CERCETĂRI ASUPRA DISTRIBUŢIEI RĂDĂCINILOR REALE ALE INTEGRALELOR ECUAŢIILOR DIFERENŢIALE, ÎN LEGĂTURĂ CU UNELE PROBLEME POLILOCALE

DE

OLEG ARAMĂ

(Cluj)

Lucrare prezentată la sesiunea ştiinţifică din 25 martie 1960 a Academiei R.P.R. – Filiala Cluj.

1. Fie dată o ecuaţie diferenţială liniară şi omogenă

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0, \tag{1}$$

cu coeficienţii $a_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ continui într-un interval semiînchis $[a, b)$, b reprezentînd un număr finit sau infinit. Fie Y mulţimea integralelor acestei ecuaţii în intervalul considerat.

Se spune că familia Y posedă proprietatea $I_n[a, b)$, (adică este interpolatoare de ordinul n pe noduri simple în intervalul $[a, b)$), dacă oricare ar fi n noduri distincte $x_1, x_2, \ldots, x_n$, situate în intervalul $[a, b)$ şi oricare ar fi valorile reale $y_1, y_2, \ldots, y_n$, există o integrală şi una singură $y(x) \in Y$, care să satisfacă condiţiile $y(x_i) = y_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

După cum se ştie, proprietatea $I_n[a, b)$ a familiei Y este echivalentă cu următoarea proprietate de neoscilaţie a integralelor ecuaţiei (1) în intervalul $[a, b)$:

Oricare ar fi integrala neidentic nulă $y(x)$ a ecuaţiei diferenţiale (1), ea nu are în intervalul $[a, b)$ mai mult de $n - 1$ rădăcini distincte.

În cadrul Secţiei 1-a a Institutului de calcul din Cluj, prof. T. Popoviciu a pus problema caracterizării proprietăţii $I_n[a, b)$ a familiei Y, prin proprietăţi privind coeficienţii ecuaţiei diferenţiale. Ocupîndu-mă cu această problemă, am obţinut în lucrarea [1] ca prim rezultat, următoarea teoremă, care complectează unele rezultate a lui G. Pólya [7].

TEOREMA (*). *Fie $h_1(x), h_2(x), \ldots, h_{n-1}(x)$ integrale ale ecuaţiei diferenţiale* (1) *satisfăcînd în punctul $x = a$ egalităţile*

$$
\begin{aligned}
&h_1(a) = h_1'(a) = \ldots\ldots\ldots = h_1^{(n-2)}(a) = 0,\ h_1^{(n-1)}(a) = 1\\
&h_2(a) = h_2'(a) = \ldots = h_2^{(n-3)}(a) = 0,\ h_2^{(n-2)}(a) = 1\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2)\\
&h_{n-2}(a) = h_{n-2}'(a) = 0,\ h_{n-2}''(a) = 1\\
&h_{n-1}(a) = 0,\ h_{n-1}'(a) = 1.
\end{aligned}
$$

Condiția necesară și suficientă ca familia Y să aibă proprietatea $I_n[a, b)$ este ca pentru orice sistem de $n - 1$ integrale $h_1(x), h_2(x), \ldots, h_{n-1}(x)$ a ecuației diferențiale (1), *satisfăcînd condițiile* (2), *să aibe loc în intervalul deschis* (a, b) *relațiile* : [1]

$$h_1(x) \neq 0,\ W(h_1, h_2) \neq 0, \ldots, W(h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}) \neq 0. \qquad (3)$$

Aici $W(h_1, h_2, \ldots, h_i)$ *reprezintă wronskianul funcțiilor* $h_1(x)$, $h_2(x), \ldots, h_i(x)$.

Tot în lucrarea [1] s-a arătat că *dacă ecuația diferențială* (1) *admite un sistem particular de $n - 1$ integrale $h_1(x), h_2(x), \ldots, h_{n-1}(x)$ satisfăcînd relațiile* (3) *în intervalul* (a, b), *atunci orice alt sistem de $n - 1$ integrale satisfăcînd condițiile* (2), *va verifica de asemenea relațiile* (3) *în intervalul* (a, b).

În lucrarea de față se dă o interpretare geometrică a condiției exprimate de teorema (*), ceea ce permite o nouă caracterizare a proprietății $I_n[a, b)$ a familiei Y, prin existența soluțiilor unor anumite probleme la limită *bilocale* (teorema 2).

Înainte de a trece la expunerea propriu-zisă, ținem să enunțăm încă următoarea teoremă care va fi utilizată în cele ce urmează, — demonstrația ei fiind de asemenea dată în lucrarea [1].

TEOREMA (**) *Să presupunem că familia Y a integralelor ecuației diferențiale* (1) *are proprietatea* $I_n[a, b)$.[2] *Fie $y(x) \in Y$ o integrală oarecare neidentic nulă și fie $x_1, x_2, \ldots, x_m$ $(m \leq n - 1)$ eventualele ei rădăcini distincte din intervalul* $[a, b)$. *Să notăm respectiv cu $p_1, p_2, \ldots, p_m$ ordinele lor de multiplicitate.*

În ipotezele formulate, are loc inegalitatea $p_1 + p_2 + \ldots + p_m \leq n - 1$.

2. În cele ce urmează vom nota cu Y_i $(i = 1, 2, \ldots, n - 1)$ submulțimea integralelor $y(x) \in Y$, care satisfac condițiile

$$y(a) = y'(a) = \ldots = y^{(i-1)}(a) = 0,\ y^{(i)}(a) \neq 0. \qquad (4)$$

Are loc următoarea teoremă :

TEOREMA 1. *Condiția necesară și suficientă ca familia Y a integralelor ecuației diferențiale* (1) *să aibă proprietatea $I_n[a, b)$ este ca oricare ar fi*

[1]) Suficiența condiției (3) pentru ca să aibă loc proprietatea $I_n(a, b)$ referitoare la un interval *deschis* (a, b) a fost stabilită de G. Pólya în lucrarea [7], teorema 2. Din demonstrația dată de G. Pólya acestei teoreme nu rezultă însă proprietatea $I_n[a, b)$ relativă la un interval *semi-închis* $[a, b)$.

