldots)\, x_{\beta'_l}^q + \\
&+ \sum_{(\beta_1, \beta_2)} C^{\beta_1, \beta_2}(\ldots) \text{ etc.} \qquad (49)
\end{aligned}$$

5. Se va încerca să se evalueze numărul $N^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s}$ al funcțiilor arbitrare care intră în expresia (39) a lui $H^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s}(x_{\alpha'_1}, x_{\alpha'_2}, \ldots, x_{\alpha'_{n-s}})$, considerînd ca diferite două funcții arbitrare de aceleași variabile care servesc drept coeficient la puteri diferite ale unei variabile x din șirul x_1, x_2, ..., x_n sau la variabile x diferite.

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Se deduce din (40) că în } H^{\alpha_1}(x_{\alpha'_1}, x_{\alpha'_2}, \ldots, x_{\alpha'_{n-1}}) \text{ intră} \\
N^{\alpha_1} = \sum\limits_{l=1}^{n} (p_l - 1) = N - n \text{ funcții arbitrare } C_q^l(\ldots) \\
(q = 1, 2, \ldots, p_l - 1;\ l = 1, 2, \ldots, n).
\end{array}\right\} \qquad (50)$$

Din (39) (cu $s = 2$) și (50) se deduce că

$$\left.\begin{array}{l}
\text{în } H^{\alpha_1, \alpha_2}(x_{\alpha'_1}, x_{\alpha'_2}, \ldots, x_{\alpha'_{n-2}}) \text{ intră funcțiile arbitrare} \\
C_q^l\ (q = 1,2, \ldots, p_l - 1;\ l = 1,2, \ldots, n) \text{ și} \\
C_q^{\beta_1, \beta'_l}\ (q = 1,2, \ldots, p_{\beta'_l} - 1;\ l = 1,2, \ldots, n-1;\ (\beta_1)_2).
\end{array}\right\} \qquad (51)$$

Se va presupune dar că

$$\left.\begin{array}{l} \text{în } H^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k}(x_{\alpha'_1}, x_{\alpha'_2}, \ldots, x_{\alpha'_{n-k}}) \text{ intră funcțiile arbitrare} \\ C_q^l \text{ și } C_q^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\varphi, \beta'_l} \\ ((\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\varphi)_k ; \quad \varphi = 1, 2, \ldots, k-1). \end{array}\right\} \tag{52}$$

Cum în expresia (39) a lui $H^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1}}(x_{\alpha'_1}, x_{\alpha'_2}, \ldots, x_{\alpha'_{n-k-1}})$ intră funcțiile

$$\left.\begin{array}{l} H^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\theta}(x_{\beta'_1}, x_{\beta'_2}, \ldots, x_{\beta'_{n-\theta}}) \; (\theta=1, 2, \ldots, k ; (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\theta)_{k+1}), \; C_q^l \\ \text{și } C_q^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\varphi, \beta'_l}(\varphi = 1, 2, \ldots, k ; (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\varphi)_{k+1}), \end{array}\right\} \tag{53}$$

se deduce de aici și din (52) că $H^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\theta}$ introduce în expresia lui $H^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1}}$ funcțiile arbitrare C_q^l și $C_q^{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\varphi, \gamma'_l}(\varphi = 1, 2, \ldots, \theta - 1 ; (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\varphi)_{\theta(\beta)})$.

În continuare se va subînțelege că

$$\left.\begin{array}{ll} q \text{ ia valorile} & \left\{\begin{array}{l} 1, 2, \ldots, p_l - 1 \text{ pentru funcțiile } C_q^l \\ 1, 2, \ldots, p_{\beta'_l} - 1 \text{ pentru funcțiile } C_q^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\varphi, \beta'_l} \end{array}\right. \\ \begin{array}{l} \text{iar } l \text{ ia va-} \\ \text{lorile} \end{array} & \left\{\begin{array}{l} 1, 2, \ldots, n \text{ pentru funcțiile } C_q^l \\ 1, 2, \ldots, n - \varphi \text{ pentru funcțiile } C_q^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\varphi, \beta'_l}. \end{array}\right. \end{array}\right\} \tag{54}$$

Se înțelege prin notația $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\varphi)_{\theta(\beta)}$ că grupa $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\varphi\}$ parcurge toate cele C_θ^φ grupe de cîte φ indici alcătuite din indicii $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\theta$.

