EXPRESIA INTEGRALĂ A RESTULUI ÎNTR-O FORMULĂ DE TIP TAYLOR PENTRU FUNCȚIILE DE DOUĂ VARIABILE

DE

D. D. STANCU
(Cluj)

Lucrare prezentată la sesiunea ştiinţifică a Societăţii ştiinţelor matematice şi fizice din R.P.R., din 12-13 februarie 1960, Bucureşti.

În această lucrare ne vom ocupa de o extindere a formulei lui Taylor la funcţiile de două variabile, care e deosebită de cea dată în cărţile de analiză matematică, dar care pe lîngă că poate sluji la fel de bine în aplicaţiile ce se fac (de exemplu la studiul extremelor funcţiilor de două variabile), mai are calitatea că restul ei poate fi pus sub o formă foarte simplă.

Contribuţia noastră principală va consta în stabilirea unei expresii integrale simple pentru restul formulei pe care o vom studia.

1. Să considerăm un polinom de gradul n în raport cu x şi de gradul m în raport cu y

$$P(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} A_{i,k} x^i y^k. \tag{1}$$

Derivata parţială de ordinul $\nu\,(0 \leqslant \nu \leqslant n)$ în raport cu x şi de ordinul $\mu\,(0 \leqslant \mu \leqslant m)$ în raport cu y a acestui polinom, este dată de formula

$$\frac{\partial^{\nu+\mu} P(x, y)}{\partial x^{\nu} \partial y^{\mu}} = \sum_{i=\nu}^{n} \sum_{k=\mu}^{m} A_{i,k} N_{i,\nu} M_{k,\mu} x^{i-\nu} y^{k-\mu}, \tag{2}$$

unde

$$N_{i,\nu} = i(i-1)(i-2) \ldots (i-\nu+1)\,; \quad M_{k,\mu} = k(k-1)(k-2) \ldots (k-\mu+1).$$

Făcînd în această formulă $x = y = 0$, se pot deduce următoarele expresii pentru coeficienţii polinomului

$$A_{i,k} = \frac{1}{i!k!} \left. \frac{\partial^{i+k} P(x, y)}{\partial x^i \partial y^k} \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = \frac{1}{i!k!} P^{(i+k)}_{x^i y^k}(0, 0).$$

Rezultă că polinomul (1) se poate scrie şi sub forma

$$P(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} P^{(i+k)}_{x^i y^k}(0, 0) \frac{x^i y^k}{i!k!}. \tag{3}$$

2. Folosind acest rezultat vom căuta acum să stabilim pentru polinomul (1) și o dezvoltare de forma următoare

$$P(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} C_{i,k}(x-a)^i(y-b)^k. \tag{4}$$

Punînd $x - a = u$, $y - b = x$, $P(x, y) = P(a + u, b + v) = Q(u, v)$, pentru coeficienții polinomului

$$Q(u, v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} C_{i,k} u^i v^k,$$

se poate da, conform rezultatelor de mai sus, următoarea formulă

$$C_{i,k} = \frac{1}{i!k!} Q_{u^i v^k}^{(i+k)}(0, 0).$$

Ținînd seama de această formulă și de definiția lui $Q(u, v)$, rezultă că

$$C_{i,k} = \frac{1}{i!k!} P_{x^i y^k}^{(i+k)}(a, b). \tag{5}$$

Cu aceste expresii ale coeficienților, polinomul (4) se scrie

$$P(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} P_{x^i y^k}^{(i+k)}(a, b) \frac{(x-a)^i (y-b)^k}{i!k!}. \tag{6}$$

3. Să considerăm acum o funcție $f(x, y)$ care într-o vecinătate oarecare V a punctului $A(a, b)$ admite derivatele parțiale următoare

$$\frac{\partial^{\nu+\mu} f(x, y)}{\partial x^\nu \partial y^\mu} \qquad \begin{pmatrix} \nu = 0, 1, \ldots, n+1 \\ \mu = 0, 1, \ldots, m+1 \end{pmatrix},$$

despre care presupunem că sînt funcții continue pe V.