[2]) Aceasta revine, după cum s-a menționat anterior, a afirma că ecuația diferențială (1) nu admite nici o integrală neidentic nulă care să aibă în intervalul $[a, b)$ mai mult de $n - 1$ rădăcini distincte.

numărul natural i $(i \leq n - 1)$, submulțimea corespunzătoare Y_i să nu conțină nici o integrală $y(x)$ care să aibă în intervalul deschis (a, b) vreo rădăcină x_0, multiplă de ordin $\geq n - i$.

Demonstrație. 1°. Presupunem întîi că familia Y are proprietatea $I_n[a, b)$. Fie i unul dintre numerele $1, 2, \ldots, n - 1$. Să demonstrăm că submulțimea corespunzătoare Y_i nu conține nici o integrală care să aibe în intervalul (a, b) vreo rădăcină x_0 multiplă de ordin $\geq n - i$. În acest scop să presupunem prin absurd că ar exista o astfel de integrală $y_0(x) \in Y_i$, care să aibă în intervalul (a, b) o rădăcină x_0 multiplă de ordin $p_{x_0} \geq n - i$. Întrucît $y_0(x)$ aparține submulțimii Y_i, rezultă din definiția acestei submulțimi că $y_0(x)$ nu este identic nulă în intervalul $[a, b)$ și că admite numărul $x = a$ ca rădăcină multiplă de ordinul $p_a = i$. Ajungem astfel la concluzia că ecuația diferențială (1) admite o integrală neidentic nulă $y_0(x)$ pentru care numerele $x = a$, și $x = x_0$ sînt rădăcini avînd ordinele de multiplicitate $p_a = i$ respectiv $p_{x_0} \geq n - i$. Suma acestor ordine de multiplicitate satisface inegalitatea $p_a + p_{x_0} \geq n$, care contrazice afirmația teoremei (**).

2°. Să presupunem acuma că oricare ar fi numărul natural k satisfăcînd inegalitățile $1 \leq k \leq n - 1$, submulțimea corespunzătoare Y_k nu conține nici o integrală $y(x)$ care să aibă în intervalul deschis (a, b) vreo rădăcină x_0 multiplă de ordin $\geq n - k$. Vom arăta că în această ipoteză familia Y are proprietatea $I_n[a, b)$. În acest scop considerăm un sistem de integrale $h_1(x), h_2(x), \ldots, h_{n-1}(x)$ satisfăcînd condițiile (2). Cu ajutorul acestor integrale alcătuim șirul de funcții

$$W(h_1) = h_1(x),\ W(h_1, h_2), \ldots, W(h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}). \qquad (5)$$

Să presupunem prin absurd că în ipotezele făcute, familia Y nu ar avea proprietatea $I_n[a, b)$. Atunci conform teoremei (*) ar rezulta că cel puțin una din funcțiile șirului (5) se anulează în vreun punct x_0 din intervalul deschis (a, b). Să presupunem că prima funcție din șirul (5) care se anulează în punctul x_0 este funcția $W(h_1, h_2, \ldots, h_{n-i})$. Observăm că în mod necesar are loc inegalitatea $n - i > 1$, căci în caz contrar, adică în cazul $n - i = 1$, funcția $W(h_1, h_2, \ldots, h_{n-i})$, care se anulează în punctul $x_0 \in (a, b)$, ar fi funcția $h_1(x)$. Cum integrala $h_1(x)$ aparține familiei Y_{n-1}, s-ar contrazice ipoteza că orice integrală din familia Y_{n-1} nu se anulează în intervalul (a, b). Au loc deci relațiile :

$$
\left.
\begin{aligned}
&W(h_1, h_2, \ldots, h_{n-i})\big|_{x=x_0} = 0 \quad (n - i > 1),\\
&W(h_1, h_2, \ldots, h_{n-i-1})\big|_{x=x_0} \neq 0.
\end{aligned}
\right\} \qquad (6)
$$

Fie acum sistemul de ecuații în necunoscutele $C_1, C_2, \ldots, C_{n-i}$:

$$
\left.
\begin{aligned}
&C_1 h_1(x_0) + C_2 h_2(x_0) + \ldots + C_{n-i} h_{n-i}(x_0) = 0\\
&C_1 h_1'(x_0) + C_2 h_2'(x^0) + \ldots + C_{n-i} h_{n-i}'(x_0) = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&C_1 h_1^{(n-i-1)}(x_0) + C_2 h_2^{(n-i-1)}(x_0) + \ldots + C_{n-i} h_{n-i}^{(n-i-1)}(x_0) = 0.
\end{aligned}
\right\} \qquad (7)
$$

Din relațiile (6) rezultă că sistemul (7) admite soluții pentru care $C_{n-i} \neq 0$. Fie $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \ldots, \bar{C}_{n-i}$ o astfel de soluție. Considerăm integrala

$$\bar{y}(x) = \bar{C}_1 h_1(x) + \bar{C}_2 h_2(x) + \ldots + \bar{C}_{n-i} h_{n-i}(x).$$

Observăm întîi că ea nu poate fi identic nulă întrucît $\bar{C}_{n-i} \neq 0$. Apoi, ținînd seama de relațiile (2) rezultă că

$$\bar{y}(a) = \bar{y}'(a) = \ldots = \bar{y}^{(i-1)}(a) = 0; \ \bar{y}^{(i)}(a) = \bar{C}_{n-1} \neq 0. \tag{8}$$

Aceste relații ne arată că integrala $\bar{y}(x)$ aparține submulțimii Y_i. Prin ipoteză însă nici o integrală a submulțimii Y_i nu admite în intervalul (a, b) rădăcini de ordin $\geqq n - i$. În particular $\bar{y}(x)$ nu va avea în intervalul (a, b) nici o rădăcină de ordin $\geqq n - i$. Această afirmație contrazice însă egalitățile (7) care arată că integrala $y(x)$ admite numărul x_0 ca rădăcină de ordin $\geqq n - i$.

