# ASUPRA APROXIMAŢIEI DE CALCUL BIDIMENSIONAL ÎN CAZUL UNEI STĂRI DE TENSIUNE PLANĂ*)

DE

P. P. TEODORESCU
(Bucureşti)

*Lucrare prezentată la sesiunea ştiinţifică din iunie 1958 a Universităţii „C. I. Parhon", Bucureşti.*

1. Se ştie că problema spaţială a teoriei elasticităţii se reduce (într-o rezolvare în tensiuni) la una din grupele de ecuaţii de continuitate, exprimate în tensiuni, ale lui Beltrami şi Mitchell

$$\begin{aligned}
\Delta \sigma_x + \frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} &= -\frac{\mu}{1-\mu}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial X}{\partial x},\\
\Delta \sigma_y + \frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} &= -\frac{\mu}{1-\mu}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial Y}{\partial y},\\
\Delta \sigma_z + \frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} &= -\frac{\mu}{1-\mu}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial Z}{\partial z},
\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
\Delta \tau_{yz} + \frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} &= -\left(\frac{\partial Y}{\partial z}+\frac{\partial Z}{\partial y}\right),\\
\Delta \tau_{zx} + \frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial z \partial x} &= -\left(\frac{\partial Z}{\partial x}+\frac{\partial X}{\partial z}\right),\\
\Delta \tau_{xy} + \frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} &= -\left(\frac{\partial X}{\partial y}+\frac{\partial Y}{\partial x}\right)
\end{aligned} \tag{1'}$$

şi la ecuaţiile de echilibru

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0,\\
\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0,\\
\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0,
\end{aligned} \tag{2}$$

datorite lui Cauchy.

---

*) Această lucrare se publică şi în limba franceză, în revista „Mathematica", vol. 1(24), fascicola 2 (1959).

Aici $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ sînt tensiunile normale, $\tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$ sînt tensiunile tangenţiale, $X, Y, Z$ sînt forţele masice iar $\mu$ este coeficientul de contracţie transversală al lui Poisson; invariantul $\Theta$ este suma tensiunilor normale

$$\Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \tag{3}$$

şi $\Delta$ este operatorul lui Laplace

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{4}$$

Soluţia acestei probleme generale este destul de dificilă. De aceea se fac diferite aproximaţii, valabile practic în unele cazuri particulare.

**2.** O problemă importantă, care se întîlneşte frecvent în practica inginerească, este cea a unei stări de tensiune plană (starea de tensiune produsă într-o placă plană, supusă la sarcini exterioare paralele cu planul median).

Fie $h$ grosimea plăcii pe direcţia $z$ ($h << a, b$, dimensiunile maxime ale plăcii în planul median $Oxy$). În cazul problemei plane tehnice a teoriei elasticităţii (problema clasică) se admite folosirea de valori medii pentru tensiuni

$$\sigma_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x(z)dz, \quad \sigma_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y(z)dz, \quad \tau_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy}(z)\, dz; \tag{5}$$

de asemenea pentru deplasările $u, v$ şi pentru deformaţiile specifice $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ (stare de tensiune plană generalizată). În felul acesta a treia variabilă ($z$) dispare din calcul, obţinînd simplificări importante.

Celelalte componente ale tensorului tensiune sînt considerate, cu o bună aproximaţie, nule

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0. \tag{6}$$

Totodată alungirea specifică $\varepsilon_z$ va diferi pentru fiecare punct al plăcii; astfel planele $z = \pm \frac{h}{2}$ vor deveni suprafeţe curbe. Se produce astfel (mai ales dacă planul median nu este un plan de simetrie mecanică al plăcii, din punct de vedere al sarcinilor exterioare) o încovoiere a plăcii care, din cauza grosimii $h$ mică în raport cu celelalte două dimensiuni, va fi neglijabilă faţă de celelalte deformaţii. Într-adevăr, se ştie din problema încovoierii grinzii drepte, tratată prin mijloacele rezistenţei materialelor, că deformaţia transversală, pentru o secţiune dreptunghiulară, este dată de

$$\gamma \cong tg\gamma = \frac{\mu h}{2\varrho}, \tag{7}$$

unde $\varrho$ este raza de curbură a fibrei medii deformate a grinzii. Astfel deformaţia unghiulară $\gamma$ poate fi neglijată în raport cu deformaţiile specifice ale planului median al plăcii; condiţiile (6), impuse în cazul unei stări de tensiune plană, sînt practic îndeplinite (transmisia tensiunilor de la o faţă la alta a plăcii este uniformă).