După modelul polinomului (6) putem forma pentru funcția $f(x, y)$ polinomul următor

$$T(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} f_{x^i y^k}^{(i+k)}(a, b) \frac{(x-a)^i (y-b)^k}{i!k!}. \tag{7}$$

Conform observațiilor de mai sus acest polinom și derivatele sale parțiale, pînă la ordinul (n, m) inclusiv, iau pe punctul $A(a, b)$ aceleași valori ca și funcția $f(x, y)$ și derivatele sale parțiale corespunzătoare, adică avem

$$\left.\frac{\partial^{\mu+\nu} T(x, y)}{\partial x^\nu \partial y^\mu}\right|_{\substack{x=a\\y=b}} = \left.\frac{\partial^{\nu+\mu} f(x, y)}{\partial x^\nu \partial y^\mu}\right|_{\substack{x=a\\y=b}} \tag{8}$$

$$(\nu = 0, 1, \ldots, n;\ \mu = 0, 1, \ldots, m).$$

Deoarece $f(x, y)$ este o funcție oarecare, care satisface doar ipotezelor de derivabilitate arătate mai sus, polinomul de tip Taylor (7) nu reprezintă funcția considerată decît cu aproximație, despre care ne putem face o idee clară studiind diferența

$$R(x, y) = f(x, y) - T(x, y). \tag{9}$$

Ținînd seama de (8) și (9) conchidem că

$$\left.\frac{\partial^{\nu+\mu} R(x, y)}{\partial x^\nu \partial y^\mu}\right|_{\substack{x=a\\y=b}} = 0 \quad \begin{pmatrix} \nu = 0, 1, \ldots, n \\ \mu = 0, 1, \ldots, m \end{pmatrix} \tag{10}$$

și că

$$\frac{\partial^{n+1} R(x, y)}{\partial x^{n+1}} = \frac{\partial^{n+1} f(x, y)}{\partial x^{n+1}},\ \frac{\partial^{m+1} R(x, y)}{\partial y^{m+1}} = \frac{\partial^{m+1} f(x, y)}{\partial y^{m+1}},\ \frac{\partial^{n+m+2} R(x,y)}{\partial x^{n+1} \partial y^{m+1}} = \frac{\partial^{n+m+2} f(x, y)}{\partial x^{n+1} \partial y^{m+1}}. \tag{10'}$$

În cele ce urmează vom căuta să deducem o expresie cît se poate de simplă pentru $R(x, y)$, care este restul — sau termenul complimentar — al formulei de aproximație de tip Taylor

$$f(x, y) = T(x, y) + R(x, y). \tag{11}$$

Presupunînd că dreptunghiul definit de inegalitățile $a \leqq t \leqq x$, $b \leqq \tau \leqq y$ e conținut în V, se observă că putem scrie succesiv

$$R(x, y) = R(x, y) - R(a, b) = R(x, y) - R(a, y) + R(x, y) - R(x, b) -$$
$$- [R(x, y) - R(x, b) + R(a, b) - R(a, y)] =$$
$$= \int_a^x \frac{\partial R(t, y)}{\partial t} dt + \int_b^y \frac{\partial R(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau - \int_a^x \int_b^y \frac{\partial^2 R(t, \tau)}{\partial t \partial \tau} dt\, d\tau. \tag{12}$$