Rezultă în definitiv că familia Y are proprietatea $I_n[a, b)$. Astfel teorema este demonstrată.

3. Să considerăm acuma următoarele condiții bilocale neomogene.

$$\begin{aligned} &y(a) = y_a^{(0)}, y'(a) = y_a^{(1)}, \ldots, y^{(i-1)}(a) = y_a^{(i-1)} \\ &y(\xi) = y_\xi^{(0)}, y'(\xi) = y_\xi^{(1)}, \ldots, y^{(n-i-1)}(\xi) = y_\xi^{(n-i-1)}. \end{aligned} \tag{K_i}$$

Aici nodul $x = a$ coincide cu extremitatea stîngă a intervalului $[a, b)$ în care sînt continui coeficienții ecuației diferențiale (1). Cel de al doilea nod $x = \xi \in (a, b)$, precum și sistemele de numere reale $\{y_a^{(0)}, y_a^{(1)}, \ldots, y_a^{(i-1)}\}$, $\{y_\xi^{(0)}, y_\xi^{(1)}, \ldots, y_\xi^{(n-i-1)}\}$ sunt alese în mod arbitrar. Numărul natural i este ales de asemenea în mod arbitrar, cu condiția $i \leqq n - 1$.

O consecință imediată a teoremei 1 este următoarea:

TEOREMA 2. *Condiția necesară și suficientă ca familia Y a integralelor ecuației diferențiale (1) să aibă proprietatea $I_n[a, b)$, este ca această ecuație să admită o integrală $y(x)$ și una singură, satisfăcînd condițiile (K_i), oricare ar fi numărul natural i $(i \leqq n - 1)$, — oricare ar fi nodul $\xi \in (a, b)$ și oricare ar fi sistemele de numere reale $\{y_a^{(0)}, y_a^{(1)}, \ldots, y_a^{(i-1)}\}$, $\{y_\xi^{(0)}, y_\xi^{(1)}, \ldots, y_\xi^{(n-i-1)}\}$.*

4. Să considerăm din nou submulțimile Y_i, $(i = 1, 2, \ldots, n - 1)$. Pentru integralele $y(x)$ aparținînd submulțimii Y_i, definim funcționala $\rho_i[y]$ precum urmează:

1°. Dacă integrala $y(x) \in Y_i$ admite în intervalul deschis (a, b) cel puțin o rădăcină ξ avînd un ordin de multiplicitate $\geqq n - i$, atunci considerăm

$$\rho_i[y] = \min \xi, \tag{9}$$

minimul fiind luat relativ la mulțimea $\{\xi\}$ a tuturor rădăcinilor de ordin $\geqq n - i$ din intervalul (a, b) ale integralei $y(x)$ considerate.

2°. Dacă integrala $y(x) \in Y_i$ nu admite în intervalul deschis (a, b) nici o rădăcină de ordin $\geqq n - i$, atunci definim

$$\rho_i[y] = b. \tag{10}$$

Fie în continuare

$$\rho_i = \inf_{y \in Y_i} \rho_i[y] \tag{11}$$

și

$$\rho = \min \{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{n-1}\}. \tag{12}$$

Are loc următoarea teoremă:

TEOREMA 3. *Dacă ecuația diferențială (1) are coeficienții continui în intervalul semi-închis $[a, b)$, atunci numărul maxim posibil ρ, $(a < \rho \leqq b)$, pentru care are loc proprietatea $I_n[a, \rho)$ a familiei Y, este numărul ρ definit de relațiile (9)—(12). Marginea inferioară (triplă) care difinește numărul ρ prin aceste relații, este atinsă.*

Demonstrație. Prima parte a teoremei 3 este o consecință imediată a teoremei 1.

Vom arăta că marginea inferioară (triplă) care definește numărul ρ prin relațiile (9)—(12), este atinsă. În acest scop considerăm $n - 1$ integrale $h_1(x), h_2(x), \ldots, h_{n-1}(x)$, ale ecuației diferențiale (1), satisfăcînd condițiile (2). Cu ajutorul acestor integrale alcătuim șirul de funcții:

$$h_1(x), \ W(h_1, h_2), \ldots, W(h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}). \tag{13}$$

Din teorema (*) și din teorema 1 rezultă că cel puțin una dintre funcțiile șirului (13) se anulează pentru $x = \rho$. Să presupunem că prima funcție din șirul (13) care se anulează în punctul $x = \rho$ este funcția $W(h_1, h_2, \ldots, h_{n-i})$. Vom avea deci

$$W(h_1, h_2, \ldots, h_{n-i})|_{x=\rho} = 0. \tag{14}$$

Urmînd un raționament analog cu acela utilizat la demonstrarea suficienței condiției exprimate de teorema 1, se deduce din relația (14) existența unei integrale neidentic nule $\bar{y}(x)$, satisfăcînd condițiilor:

$$\bar{y}(a) = \bar{y}'(a) = \ldots = \bar{y}^{(i-1)}(a) = 0; \ \bar{y}^{(i)}(a) \neq 0$$

$$\bar{y}(\rho) = \bar{y}'(\rho) = \ldots = \bar{y}^{(n-i-1)}(\rho) = 0.$$

ceea ce justifică afirmația făcută.

*

În continuare, ținînd seamă de teorema (**), obținem următoarea teoremă, care apare o consecință imediată a teoremelor 1, 2, 3:

TEOREMA 4. *Pentruca ecuația diferențială (1) avînd coeficienții continui în intervalul $[a, b)$, să nu admită nici o integrală neidentic nulă, care să aibă în intervalul $[a, b)$ mai mult de $n - 1$ rădăcini (fiecare rădăcină fiind* *considerată de atîtea ori, cît este ordinul ei de multiplicitate), este necesar și suficient ca să fie realizată sau condiția ce intervine în teorema 1, sau aceea care intervine în teorema 2. Intervalul $[a, \rho)$ care intervine în teorema 3 va reprezenta intervalul de lungime maximă, cu extremitatea stîngă $x = a$ dată, în care are loc proprietatea de mai sus de neoscilație a integralelor ecuației diferențiale* (1).