Prin $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\theta)_{k+1}$ se înțelege, ca pînă acum, că grupa $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\theta\}$ parcurge cele C_{k+1}^θ grupe de cîte θ indici alcătuite din indicii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1}$.

Ori, pentru θ, φ fixați, cînd $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\theta)_{k+1}$, evident că grupele obținute $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\varphi)_{\theta(\beta)}$ sînt grupele $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\varphi)_{k+1(\alpha)} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\varphi)_{k+1}$ (unele dintre cele din urmă putîndu-se obține de mai multe ori), așa că pentru θ, φ fixați, expresiile $H^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\theta}$(cu $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\theta)_{k+1}$) introduc în expresia lui $H^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1}}$ funcțiile arbitrare $C_q^{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\varphi, \gamma'_l}$ cu $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\varphi)_{k+1}$, iar $\varphi = 1, 2, \ldots, \theta - 1$. Deci, expresiile $H^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\theta}$ (cu $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\theta)_{k+1}$ iar $\theta = 1, 2, \ldots, k$) introduc în expresia lui $H^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1}}$ funcțiile arbitrare $C_q^{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\varphi, \gamma'_l}$ cu $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\varphi)_{k+1}$, iar $\varphi = 1, 2, \ldots, k-1$, sau schimbînd indicii, funcțiile $C_q^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\varphi, \beta'_l}$ cu $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\varphi)_{k+1}$, iar $\varphi = 1, 2, \ldots, k - 1$, ceea ce permite să se deducă din (53) că

$$\left.\begin{array}{l} \text{în } H^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1}} \text{ intră funcțiile arbitrare } C_q^l \text{ și } C_q^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\varphi, \beta'_l} \\ ((\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\varphi)_{k+1} ; \; \varphi = 1, 2, \ldots, k). \end{array}\right\} \tag{55}$$

Se deduce deci din (52) și (55) că dacă propoziția :

$$\left.\begin{array}{l} \text{în expresia lui } H^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s}(x_{\alpha'_1}, x_{\alpha'_2}, \ldots, x_{\alpha'_{n-s}}) \text{ intră fun-} \\ \text{cțiile arbitrare } C_q^l \text{ și } C_q^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\varphi, \beta'_l} \\ \quad ((\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\varphi)_s ; \quad \varphi = 1, 2, \ldots, s - 1) \end{array}\right\} \tag{56}$$

are loc pentru $s = k$, atunci ea are loc și pentru $s = k + 1$.

Cum din (51) se deduce că propoziția are loc pentru $s = 2$, înseamnă că ea este generală.

Numărul N_φ al funcțiilor $C_q^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\varphi, \beta'_l}$ din (56) se obține imediat din (54) :

$$N_\varphi = \sum_{(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\varphi)_s} \sum_{l=1}^{n-\varphi} (p_{\beta'_l} - 1) = \sum_{(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\varphi)_s} [N - n + \varphi - (p_{\beta_1} + p_{\beta_2} + \ldots + p_{\beta_\varphi})]. \tag{57}$$

Ori, cînd grupa $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\varphi\}$ parcurge cele C_s^φ grupe de indici alcătuite din indicii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, indicii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ în chestiune figurează de cîte $C_{s-1}^{\varphi-1}$ ori, așa că

$$\sum_{(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\varphi)_s} (p_{\beta_1} + p_{\beta_2} + \ldots + p_{\beta_\varphi}) = C_{s-1}^{\varphi-1}(p_{\alpha_1} + p_{\alpha_2} + \ldots + p_{\alpha_s}),$$