Dacă introducem notațiile

$$R_1(x, y) = \int_a^x \frac{\partial R(t, y)}{\partial t} dt - \int_a^x \int_b^y \frac{\partial^2 R(t, \tau)}{\partial t \partial \tau} dt\, d\tau,\ R_2(x, y) = \int_b^y \frac{\partial R(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \tag{13}$$

restul formulei (11) se scrie

$$R(x, y) = R_1(x, y) + R_2(x, y). \tag{14}$$

Să ne ocupăm de $R_1(x, y)$. Socotind pe x fix, întrucît $dt = -d(x - t)$, vom avea

$$R_1(x, y) = -\int_a^x \left[\frac{\partial R(t, y)}{\partial t} - \int_b^y \frac{\partial^2 R(t, \tau)}{\partial t \partial \tau}\right] d(x - t) =$$
$$= \left\{(x - t)\left[\frac{\partial R(t, y)}{\partial t} - \int_b^y \frac{\partial^2 R(t, \tau)}{\partial t \partial \tau} d\tau\right]\right\}_a^x +$$
$$+ \int_a^x (x - t)\left[\frac{\partial^2 R(t, y)}{\partial t^2} - \int_b^y \frac{\partial^3 R(t, \tau)}{\partial t^2 \partial \tau} d\tau\right] dt. \tag{15}$$

Partea întegrată e nulă, căci

$$\left.\frac{\partial R(t,y)}{\partial t}\right|_{t=a} - \int_b^y \left.\frac{\partial^2 R(t,\tau)}{\partial t\, \partial \tau}\right|_{t=a} d\tau = \left.\frac{\partial R(t,b)}{\partial t}\right|_{t=a} = 0,$$

conform formulelor (10).

Avem apoi

$$R_1(x,y) = -\int_a^x \left[\frac{\partial^2 R(t,y)}{\partial t^2} - \int_b^y \frac{\partial^3 R(t,\tau)}{\partial t^2\, \partial \tau} d\tau\right] (x-t)\, d(x-t) =$$

$$= -\left\{\frac{(x-t)^2}{2\,!}\left[\frac{\partial^2 R(t,y)}{\partial t^2} - \int_b^y \frac{\partial^3 R(t,\tau)}{\partial t^2\, \partial \tau} d\tau\right]\right\}_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2\,!}\left[\frac{\partial^3 R(t,y)}{\partial t^3} - \int_b^y \frac{\partial^1 R(t,y)}{\partial t^3\, \partial \tau} d\tau\right] dt.$$

Partea integrată este iarăși nulă, căci

$$\left.\frac{\partial^2 R(t,y)}{\partial t^2}\right|_{t=a} - \int_b^y \left.\frac{\partial^3 R(t,\tau)}{\partial t^2\, \partial \tau}\right|_{t=a} d\tau = \left.\frac{\partial^2 R(t,b)}{\partial t^2}\right|_{t=a} = 0.$$

Cu acestea

$$R_1(x,y) = \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2\,!}\left[\frac{\partial^3 R(t,y)}{\partial t^3} - \int_b^y \frac{\partial^4 R(t,\tau)}{\partial t^3\, \partial \tau} d\tau\right] dt =$$

$$= -\int_a^x \left[\frac{\partial^3 R(t,y)}{\partial t^3} - \int_b^y \frac{\partial^4 R(t,\tau)}{\partial t^3\, \partial \tau} d\tau\right] \frac{(x-t)^2}{2\,!}\, d(x-t) =$$

$$= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots =$$

$$= -\int_a^x \left[\frac{\partial^{n+1} R(t,y)}{\partial t^{n+1}} - \int_b^y \frac{\partial^{n+2} R(t,\tau)}{\partial t^{n+1}\, \partial \tau} d\tau\right] \frac{(x-t)^n}{n!}\, d(x-t) =$$

$$= \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} \frac{\partial^{n+1} R(t,y)}{\partial t^{n+1}} dt - \int_a^x \int_b^y \frac{(x-t)^n}{n!} \frac{\partial^{n+2} R(t,\tau)}{\partial t^{n+1}\, \partial \tau} dt\, d\tau. \tag{16}$$

Înlocuind această expresie a lui $R_1(x,y)$ în formula (14) obținem

$$R(x,y) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} \frac{\partial^{n+1} R(t,y)}{\partial t^{n+1}} dt + R_3(x,y), \tag{17}$$

unde

$$R_3(x,y) = \int_b^y \frac{\partial R(x,\tau)}{\partial \tau} d\tau - \int_a^x \int_b^y \frac{(x-t)^n}{n!} \frac{\partial^{n+2} R(t,\tau)}{\partial t^{n+1}\, \partial \tau} dt\, d\tau =$$

$$= \int_b^y \left[\frac{\partial R(x,\tau)}{\partial \tau} - \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} \frac{\partial^{n+2} R(t,\tau)}{\partial t^{n+1}\, \partial \tau} dt\right] d\tau.$$