Pe de altă parte, condiţiile (1) ne conduc, cu ajutorul legii lui Hooke

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu\ (\sigma_y + \sigma_z)\right], \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu\ (\sigma_z + \sigma_x)\right], \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu\ (\sigma_x + \sigma_y)\right], \end{aligned} \tag{8}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz}, \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx}, \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}, \tag{8'}$$

unde $E$, $G$ sînt modulele de elasticitate longitudinală, respectiv transversală, legate prin

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}, \tag{9}$$

şi cu ajutorul ecuaţiilor lui Cauchy

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \end{aligned} \tag{10'}$$

la relaţiile

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\mu}{1-\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0. \tag{11'}$$

Deplasările $u$ şi $v$ nedepinzînd de $z$, rezultă că deplasarea $w$ este aceeaşi în toate punctele planului median. Totodată relaţiile (6) şi (8) ne dau

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{\mu}{1-\mu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y), \tag{12}$$

iar (10) ne arată că $w$ depinde de variabilele $x$ şi $y$; relaţia (11') ne conduce la aceeaşi concluzie. Deci contradicţie.

Relaţiile (11) şi (11') sînt de asemenea verificate numai cu aproximaţie. Se poate admite aceasta din punct de vedere practic, deoarece deplasarea $w$ este mică în raport cu deplasările $u$ şi $v$ şi are o variaţie mică în lungul grosimii plăcii.

Se pot folosi rezultatele problemei plane „tehnice'' dacă grosimea $h$ este mică în raport cu celelalte două dimensiuni. Dacă această grosime crește, avînd de-a face cu o placă groasă, se poate întîmpla ca aproximația de calcul să nu mai fie suficientă.

O soluție mai exactă a acestei probleme cu condițiile (6), celelalte tensiuni depinzînd de toate cele trei variabile, a fost dată [7], pentru cazul $X=Y=Z=0$, folosind metodele problemei spațiale a elasticității.

Dacă grosimea $h$ este comparabilă cu celelalte dimensiuni, ajungem la problema unui corp masiv, care poate fi studiată cu metodele menționate mai sus, fără să utilizăm condițiile (6). Se pot cita astfel lucrările lui E. Sternberg și M. R. Sadowsky [4] și A. E. Green și T. J. Willmore [3].

**3.** În cele ce urmează vom studia, admițînd ipotezele (6), o placă supusă la o stare de tensiune plană, datorită nu numai sarcinilor pe frontieră dar și forțelor masice.

Se va vedea astfel că forțele masice nu pot să fie oarecare, pentru a putea verifica toate ecuațiile teoriei elasticității.

Admitem că tensiunile $\sigma_x$, $\sigma_y$, $\tau_{xy}$ și forțele masice $X$, $Y$ depind de toate cele trei variabile $x$, $y$, $z$; numai componenta $Z$ a forței masice este considerată nulă

$$Z = 0, \tag{13}$$

datorită definiției date pentru starea de tensiune plană.

Ecuațiile de echilibru (2) devin

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + X = 0, \\ &\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + Y = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Ca și în problema plană tehnică [1], [2], [5], [6], tensiunile sînt reprezentate prin

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \int X\,dx, \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \int Y dy, \end{aligned} \tag{15}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \tag{15'}$$

unde $F=F(x, y)$ este o funcție de tensiune care trebuie precizată.

În acest caz

$$\Theta = \Delta(x, y) F - \left(\int X\,dx + \int Y dy\right), \tag{16}$$

unde am menționat că operatorul $\Delta$ acționează numai asupra variabilelor $x$ și $y$.