în care caz (57) se scrie

$$N_\varphi = (N - n + \varphi)C_s^\varphi - (p_{\alpha_1} + p_{\alpha_2} + \ldots + p_{\alpha_s})C_{s-1}^{\varphi-1},$$

așa că de aici, din (56) și (50) se deduce

$$N^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s} = N - n + \sum_{\varphi=1}^{s-1} N_\varphi = (N-n)(2^s - 1) + (s - \sum_{\varphi=1}^{s} p_{\alpha_\varphi})(2^{s-1} - 1). \tag{58}$$

Se deduce din (56) și (50) că dacă se înseamnă cu $M^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\theta}$ mulțimea funcțiilor arbitrare care intră în expresia lui $H^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\theta}(x_{\alpha'_1}, x_{\alpha'_2}, \ldots, x_{\alpha'_{n-\theta}})$ și dacă $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l\} \subset \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\lambda\}$, atunci $M^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l} \subset M^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\lambda}$, iar de aici, că dacă se înseamnă cu $M^{(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\theta)}$ mulțimea funcțiilor arbitrare care intră în expresiile funcțiilor $H^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\theta}$ cu $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\theta)$ (notația $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\theta)$ fiind cea explicată în (4)), atunci

$$M^{(\beta_1)} \subset M^{(\beta_1, \beta_2)} \subset \ldots \subset M^{(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\theta)} \subset \ldots \tag{59}$$

Se deduce din (59) și (56) că funcțiile arbitrare care intră în expresia (38) a lui $u_{C_{n-1}, C_{n-2}, \ldots, C_{n-s}}$ sînt :

$$\left.\begin{array}{l} 1^\circ.\ \text{Funcțiile din mulțimea } M^{(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s)} \\ 2^\circ.\ \text{Funcțiile } C_q^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s, \beta'_l} \text{ (cu } (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s)) \\ 3^\circ.\ \text{Funcțiile } C_q^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{s+1}} \text{ (cu } (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{s+1})), \end{array}\right\} \tag{60}$$

dat fiind că fixîndu-se o funcție $C_q^{\overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2, \ldots, \overline{\beta}_{\theta-1}, \beta'_l}$ $(2 \leqslant \theta \leqslant s)$, există în mulțimea de funcții $M^{(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\theta)} \subset M^{(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s)}$ funcția $C_q^{\overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2, \ldots, \overline{\beta}_{\theta-1}, \beta'_l}$, pentrucă intră, între altele, în expresia lui $H^{\overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2, \ldots, \overline{\beta}_\theta}$. Raționamentul făcut cere $s \geqslant 2$, însă pentru $s = 1$, propoziția (60) se verifică imediat pe expresia (27) a lui $u_{C_{n-1}}$.

Evident că atunci cînd $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s)$, funcţiile arbitrare $C_q^{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\varphi, \gamma'_i}$ din (56) care intră în expresiile $H^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s}$ sînt funcţiile $C_q^{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\varphi, \gamma'_i}$ cu $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\varphi)$. Schimbînd deci indicele γ cu β, se deduce că

$$\left.\begin{array}{l}\text{funcţiile din mulţimea } M^{(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s)} \text{ din (60) sînt funcţiile } C_q^l \text{ şi} \\ \text{funcţiile } C_q^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\varphi, \beta'_i} \text{ cu } (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\varphi), \text{ iar } \varphi = 1, 2, \ldots, s-1.\end{array}\right\} \quad (61)$$

Numărul $\overline{N}_\varphi$ al funcţiilor $C_q^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\varphi, \beta'_i}$ cu $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\varphi)$ este deci

$$\overline{N}_\varphi = \sum_{(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\varphi)} \sum_{l=1}^{n-\varphi} \sum_{q=1}^{p_{\beta'_l}-1} 1 = \sum_{(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\varphi)} [N - n + \varphi - (p_{\beta_1} + p_{\beta_2} + \ldots + p_{\beta_\varphi})]. \quad (62)$$