Efectuînd o succesiune de calcule (integrări prin părți) de felul celor care ne-au condus de la formula (15) la formula (16), se găsește că

$$R_3(x,y) = \int_b^y \frac{(y-\tau)^m}{m\,!} \frac{\partial^{m+1} R(x,\tau)}{\partial \tau^{m+1}} d\tau - \int_a^x \int_b^y \frac{(x-t)^n (y-\tau)^m}{n\,!\, m\,!} \frac{\partial^{m+n+2} R(t,\tau)}{\partial t^{n+1} \partial^{m+1} \tau} dt\, d\tau.$$

Dacă se înlocuiește în (17) și se ține seama de (10′), obținem tocmai expresia integrală a restului formulei de tip Taylor (11)

$$\boxed{\begin{aligned} R(x,y) = {} & \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n\,!} \frac{\partial^{n+1} f(t,y)}{\partial t^{n+1}} dt + \int_b^y \frac{(y-\tau)^m}{m\,!} \frac{\partial^{m+1} f(x,\tau)}{\partial \tau^{m+1}} d\tau - \\ & - \int_a^x \int_b^y \frac{(x-t)^n (y-\tau)^m}{n\,!\, m\,!} \frac{\partial^{n+m+2} f(t,\tau)}{\partial t^{n+1} \partial \tau^{m+1}} dt\, d\tau. \end{aligned}} \tag{18}$$

4. De aici se poate deduce și o altă formă a restului $R(x,y)$. În adevăr, avînd în vedere că $(x-t)^n$ și $(y-\tau)^m$ nu schimbă de semn în intervalul $[a,x]$, respectiv $[b,y]$, vom putea să aplicăm prima formulă a mediei calculului integral. Pentru a obține un rezultat calitativ mai bun vom face următoarele transformări

$$\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n\,!} \frac{\partial^{n+1} f(t,y)}{\partial t^{n+1}} dt - \int_a^x \int_b^y \frac{(x-t)^n (y-\tau)^m}{n\,!\; m\,!} \frac{\partial^{n+m+2} f(t,\tau)}{\partial t^{n+1}\, \partial \tau^{m+1}} dt\, d\tau =$$

$$= \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n\,!} \left[\frac{\partial^{n+1} f(t,y)}{\partial t^{n+1}} - \int_b^y \frac{(y-\tau)^m}{m\,!} \frac{\partial^{n+m+2} f(t,\tau)}{\partial t^{n+1} \partial \tau^{m+1}} d\tau\right] dt =$$

$$= \left[\frac{\partial^{n+1} f(\xi,y)}{\partial \xi^{n+1}\, n+1} - \int_b^y \frac{(y-\tau)^m}{m\,!} \frac{\partial^{n+m+2} f(\xi,\tau)}{\partial \xi^{n+1} \partial \tau^{m+1}} d\tau\right] \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n\,!} dt =$$

$$= \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)\,!} \frac{\partial^{n+1} f(\xi,y)}{\partial \xi^{n+1}} - \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)\,!} \int_b^y \frac{(y-\tau)^m}{m\,!} \frac{\partial^{n+m+2} f(\xi,\tau)}{\partial \xi^{n+1} \partial \tau^{m+1}} d\tau,$$

unde $\xi \in (a, x)$; apoi

$$\int_b^y \frac{(y-\tau)^m}{m\,!} \frac{\partial^{m+1} f(x,\tau)}{\partial \tau^{m+1}} d\tau - \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)\,!} \int_b^y \frac{(y-\tau)^m}{m\,!} \frac{\partial^{n+m+2} f(\xi,\tau)}{\partial \xi^{n+1} \partial \tau^{m+1}} d\tau =$$