Ținînd seama de (6) și (13), a treia dintre ecuațiile (1) și primele ecuații (1') ne dau

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right) = -\frac{\mu(1+\mu)}{1-\mu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right), \\ &\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right) = -(1+\mu)\frac{\partial Y}{\partial z}, \\ &\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right) = -(1+\mu)\frac{\partial X}{\partial z}. \end{aligned} \tag{17}$$

Pentru a putea calcula derivata $\frac{\partial\Theta}{\partial z}$, trebuie să fie îndeplinite următoarele condiții de diferențială totală exactă

$$\begin{aligned} &\frac{\mu}{1-\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 X}{\partial z^2}, \\ &\frac{\mu}{1-\mu}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 Y}{\partial z^2}, \end{aligned} \tag{18}$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial z}. \tag{18'}$$

Primele două condiții sînt verificate luînd

$$\begin{aligned} &\frac{\mu}{1-\mu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) = \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \\ &\frac{\mu}{1-\mu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) = \frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial\psi}{\partial y}. \end{aligned} \tag{19}$$

Rezultă că

$$\frac{\partial}{\partial z}(\varphi - \psi) = 0. \tag{20}$$

De asemenea relația (18') ne va da

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\varphi - \psi) = 0. \tag{21}$$

Relațiile (20) și (21) ne permit să scriem

$$\varphi - \psi = f(x, y) = f_1(x, z) + f_2(y, z). \tag{22}$$

Derivînd în raport cu $z$

$$\frac{\partial f_1(x,z)}{\partial z} + \frac{\partial f_2(y,z)}{\partial z} = 0, \tag{23}$$

obținem

$$\begin{aligned} f_1(x, z) &= g_1(x) + h_1(z), \\ f_2(y, z) &= g_2(y) + h_2(z), \end{aligned} \tag{24}$$

cu

$$h_1(z) + h_2(z) = \text{const.} \tag{24'}$$

Putem deci scrie

$$\varphi(x, y, z) = \psi(x, y, z) + \chi(x) + \varkappa(y). \tag{25}$$

Pentru ca relațiile (19) să poată da o reprezentare a forțelor masice cu ajutorul funcțiilor $\varphi$ și $\psi$, acestea din urmă trebuie să verifice următoarele relații

$$\frac{\mu}{1-\mu}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}. \tag{26}$$

Ultima relație este verificată, în virtutea formulei (25).

În concluzie se poate afirma că un calcul tridimensional (deci mai exact), cu ipotezele (6), este posibil numai dacă forțele masice sînt date de (19), cu ajutorul funcțiilor $\varphi$ și $\psi$, care verifică relațiile (25) și (26).

4. În particular, dacă forțele masice sînt uniform distribuite pe grosimea plăcii $\left(\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Y}{\partial z} = 0\right)$, relațiile (17) devin

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right) = -\frac{\mu(1+\mu)}{1-\mu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right), \\ &\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right) = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial z}\right) = 0 \end{aligned} \tag{27}$$

și condiția de diferențială totală exactă este

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = c = \text{const.} \tag{28}$$

Suma ecuațiilor (1) ne conduce la

$$\Delta\Theta = -\frac{1+\mu}{1-\mu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right). \tag{29}$$

În cazul particular care ne interesează

$$\Delta\Theta = -\frac{1+\mu}{1-\mu}c. \tag{30}$$

Din ecuațiile (27) obținem

$$\Theta = -\frac{\mu(1+\mu)}{2(1-\mu)}cz^2 + kz + \Theta_0(x, y), \tag{31}$$

unde $k$ este o constantă arbitrară; aplicînd operatorul lui Laplace $\Delta(x, y, z)$ și ținînd seama de (30), rezultă că funcția $\Theta_0(x, y)$ este dată de

$$\Delta\Theta_0 = -(1+\mu)\,c. \tag{32}$$



Ținînd seama de (15) și (31), prima ecuație (1) va putea fi scrisă sub forma

$$\Delta\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \int X dx\right) + \frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2\Theta_0}{\partial x^2} = -\frac{\mu}{1-\mu}c - 2\frac{\partial X}{\partial x}. \tag{33}$$