5. Ne referim acuma din nou la proprietatea $I_n[a, r)$ de interpolație pe noduri simple a familiei Y într-un interval $[a, r)$, $(a < r < b)$. După cum se știe, are loc următoarea teoremă :

Condiția necesară și suficientă ca familia Y să aibă proprietatea $I_n[a, r)$, este ca ecuația diferențială (1) *să nu admită nici o integrală neidentic nulă, care să aibă în intervalul $[a, r)$ mai mult de $n - 1$ rădăcini distincte.*

Pentru a afla numărul maxim posibil r, pentru care familia Y are proprietatea $I_n[a, r)$, sîntem conduși la următoarele considerații :

Pe mulțimea integralelor neidentic nule ale familiei Y definim funcționala $r[y]$ precum urmează :

1°. Dacă integrala $y(x)$ admite în intervalul $[a, b)$ cel puțin n rădăcini distincte $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, pe care le presupunem consecutive și situate imediat la dreapta punctului $x = a$, $(a \leq x_1)$, atunci considerăm

$$r[y] = x_n. \tag{15}$$

2°. Dacă numărul rădăcinilor distincte din intervalul $[a, b)$ ale integralei $y(x)$ este mai mic ca n, atunci considerăm

$$r[y] = b. \tag{16}$$

Asociem familiei Y numărul real r definit astfel

$$r = \inf_{y \in Y} r[y]. \tag{17}$$

Ținînd seamă de teorema de echivalență enunțată anterior, se constată cu ușurință că numărul maxim posibil r, pentru care familia Y are proprietatea $I_n[a, r)$, este numărul r definit de relațiile (15)—(17). Acest rezultat împreună cu afirmația teoremei 3 ne conduce la :

TEOREMA 5. *Are loc egalitatea $r = \rho$, adică*

$$\inf_{y \in Y} r[y] = \min_{i=1,2,\ldots,n-1} \left\{ \inf_{y \in Y_i} \rho_i[y] \right\}, \tag{18}$$

marginea inferioară (triplă) din membrul al doilea al relației (18) *fiind atinsă.*

6. *Observație generală.* Teoria expusă anterior în cazul intervalelor de forma $[a, b)$ se poate extinde îndată la cazul intervalelor de forma $(\alpha, \beta]$, unde α reprezintă un număr finit sau $-\infty$. Teoremele (*), (**), 1, 2, 3, 4 și 5, se vor menține adevărate, cu următoarele modificări :

I. Pretutindeni, în locul intervalului $[a, b)$, respectiv (a, b), se va considera intervalul $(\alpha, \beta]$, respectiv (α, β) și de asemenea în locul proprietății $I_n[a, b)$, se va considera proprietatea $I_n(\alpha, \beta]$.

II. În enunțul teoremei (*), se va presupune că integralele $h_1(x)$, $h_2(x), \ldots, h_{n-1}(x)$ satisfac în locul condițiilor (2) scrise în punctul $x = a$, următoarele condiții în punctul $x = \beta$:

$$\begin{gathered} h_1(\beta) = h_1'(\beta) = \ldots\ldots\ldots = h_1^{(n-2)}(\beta) = 0,\ h_1^{(n-1)}(\beta) = 1 \\ h_2(\beta) = h_2'(\beta) = \ldots = h_2^{(n-3)}(\beta) = 0,\ h_2^{(n-2)}(\beta) = 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_{n-2}(\beta) = h_{n-2}'(\beta) = 0,\ h_{n-2}''(\beta) = 1. \\ h_{n-1}(\beta) = 0,\ h_{n-1}'(\beta) = 1. \end{gathered} \tag{2'}$$

III. În locul submulțimilor $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n-1}$ care intervin în enunțul teoremelor 1, 3, 4, 5 se vor considera submulțimile $\bar{Y}_1, Y_2, \ldots, \bar{Y}_{n-1}$, definite precum urmează :

$\bar{Y}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, va reprezenta submulțimea integralelor $y(x) \in Y$, care satisfac în punctul $x = \beta$ condițiile

$$y(\beta) = y'(\beta) = \ldots = y^{(i-1)}(\beta) = 0, \quad y^{(i)}(\beta) \neq 0. \tag{4'}$$

IV. În locul condițiilor bilocale (K_i), care intervin în enunțul teoremei 2, considerăm următoarele condiții bilocale, pe care le notăm $(\bar{K}_i)$:

$$\begin{gathered} y(\beta) = y_\beta^{(0)}, y'(\beta) = y_\beta^{(1)}, \ldots, y^{(i-1)}(\beta) = y_\beta^{i-1} \\ y(\xi) = y_\xi^{(0)}, y'(\xi) = y_\xi^{(1)}, \ldots, y^{(n-i-1)}(\xi) = y_\xi^{(n-i-1)}. \end{gathered} \tag{$\bar{K}_i$}$$

Aici nodul $x = \beta$ coincide cu extremitatea dreaptă a intervalului $(\alpha, \beta]$, în care se presupune că sînt continui coeficienții ecuației diferențiale (1). Cel de al doilea nod $\xi \in (\alpha, \beta)$, precum și sistemele de numere reale $\{y_\beta^{(0)}, y_\beta^{(1)}, \ldots, y_\beta^{(i-1)}\}$, $\{y_\xi^{(0)}, y_\xi^{(1)}, \ldots, y^{(n-i-1)}\}$ sînt alese în mod arbitrar. Numărul natural i este ales de asemenea în mod arbitrar, cu condiția $i \leq n-1$.