Ori, cînd grupa $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\varphi\}$ parcurge cele C_n^φ grupe de φ indici alcătuite dintre indicii $1, 2, \ldots, n$, indicii $1, 2, \ldots, n$ în chestiune figurează de cîte $C_{n-1}^{\varphi-1}$ ori, aşa că

$$\sum_{(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\varphi)} (p_{\beta_1} + p_{\beta_2} + \ldots + p_{\beta_\varphi}) = (p_1 + p_2 + \ldots + p_n) C_{n-1}^{\varphi-1} = N C_{n-1}^{\varphi-1},$$

în care caz (62) se scrie

$$\overline{N}_\varphi = (N - n + \varphi) C_n^\varphi - N C_{n-1}^{\varphi-1} = N C_{n-1}^\varphi - (n - \varphi) C_n^\varphi. \quad (63)$$

Numărul funcţiilor $C_q^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s, \beta'_i}$ din (60) este $\overline{N}_s$, iar cel al funcţiilor $C^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{s+1}}$ este C_n^{s+1}. Deci, numărul total al funcţiilor arbitrare din (60) care intră în expresia lui $u_{C_{n-1}, C_{n-2}, \ldots, C_{n-s}}$ este

$$\mathcal{N}_s = C_n^{s+1} + N - n + \sum_{\varphi=1}^{s} \overline{N}_\varphi,$$

deci cu ajutorul lui (63) se poate scrie

$$\mathcal{N}_s = C_n^{s+1} + \sum_{\varphi=0}^{s} (N C_{n-1}^\varphi - n C_n^\varphi + \varphi C_n^\varphi). \quad (64)$$

6. Integrala u^* definită la punctul **2** este evident dată de relaţia $u^* = u^*_{C_{n-1}, C_{n-2}, \ldots, C_1}$.

Integrala $u_{C_{n-1}, C_{n-2}, \ldots, C_1}$ este dată de (38) în care se ia $s = n-1$, după ce în prealabil s-au calculat cu ajutorul lui (39) expresiile H^{β_1}, $H^{\beta_1, \beta_2}, \ldots, H^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}}$. Termenul $\sum_{(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{s+1})} C^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{s+1}}$ din (38) este pentru $s = n-1$ o constantă $= K$. Cum $u_{C_{n-1}, C_{n-2}, \ldots, C_{n-s}}(0, 0, \ldots, 0) = \sum_{(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{s+1})} C^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{s+1}}(\ldots)$ pentru $x_{\beta'_1} = x_{\beta'_2} = \ldots = x_{\beta'_{n-s-1}} = 0$, deci $u_{C_{n-1}, C_{n-2}, \ldots, C_1}(0, 0, \ldots, 0) = K$, se deduce că integrala $u^*_{C_{n-1}, C_{n-2}, \ldots, C_1}$ care ne dă pe u^* se obţine luînd $K = u_0$.

Numărul $\mathcal{N}$ al funcţiilor arbitrare care intră în expresia integralei u^* se obţine deci scăzînd pe $1 = C_n^n$ (întrucît u^* nu cuprinde funcţii arbitrare $C^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{s+1}}(\ldots)$) din numărul $\mathcal{N}_{n-1}$ dat de (64).

Numărul în chestiune este deci

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_{n-1} - 1 = \sum_{\varphi=0}^{n-1} (N C_{n-1}^\varphi - n C_n^\varphi + \varphi C_n^\varphi) = 2^{n-1}(N - n). \quad (65)$$

Dacă în (18) se are $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1$, atunci $N = n$, deci în (65) $\mathcal{N} = 0$. Se regăseşte astfel concluzia ([1]), că integrala ecuaţiei de tip hiperbolic

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

care satisface condiţiile $(C_{n-1}), (C_{n-2}), \ldots, (C_0)$, este complet determinată.