Observînd că

$$\Delta(x, y, z) = \Delta(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{34}$$

și folosind relațiile (28), (32), obținem

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{\mu}{1+\mu}\Theta_0\right) = -\frac{\mu}{1-\mu}c. \tag{35}$$

A doua ecuație (1) și a treia ecuație (1′) dau de asemenea

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{\mu}{1+\mu}\Theta_0\right) = -\frac{\mu}{1-\mu}c, \\ &\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{\mu}{1+\mu}\Theta_0\right) = 0. \end{aligned} \tag{35'}$$

Rezultă că

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{\mu}{1+\mu}\Theta_0 = -\frac{\mu}{2(1-\mu)}c(x^2 + y^2) + ax + by + d, \tag{36}$$

unde $a=a(z)$, $b=b(z)$ și $d=d(z)$. Integrînd, căpătăm o funcție de forma

$$F = -\frac{\mu}{2(1+\mu)}\Theta_0 z^2 - \frac{\mu}{4(1-\mu)}c\,(x^2+y^2)\,z^2 + zF_1(x, y) + F_0(x, y) + Ax + By + D, \tag{37}$$

unde $A=A(z)$, $B=B(z)$ și $D=D(z)$.

Putem lua

$$a=b=d=A=B=D=0, \tag{38}$$

deoarece la aceste funcții corespunde o stare de tensiune nulă.

Putem scrie astfel funcția de tensiune

$$F = -\frac{\mu}{2(1+\mu)}\Theta_0 z^2 - \frac{\mu}{4(1-\mu)}c\,(x^2+y^2)\,z^2 + zF_1(x, y) + F_0(x, y). \tag{39}$$

Funcția $F$ fiind legată de $\Theta$, deci și de $\Theta_0$, prin relația (16), vom aplica operatorul lui Laplace $\Delta(x, y)$ la (39). Ținînd seama de (16), (31) și (32), găsim (identificînd cele două polinoame de gradul întîi în $z$ pe care le obținem)

$$\Delta F_1 = k \tag{40}$$

și

$$\Delta F_0 = \Theta_0 + \int X\,dx + \int Y dy. \tag{41}$$

Funcţiunea $F$ a tensiunilor are deci forma

$$F\,(x, y, z) = -\frac{\mu}{2(1+\mu)} z^2 \Delta F_0 - \frac{\mu}{4(1-\mu)} c\,(x^2 + y^2) z^2 + \frac{\mu}{2(1+\mu)} z^2 \left( \int X dx + \int Y dy \right) + z F_1(x, y) + F_0(x, y). \tag{42}$$

Aplicînd încă odată operatorul $\Delta(x, y)$ relaţiei (41), în virtutea relaţiei (32), obţinem ecuaţia

$$\Delta \Delta F_0\,(x, y) = -\mu\, c + \int \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} dx + \int \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} dy. \tag{43}$$

Funcţia de tensiune $F(x, y, z)$ este deci construită cu ajutorul unei funcţii

$$F_0\,(x, y) = \overline{F}_0\,(x, y) + F'(x, y), \tag{44}$$

unde $\overline{F}_0(x, y)$ este o funcţie biarmonică

$$\Delta\, \Delta \overline{F}_0(x, y) = 0 \tag{45}$$

iar $F'(x, y)$ este o integrală particulară a ecuaţiei (43) — soluţia clasică a problemei — şi cu ajutorul unei funcţii

$$F_1\,(x, y) = \overline{F}_1(x, y) + \frac{k}{4}\,(x^2 + y^2), \tag{46}$$

unde $\overline{F}_1(x, y)$ este o funcţie armonică

$$\Delta\, \overline{F}_1(x, y) = 0. \tag{47}$$

5. În particular, dacă distribuţia tensiunilor trebuie să fie simetrică în raport cu planul $z=0$ (din cauza distribuţiei simetrice a sarcinilor exterioare) se poate lua $k = F_1 = 0$.