V. În locul funcționalelor $\rho_i[y]$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ și a numărului ρ, se vor considera funcționalele $\bar{\rho}_i[y]$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ și numărul $\bar{\rho}$, definite respectiv pe mulțimile $\bar{Y}_i$ precum urmează :

1°. Dacă integrala $y(x) \in \bar{Y}_i$ admite în intervalul deschis (α, β) cel puțin o rădăcină $x = \xi$, avînd ordinul de multiplicitate $\geq n - i$, atunci considerăm

$$\bar{\rho}_i[y] = \max \xi, \tag{9'}$$

maximul fiind considerat relativ la mulțimea $\{\xi\}$ a tuturor rădăcinilor de ordin $\geq n - i$ din intervalul (α, β) ale integralei $y(x)$ considerate.

2°. Dacă integrala $y(x) \in \bar{Y}_i$ nu admite în intervalul deschis (α, β) nici o rădăcină de ordin $\geq n - i$, atunci considerăm

$$\bar{\rho}_i[y] = \alpha. \tag{10'}$$

Fie în continuare

$$\bar{\rho}_i = \sup_{y\in \bar{Y}_i} \bar{\rho}_i[y] \tag{11'}$$

şi

$$\bar{\rho} = \max\{\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2, \ldots, \bar{\rho}_{n-1}\}. \tag{12'}$$

Cu aceste precizări, de exemplu enunţul teoremei 3 se modifică astfel :

TEOREMA 3*. *Dacă ecuaţia diferenţială* (1) *are coeficienţii continui în intervalul semi-închis* $(\alpha, \beta]$, *atunci numărul minim posibil* $\bar{\rho}$, $(\alpha \leq \bar{\rho} < \beta)$, *pentru care are loc proprietatea* $I_n(\bar{\rho}, \beta]$ *a familiei* Y, *este numărul* $\bar{\rho}$ *definit de relaţiile* (9')—(12'). *Marginea superioară (triplă) care defineşte numărul* $\bar{\rho}$ *prin aceste relaţii, este atinsă.*

VI. În sfîrşit, în locul funcţionalei $r[y]$, $y \in Y$, considerăm funcţionala $\bar{r}[y]$ definită pe mulţimea integralelor neidentic nule, precum urmează :

1°. Dacă integrala $y(x)$ admite în intervalul $(\alpha, \beta]$ cel puţin n rădăcini distincte $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, pe care le presupunem consecutive şi situate imediat la stînga punctului $x = \beta$, atunci considerăm

$$\bar{r}[y] = x_1. \tag{15'}$$

2°. Dacă numărul rădăcinilor distincte din intervalul $(\alpha, \beta]$ ale integralei $y(x)$ este mai mic decît n, atunci considerăm

$$\bar{r}[y] = \alpha. \tag{16'}$$

Asociem familiei Y numărul real $\bar{r}$ definit astfel :

$$\bar{r} = \sup_{y\in Y} \bar{r}[y]. \tag{17'}$$

Cu această precizare, enunţul teoremei 5 se modifică în cazul intervalului $(\alpha, \beta]$ astfel :

TEOREMA 5*. *Are loc egalitatea* $\bar{r} = \bar{\rho}$, *adică*

$$\sup_{y\in Y} \bar{r}[y] = \max_i \{\sup_{y\in \bar{Y}_i} \bar{\rho}_i[y]\}, \tag{18'}$$

marginea superioară (triplă) din membrul al doilea al relaţiei (18') fiind atinsă.

APLICAŢII

7. Să considerăm o ecuaţie diferenţială liniară şi omogenă de ordinul 4, cu coeficienţi constanţi reali

$$y^{(4)} + a_1 y''' + a_2 y'' + a_3 y' + a_4 y = 0. \tag{19}$$

Să presupunem că polinomul ei caracteristic are două rădăcini reale şi distincte şi două rădăcini complexe.

Ne propunem să determinăm lungimea H a intervalelor maxime de forma $[a, a+h)$ în care familia Y a integralelor ecuaţiei diferenţiale considerate să aibă proprietatea $I_4[a, a+h)$.

Se constată însă uşor că în cazul ecuaţiilor diferenţiale cu coeficienţi constanţi, numărul H nu depinde de numărul a care reprezintă extremitatea din stînga a intervalului $[a, a+h)$ considerat. Astfel se poate lua $a = 0$. Cu această observaţie, din teorema 3 rezultă că numărul H va fi egal cu numărul ρ definit de egalitatea (12), considerîndu-se $a = 0$.

În lucrarea [2] s-a arătat că, în ipotezele făcute, determinarea numărului H corespunzător ecuaţiei (19) se poate reduce la cazul mai simplu în care rădăcinile complexe ale polinomului caracteristic sînt $+i$ şi $-i$. Pentru a nu complica expunerea, vom presupune în cele ce urmează că rădăcinile reale r_1 şi r_2 ale polinomului caracteristic satisfac inegalitatea $r_1 r_2 > 1$. Tot în lucrarea [2] s-a arătat că :

In ipoteza $r_1 r_2 > 1$, *orice curbă integrală care nu se reduce la axa Ox, nu poate avea două puncte distincte de tangenţă cu axa Ox (lema 2).* (20)

De asemenea s-a arătat că :

In ipoteza $r_1 r_2 > 1$, *dacă o integrală neidentic nulă* $y(x)$ *a ecuaţiei diferenţiale* (19) *se anulează împreună cu derivatele ei de ordinul întîi şi doi într-un punct* x_0, *atunci curba integrală corespunzătoare nu mai taie axa Ox la dreapta, respectiv la stînga punctului de contact* x_0, *după cum* $r_1 > 0$ *sau* $r_1 < 0$ *(lema 4 şi* 4_1*).* (21)

Astfel sîntem conduşi să distingem următoarele două subcazuri :

Subcazul 1. $r_1 r_2 > 1$, $r_1 < 0$, $r_2 < 0$

În acest subcaz vom considera ca interval de definiţie pentru ecuaţia diferenţială (19), intervalul $[0, \infty)$, ceea ce revine a lua $a = 0$, $b = \infty$. Din afirmaţiile (20) şi (21), — ţinînd seamă de notaţiile (9), (10), (11) utilizate cu ocazia stabilirii teoremei 3, rezultă în subcazul de faţă egalităţile :

$$\rho_1 = \rho_2 = b = \infty. \tag{22}$$

Într-adevăr, fie $y_2(x)$ o integrală aparţinînd submulţimii Y_2. Conform definiţiei acestei submulţimi, integrala considerată nu poate fi identic nulă şi admite numărul $x = a = 0$ ca rădăcină multiplă de ordinul 2. O astfel de integrală nu poate avea nici o rădăcină pozitivă de ordin ≥ 2, întrucît în caz contrar, s-ar contrazice afirmaţia (20). Rezultă deci că $\rho_2 = b = \infty$.