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящей заметке определено решение наиболее общего вида уравнения с частными производными простейшего вида

$$\frac{\partial^N u}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \ldots \partial x_n^{p_n}} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad (1)$$

(где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — целые числа $\geqq 1$ при $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = N$, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — непрерывная функция в параллелипипеде P_n построенном по осям $Ox_1, x_2, \ldots, x_n$) выполняющее некоторые граничные условия, намеченные ниже.

Рассмотрены гиперплоскости с уравнениями

$$(Q_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k}) : x_{\alpha_i} = \sum_{j=1}^{n-k} p_{\alpha'_{i,j}}^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k} x_{\alpha'_j} \quad (i = 1, \ldots, k), \quad (2)$$

при $k = 1, 2, \ldots, n-2$ (где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_{n-k}$ — числа $1, 2, \ldots, n$) и полупрямые

$$(D_{\alpha'_1}) : x_{\alpha_i} = p_{\alpha'_{i,1}}^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}} x_{\alpha'_1} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \quad (3)$$

при $\alpha'_1 = 1, 2, \ldots, n$. Через $[H(x_1, x_2, \ldots, x_n)]_{x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_k}}$ обозначается выражение полученное при замене $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_k}$ из функции $H(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ их выражениями (2) или (3) в $x_{\alpha'_1}, x_{\alpha'_2}, \ldots, x_{\alpha'_{n-k}}$, а через $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ обозначено то обстоятельство, что группа $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$ пробегает все C_n^k группы из k значков которые можно образовать с числами $1, 2, \ldots, n$.

Условия, наложенные решению u^* уравнения (1) — следующие:

$$(C_{n-k}):\left[\frac{\partial^{N-(p_{\alpha_1}+\cdots+r_{\alpha_k})}u^*}{\partial x_{\alpha'_1}^{p_{\alpha'_1}}\partial x_{\alpha'_2}^{p_{\alpha'_2}}\cdots\partial x_{\alpha'_{n-k}}^{p_{\alpha'_{n-k}}}}\right]_{x_{\alpha_1},\, x_{\alpha_2},\ldots,\, x_{\alpha_k}} = \varphi_{\alpha_1,\,\alpha_2,\ldots,\,\alpha_k}(x_{\alpha'_1},\, x_{\alpha'_2},\ldots,\, x_{\alpha'_{n-k}})$$

$$(\alpha_1,\, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) \qquad (4)$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n-1)$$
$$u^*(0, 0, \ldots, 0) = u_0,$$

где $\varphi_{\alpha_1,\,\alpha_2,\ldots,\,\alpha_k}\,(x_{\alpha'_1}, x_{\alpha'_2}, \ldots, x_{\alpha'_{n-k}})$, u_0 — данные функции, соответственно данная постоянная. Условие (4) при $k{=}n{-}1$ относится к значениям частных производных u^* на полупрямых $(D_{\alpha'_1})$, а другие условия (4) к значениям частных производных — тоже существующих в (1) порядков кратности — u^* на гиперплоскостях $Q_{\alpha_1,\,\alpha_2,\ldots,\,\alpha_k}$.

Решение u^* зависит от $\mathcal{N} = 2^{n-1}(N-n)$ произвольных функций. Прием для получения выражения u^* указан в формулах (25), (24), (39), (38) из текста.

При $p_1{=}p_2{=}\ldots{=}p_n{=}1$, получается положение содержанное в работе [1], цитированной в литературе, данной в конце заметки.

UN PROBLÈME AUX LIMITES RELATIF À UNE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

RÉSUMÉ

Dans la présente note l'auteur détermine l'intégrale de la forme la plus générale de l'équation aux dérivées partielles de la forme la plus simple

$$\frac{\partial^N u}{\partial x_1^{p_1}\partial x_2^{p_2}\cdots\partial x_n^{p_n}} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (1)$$

($p_1, p_2, \ldots, p_n$ entiers $\geqslant 1$ avec $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = N$, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ étant une fonction continue dans un parallélipipède P_n construit sur les axes $Ox_1, x_2, \ldots, x_n$), qui satisfait certaines conditions aux limites, mentionnées ci-après.