$$= \int_b^y \frac{(y-\tau)^m}{m\,!} \left| \frac{\partial^{m+1} f(x,\tau)}{\partial \tau^{m+1}} - \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)\,!} \frac{\partial^{n+m+2} f(\xi,\tau)}{\partial \xi^{n+1} \partial \tau^{m+1}} \right| d\tau =$$

$$= \left[\frac{\partial^{m+1} f(x,\eta)}{\partial \eta^{m+1}} - \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)\,!} \frac{\partial^{n+m+2} f(\xi,\eta)}{\partial \xi^{n+1} \partial \eta^{m+1}} \right] \int_b^y \frac{(y-\tau)^m}{m\,!} d\tau =$$

$$= \frac{(y-b)^{m+1}}{(m+1)\,!} \frac{\partial^{m+1} f(x,\eta)}{\partial \eta^{m+1}} - \frac{(x-a)^{n+1}(y-b)^{m+1}}{(m+1)\,!\,(n+1)\,!} \frac{\partial^{n+m+2} f(\xi,\eta)}{\partial \xi^{n+1} \partial \eta^{m+1}},$$

unde $\eta \in (b, y)$.

În felul acesta am ajuns la următoarea formă a restului formulei de tip Taylor (11)

$$R(x, y) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)\,!} \frac{\partial^{n+1} f(\xi, y)}{\partial \xi^{n+1}} + \frac{(y-b)^{m+1}}{(m+1)\,!} \frac{\partial^{m+1} f(x,\eta)}{\partial \eta^{m+1}} -$$

$$- \frac{(x-a)^{n+1}(y-b)^{m+1}}{(n+1)\,!\,(m+1)\,!} \frac{\partial^{n+m+2} f(\xi,\eta)}{\partial \xi^{n+1} \partial \eta^{m+1}}.$$

Menţionăm că numerele necunoscute $\xi \in (a, x)$ şi $\eta \in (b, y)$ care intervin sînt aceleaşi în termenii de mai sus, rezultat la care nu se putea ajunge aplicînd direct formulele de medie integralelor care intervin în cei trei termeni ai restului (18). Rezultate de acest gen noi am mai obţinut într-un caz mai general şi în lucrarea [1]. În lucrarea [2] ne-am ocupat de alte extinderi ale formulei lui Taylor la funcţiile de două şi mai multe variabile.

În încheiere mai menţionăm că folosind funcţia auxiliară $\varphi(x, y) = R(x, y)$, unde $R(x, y)$ e dat de formula (18), am reuşit ca într-o lucrare recentă [3] să dăm o expresie integrală pentru restul unei formule de cubatură destul de generală.

Universitatea „Babeş-Bolyai" Cluj
Catedra de analiză

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА В ФОРМУЛЕ ТИПА ТЕЙЛОРА ДЛЯ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Основной результат содержается в установлении данного в (18) интегрального выражения для остаточного члена формулы типа Тейлора (11).

L'EXPRESSION INTÉGRALE DU RESTE DANS UNE FORMULE DU TYPE TAYLOR POUR LES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

RÉSUMÉ

Le principal résultat consiste dans l'établissement de l'expression intégrale de (18) pour le reste de la formule du type Taylor (11).

BIBLIOGRAFIE

1. D. D. Stancu, *Consideraţii asupra interpolării polinomiale a funcţiilor de mai multe variabile*, Bul. Univ. Babeş-Bolyai, Cluj, I. 1–2, 43–89 (1957).
2. — *О некоторых разложениях Тейлора типа для функций многих переменных.* Revue de Math. pures et appliqués, IV, 2, 249–265 (1959).
3. — *Asupra integrării numerice a funcţiilor de două variabile.* Stud. şi Cercet. Şt. Matematică, Acad. R. P. R. Filiala Iaşi, 9, 1, 5–21 (1958).

Primit la 2. XI. 1959.