La fel, fie $y_1(x)$ o integrală aparţinînd submulţimii Y_1. Conform definiţiei acestei submulţimi, $y_1(x)$ nu poate fi identic nulă şi admite numărul $x = a = 0$ ca rădăcină simplă. O astfel de integrală nu poate avea nici o rădăcină pozitivă de ordinul 3, întrucît în caz afirmativ s-ar contrazice propoziţia (21), — integrala considerată anulîndu-se la stînga rădăcinii triple, anume în punctul $x=0$. De asemenea integrala $y_1(x)$ nu poate avea nici o rădăcină multiplă de ordin ≥ 3, întrucît în caz afirmativ, $y_1(x)$ ar fi identic nulă.

Rezultă în definitiv egalitatea $\rho_1 = b = \infty$.

Din egalităţile (22) rezultă.

$$\rho = \min\{\rho_1, \rho_2, \rho_3\} = \rho_3. \tag{23}$$

Pentru a afla numărul ρ_3, este suficient să considerăm o integrală particulară $y(x)$, aleasă după voie din submulţimea Y_3, deci satisfăcînd condiţiile

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, \quad y'''(0) \neq 0 \tag{24}$$

şi să-i aflăm cea mai mică rădăcină pozitivă [3]. Această rădăcină va reprezenta numărul ρ_3 şi deci, conform relaţiei (23), numărul $\rho = H$. Se constată îndată că o integrală care satisface condiţiile (24) este următoarea

$$\begin{gathered} y(x) = (1 + r_1^2)\, e^{r_2 x} - (1 + r_2^2)\, e^{r_1 x} - \\ - (r_1 - r_2)\, [(r_1 r_2 - 1) \sin x + (r_1 + r_2) \cos x] \end{gathered} \tag{25}$$

şi deci numărul $\rho = H$ căutat este egal cu cea mai mică rădăcină pozitivă a următoarei ecuaţii în x:

$$(1 + r_1^2)\, e^{r_2 x} - (1 + r_2^2)\, e^{r_1 x} - (r_1 - r_2) [(r_1 r_2 - 1) \sin x + (r_1 + r_2) \cos x] = 0. \tag{26}$$

Subcazul 2. $r_1 r_2 > 1$, $r_1 > 0$, $r_2 > 0$.

În acest subcaz, vom considera ca interval de definiţie pentru ecuaţia diferenţială (19) intervalul $(-\infty, 0]$, ceea ce revine a lua $\alpha = -\infty$, $\beta = 0$. Din afirmaţiile (20) şi (21), ţinînd seamă de notaţiile utilizate cu ocazia enunţării teoremei 3, rezultă în cazul de faţă egalităţile:

$$\bar{\rho}_1 = \bar{\rho}_2 = \alpha = -\infty. \tag{27}$$

Într-adevăr, faptul că $\bar{\rho}_2 = \alpha = -\infty$ rezultă în mod evident din proprietatea (20) precum şi din definiţia numărului $\bar{\rho}_2$. Să arătăm că $\bar{\rho}_1 = \alpha = -\infty$. Fie în acest scop $y_1(x)$ o integrală aparţinînd submulţimii $\bar{Y}_1$. Conform definiţiei acestei submulţii, $y_1(x)$ nu poate fi identic nulă şi admite numărul $x = \beta = 0$ ca rădăcină simplă. O astfel de integrală nu poate avea nici o rădăcină negativă de ordinul 3, întrucît în caz afirmativ s-ar contrazice afirmaţia (21), — integrala $y_1(x)$ considerată, anulîndu-se la dreapta rădăcinii triple, anume în punctul $x = 0$. De asemenea, integrala $y_1(x)$ nu poate avea nici o rădăcină multiplă de ordin > 3, întrucît în caz afirmativ, $y_1(x)$ ar fi identic nulă ceeace ar contrazice o proprietate de definiţie a mulţimii $\bar{Y}_1$. Rezultă în definitiv egalităţile $\bar{\rho}_1 = \alpha = -\infty$.

Din egalităţile (27) rezultă

$$\bar{\rho} = \max\{\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2, \bar{\rho}_3\} = \bar{\rho}_3. \tag{28}$$

Pentru a afla numărul $\bar{\rho}_3$, este suficient să considerăm o integrală particulară $y(x)$, aleasă după voie din submulţimea $\bar{Y}_3$, ca de exemplu integrala (25), şi să-i aflăm cea mai mare rădăcină negativă [4]. Ţinînd seamă de relaţia (28), rezultă că numărul $\bar{\rho}$ este egal cu cea mai mare rădăcină negativă a ecuaţiei (26).

[3]) Se constată cu uşurinţă că toate integralele din submulţimea Y_3, adică integralele care satisfac condiţiile (24), au aceleaşi rădăcini, întrucît ele diferă una de cealaltă printr-un factor constant.

[4]) Toate integralele din submulţimea $\bar{Y}_3$ (adică integralele neidentic nule care satisfac condiţiile (24)), au aceleaşi rădăcini, întrucît ele diferă una de alta printr-o constantă multiplicativă.