On considère les hyperplans d'équations

$$(Q_{\alpha_1,\,\alpha_2,\ldots,\,\alpha_k}) : x_{\alpha_i} = \sum_{j=1}^{n-k} p_{\alpha'_{i,j}}^{\alpha_1,\,\alpha_2,\ldots,\,\alpha_k}\, x_{\alpha'_j}\ \ (i = 1, 2, \ldots, k), \qquad (2)$$

pour $k{=}1, 2, \ldots, n-2$ (où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_{n-k}$ sont les nombres $1, 2, \ldots, n$) et les demi-droites :

$$(D_{\alpha'_1}) : x_{\alpha_i} = p_{\alpha'_{i,1}}^{\alpha_1,\,\alpha_2,\ldots,\,\alpha_{n-1}}\, x_{\alpha'_1}\ \ (i = 1, 2, \ldots, n-1), \qquad (3)$$

pour $\alpha'_1 = 1, 2, \ldots, n$. On note par $[H(x_1, x_2, \ldots, x_n)]_{x_{\alpha_1},\, x_{\alpha_2},\ldots,\, x_{\alpha_k}}$ l'expression obtenue en remplaçant dans la fonction $H(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, les variables $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_k}$ par leurs expressions (2) ou (3) en $x_{\alpha'_1}, x_{\alpha'_2}, \ldots, x_{\alpha'_{n-k}}$ et par $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ le fait que le groupe $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$ parcourt les C_n^k groupes de k indices qui peuvent être formés des nombres $1, 2, \ldots, n$.

Les conditions imposées à l'intégrale u^* de l'équation (1) sont :

$$(C_{n-k}) : \left[\frac{\partial^{N-(p_{\alpha_1}+p_{\alpha_2}+\cdots+p_{\alpha_k})}u^*}{\partial x_{\alpha'_1}^{p_{\alpha'_1}}\partial x_{\alpha'_2}^{p_{\alpha'_2}}\cdots\partial x_{\alpha'_{n-k}}^{p_{\alpha'_{n-k}}}}\right]_{x_{\alpha_1},\, x_{\alpha_2},\ldots,\, x_{\alpha_k}} = \varphi_{\alpha_1,\,\alpha_2,\ldots,\,\alpha_k}(x_{\alpha'_1}, x_{\alpha'_2}, \ldots, x_{\alpha'_{n-k}}), \qquad (4)$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n-1)$$
$$u^*(0, 0, \ldots, 0) = u_0,$$

$\varphi_{\alpha_1,\,\alpha_2,\ldots,\,\alpha_k}\,(x_{\alpha'_1}, x_{\alpha'_2}, \ldots, x_{\alpha'_{n-k}})$, u_0 étant des fonctions, respectivement une constante — données. La condition (4) pour $k = n-1$ se rapporte aux valeurs des dérivées partielles de u sur les demi-droites $(D_{\alpha'_1})$, et les autres conditions (4) aux valeurs des dérivées partielles — également aux ordres de multiplicité existants dans (1) — de u^* sur les hyperplans $Q_{\alpha_1,\,\alpha_2,\ldots,\,\alpha_k}$.

L'intégrale u^* dépend de $\mathcal{N} = 2^{n-1}(N-n)$ fonctions arbitraires. Le procédé qui conduit à l'expression de u^* est exprimé par les formules (25), (24), (39), (38) qui figurent au texte.

Pour $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1$ on retrouve une conclusion du travail [1], cité dans la bibliographie.

BIBLIOGRAFIE

1. D. Ripianu, *Teoreme de existență asupra unei ecuații cu derivate parțiale.* Studii și cercet de mat. (Cluj), X, nr. 1, p. 135–199 (1959).

Primit la 27 XI. 1959.