Observăm că, datorită relaţiei (42), se obţin tensiuni cu o variaţie parabolică pe grosimea plăcii. Astfel că ipoteza distribuţiei uniforme a tensiunilor pe grosimea $h$ este justificată dacă această grosime este mică în raport cu celelalte două dimensiuni (deoarece $z \leq \frac{h}{2} << a, b$, dimensiunile maxime pe cele două direcţii în planul median al plăcii). Se poate verifica astfel, pe baza principiului lui B. de St. Venant, că starea de tensiune este influenţată numai în zona apropiată conturului, pe o distanţă egală cu grosimea plăcii, distribuţia sarcinilor exterioare diferind, în general, de cea parabolică sau uniformă.

În felul acesta, calculul stării de tensiune plană ca o problemă bidimensională este pe deplin justificat.



## О ПРИБЛИЖЕНИИ ДВУМЕРНОЙ ВЫКЛАДКИ В СЛУЧАЕ СОСТОЯНИЯ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕНИЯ

### КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

После указания приближений, допускаемых в случае „технической” плоской задачи, автор переходит к изучению состояния плоского напряжения, в котором удовлетворены соотношения (6), а другие составляющие напряжения являются функциями всех трех переменных $x$, $y$, $z$. Для того, чтобы выкладка такого рода была бы возможна, необходимо, чтобы массовые силы были даны (19), при помощи двух функций $\varphi$ и $\psi$ удовлетворяющих соотношениям (25) и (26).

В частности, если массовые силы равномерно распределены на толщине пластинки, составляющие напряжения выражаются при помощи функции напряжения вида (42), приводящая к параболическому распределению напряжений на толщине пластинки. Оказывается, что состояние напряжения терпит влияние только в зоне близкой к границе, так что выкладка в качестве двумерной проблемы вполне оправдана.

## SUR L'APPROXIMATION DE CALCUL BIDIMENSIONNEL DANS LE CAS D'UN ÉTAT DE TENSION PLANE

### RÉSUMÉ

Après avoir montré les approximations que l'on fait dans le cas du problème plan „technique”, l'auteur passe à l'étude d'un état de tension plane où sont vérifiées les relations (6), les autres composantes de la tension étant des fonctions de toutes les trois variables $x$, $y$, $z$. Pour qu'un pareil calcul soit possible, il faut que les forces de masse soient données par (19), à l'aide de deux fonctions $\varphi$ et $\psi$, qui vérifient les relations (25) et (26).

En particulier, si les forces de masse sont uniformément distribuées sur l'épaisseur de la plaque, on exprime les composantes de la tension au moyen d'une fonction de tension de la forme (42), qui conduit à une distribution parabolique des tensions sur l'épaisseur de la plaque. On constate que l'état de tension est influencé seulement dans une zone rapprochée du contour, le calcul en tant que problème bidimensionnel étant ainsi parfaitement justifié.

BIBLIOGRAFIE


1. Airy G. B., *On the Strains in the Interior of Beams.* Adv. Sci. Rept., 1862.
2. — *Ibid.*, Phil. Trans., 153, 49 (1863).
3. Green A. E., Willmore T. J., *Three Dimensional Stress Systems in Isotropic Plates.* Proc. Roy. Soc., s. A., **193**, n° 1033 (1948).
4. Sternberg E., Sadowsky M. R., *Three Dimensional Solutions for the Stress Concentration around a Circular Hole in a Plate of arbitrary Thickness.* J. of Appl. Mech., **16**, n° 1, 27 (1949).
5. Teodorescu P. P., *O metodă de rezolvare a problemei plane a teoriei elasticității în cazul unor forțe masice oarecare.* Comunicările Acad. R. P. R., **VI**, 2, 285 (1956).
6. — *Asupra problemei plane a elasticității în cazul unor forțe masice oarecare.* Bul. științ. Acad. R.P.R., Secția de științe matematice și fizice, **IX**, 2, 481 (1957).
7. Timoshenko S., Goodier J. N., *Thery of Elasticity*, II-nd ed., Mc Graw-Hill New York, 1951.


Primit la 17. IX. 1959.