În continuare, se constată că numărul H definit anterior, este egal (în cazul ecuaţiilor diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi) cu numărul $-\bar{\rho}$:

$$H = -\bar{\rho}. \tag{29}$$

Această egalitate rezultă din teorema 3*, precum şi din următoarea constatare: Dacă familia Y a integralelor unei ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul n cu coeficienţi constanţi are proprietatea $I_n(\alpha, \beta]$ atunci acea familie are şi proprietatea $I_n[\alpha, \beta)$.

Efectuînd în ecuaţia (26) schimbarea $x = -\Delta$ impusă de relaţia (29), ajungem la concluzia că numărul H în subcazul 2 considerat, este egal cu cea mai mică rădăcină pozitivă a următoarei ecuaţii în Δ:

$$(1 + r_1^2) e^{-r_1 \Delta} - (1 + r_2^2) e^{-r_2 \Delta} + (r_1 - r_2)\, [(r_1 r_2 - 1) \sin \Delta - (r_1 + r_2) \cos \Delta] = 0. \tag{30}$$

În concluzie, ţinînd seama de rezultatele obţinute cu ocazia examinării subcazurilor 1 şi 2, se regăseşte următoarea teoremă stabilită în lucrarea [2]:

TEOREMA 6. *In ipoteza* $r_1 r_2 > 1$, $(|r_1| > |r_2|)$, *numărul maxim posibil* H *pentru care familia* Y *a integralelor ecuaţiei diferenţiale* (19) *are proprietatea* $I_4[a, a + H)$ *este egal cu cea mai mică rădăcină pozitivă a următoarei ecuaţii în* Δ:

$$(1 + r_1^2) e^{-|r_2|\Delta} - (1 + r_2^2) e^{-|r_1|\Delta} + |r_1 - r_2|\, [(r_1 r_2 - 1) \sin \Delta - |r_1 + r_2| \cos \Delta] = 0. \tag{31}$$

8. Să considerăm ecuaţia

$$y''' + P(x)\, y = 0, \tag{32}$$

în care $P(x)$ reprezintă o funcţie continuă şi nenegativă într-un interval $[a, b)$, neanulîndu-se identic în nici un subinterval.

În lucrarea [5] a lui V. A. Kondratiev se menţionează următoarea proprietate:

Dacă $P(x) > 0$ pentru $x \in (a, b)$ şi dacă $y(x)$ este o integrală neidentic nulă a ecuaţiei (32), avînd o rădăcină dublă $x_0 \in (a, b)$, atunci acea integrală nu se anulează în intervalul $[a, x_0)$.

Această proprietate, după cum se constată cu uşurinţă, rămîne valabilă şi în cazul mai general cînd funcţia $P(x)$ satisface în intervalul (a, b) inegalitatea $P(x) \geqq 0$. De aici, ţinînd seamă de notaţiile (9), (10), (11), rezultă egalitatea $\rho_1 = b$ şi conform relaţiei (12), egalitatea

$$\rho = \min\{\rho_1, \rho_2\} = \rho_2.$$

Pentru a afla numărul ρ_2, este suficient să considerăm o integrală particulară $y(x)$, aleasă după voie din submulţimea Y_2, deci satisfăcînd condiţiile

$$y(a) = y'(a) = 0, \quad y''(a) \neq 0 \tag{33}$$

şi să-i aflăm cea mai mică rădăcină din intervalul deschis (a, b) [5]. Această rădăcină va reprezenta numărul $\rho_2 = \rho$. Conform teoremei 3, intervalul $[a, \rho)$ va reprezenta intervalul de lungime maximă cu extremitatea stîngă dată, în care familia Y a integralelor ecuaţiei diferenţiale (32) are proprietatea $I_3[a, \rho)$. Alegînd în particular pentru integrala $y(x)$ care intervine în (33) funcţia lui Cauchy $\varphi(x; a)$ asociată ecuaţiei (32) precum şi nodului $x = a$, obţinem din examinarea de mai sus următoarea teoremă:

TEOREMA 7. *Condiţia necesară şi suficientă ca familia Y a integralelor ecuaţiei diferenţiale (32) să aibă proprietatea $I_3[a, b)$, este ca funcţia lui Cauchy $\varphi(x; a)$ să nu admită nici o rădăcină în intervalul deschis (a, b).*

O teoremă asemănătoare a fost obţinută prin alte metode de către E. S. Cicikin în lucrarea [9].

9. Să considerăm ecuaţia

$$y''' - P(x)y = 0, \tag{34}$$

în care $P(x)$ reprezintă o funcţie continuă şi nenegativă într-un interval $(\alpha, \beta]$, neanulîndu-se identic în nici un subinterval. Tot în lucrarea [5] se menţionează că dacă o integrală oarecare neidentic nulă $y(x)$ a ecuaţiei (34) are o rădăcină dublă $x_0 \in (\alpha, \beta)$, atunci acea integrală nu se anulează pentru nici o valoare x mai mare ca x_0. Ţinînd seamă de notaţiile (9') — (11'), rezultă că $\rho_1 = \alpha$ şi deci conform relaţiei (12'), are loc egalitatea

$$\bar{\rho} = \max\{\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2\} = \bar{\rho}_2.$$

Pentru a afla numărul $\bar{\rho}_2$, este suficient să considerăm o integrală particulară $y(x)$ aleasă după voie din submulţimea $\bar{Y}_2$, deci satisfacînd condiţiile

$$y(\beta) = y'(\beta) = 0,\ y''(\beta) \neq 0, \tag{35}$$

şi să-i aflăm cea mai mare rădăcină din intervalul (α, β) [6]. Această rădăcină va reprezenta numărul $\bar{\rho}_2 = \bar{\rho}$. Conform teoremei 3*, intervalul $(\bar{\rho}, \beta]$ va reprezenta intervalul de lungime maximă cu extremitatea dreaptă $x = \beta$ dată, în care familia Y a integralelor ecuaţiei diferenţiale (34) are proprietatea $I_3(\bar{\rho}, \beta]$. Alegînd în particular pentru integrala $y(x)$ care intervine în (35), funcţia lui Cauchy, $\varphi(x; \beta)$ asociată ecuaţiei (34) şi nodului $x = \beta$, obţinem din examinarea făcută următoarea teoremă:

TEOREMA 8. *Condiţia necesară şi suficientă ca familia Y a integralelor ecuaţiei diferenţiale (34) să aibă proprietatea $I_3(\alpha, \beta]$ este ca funcţia lui Cauchy $\varphi(x; \beta)$ să nu admită nici o rădăcină în intervalul (α, β).*

10. Să considerăm ecuaţia

$$y^{(4)} + P(x)y = 0, \tag{36}$$

[5]) Dacă integrala considerată nu admite astfel de rădăcină, atunci se va lua $\rho_2 = b$.

[6]) Dacă integrala considerată nu admite astfel de rădăcină, se va lua $\bar{\rho}_2 = \alpha$.

în care $P(x)$ reprezintă o funcţie continuă şi pozitivă într-un interval $[a, b)$. Vom arăta întîi că în aceste condiţii are loc inegalitatea

$$\rho_3 \leqq \rho_1, \tag{37}$$

ρ_1, ρ_2, ρ_3 fiind numerele definite de relaţiile (9) — (11). În acest scop să considerăm integralele $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ ale ecuaţiei (36), satisfacînd respectiv condiţiile

$$y_i^{(j)}(a) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } i \neq j \\ 1 & \text{dacă } i = j \end{cases} \qquad i = 1, 2, 3;\ j = 0, 1, 2, 3.$$

Se constată întîi că funcţia $f(x) = W(y_1, y_2, y_3)$, reprezentînd wronskianul integralelor $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$, verifică ecuaţia diferenţială (36), iar în punctul $x = a$ verifică aceleaşi condiţii ale lui Cauchy ca şi integrala $y_3(x)$. Rezultă de aici identitatea $W(y_1, y_2, y_3) \equiv y_3(x)$, de unde, ţinînd seamă de semnificaţia numărului ρ_3, rezultă relaţia

$$W(y_1, y_2, y_3) \neq 0 \text{ pentru } x \in (a, \rho_3). \tag{38}$$

Fie acuma $y(x)$ o integrală oarecare din familia Y_1, adică o integrală oarecare satisfăcînd condiţiile $y(a) = 0$, $y'(a) \neq 0$. Se constată uşor că o astfel de integrală nu poate avea în intervalul (a, ρ_3) nici o rădăcină multiplă de ordin $\geqq 3$. Într-adevăr, presupunînd contrariul şi notînd cu ξ acea rădăcină ar rezulta că sistemul de ecuaţii algebrice

$$C_1y_1(\xi) + C_2y_2(\xi) + C_3y_3(\xi) = 0$$
$$C_1y_1'(\xi) + C_2y_2'(\xi) + C_3y_3'(\xi) = 0$$
$$C_1y_1''(\xi) + C_2y_2''(\xi) + C_3y_3''(\xi) = 0$$

admite soluţii nenule în necunoscutele C_1, C_2, C_3 şi de aici, că $W(y_1, y_2, y_3)|_{x=\xi} = 0$, ceea ce ar contrazice relaţia (38). Rezultă în definitiv inegalitatea (37).

În lucrarea [8], s-a arătat de către M. Svec că în ipotezele adoptate, ecuaţia (36) nu admite nici o integrală neidentic nulă care să se anuleze împreună cu derivatele ei de ordinul întîi în două puncte distincte din intervalul $[a, b)$. Rezultă de aici că

$$\rho_2 = b. \tag{39}$$

Ţinînd seamă de relaţiile (12), (37) şi (39) se obţine

$$\rho = \min\{\rho_1, \rho_2, \rho_3\} = \rho_3.$$

Pentru a afla numărul ρ_3, este suficient să considerăm o integrală particulară $y(x)$, aleasă după voie din submulţimea Y_3, deci satisfăcînd condiţiile

$$y(a) = y'(a) = y''(a) = 0,\ y'''(a) \neq 0 \tag{40}$$

şi să-i aflăm cea mai mică rădăcină din intervalul deschis (a, b). (Dacă integrala considerată nu admite astfel de rădăcină, atunci se va lua

$\rho_3 = b$). Această rădăcină va reprezenta numărul $\rho_3 = \rho$ căutat. Conform teoremei 3, intervalul $[a, \rho)$ va reprezenta intervalul maximal cu extremitatea stîngă $x = a$ dată, în care familia Y a integralelor ecuației (36) are proprietatea $I_4[a, \rho)$. Alegînd în particular pentru integrala $y(x)$ care intervine în (40) funcția lui Cauchy $\varphi(x; a)$, asociată ecuației (36) precum și nodului $x = a$, regăsim următoarea teoremă stabilită de V. A. Kondratiev în [5]:

TEOREMA 9. *În ipotezele formulate, condiția necesară și suficientă ca familia Y a integralelor ecuației diferențiale* (36) *să aibă proprietatea $I_4[a, b)$ este ca funcția lui Cauchy $\varphi(x; a)$ să nu admită nici o rădăcină în intervalul (a, b)*

Observații. 1°. O teoremă asemănătoare a fost obținută printr-o altă metodă de către E. S. Cicikin în lucrarea [9]. Demonstrația dată de către E. S. Cicikin teoremei respective presupune însă derivabilitatea funcției $P(x)$ în intervalul considerat.

2°. În ipoteza că funcția $P(x)$ este pozitivă și continuă într-un interval de forma $(\alpha, \beta]$, neanulîndu-se identic în nici un subinterval, raționamentul de mai sus ne conduce la o teoremă analoagă cu teorema 9, care să se refere la intervalul $(\alpha, \beta]$ în locul intervalului $[a, b)$.

11. Să considerăm ecuația

$$y^{(4)} - P(x)\,y = 0, \tag{41}$$

în care $P(x)$ reprezintă o funcție continuă și nenegativă într-un interval $[a, b)$, neanulîndu-se identic în niciun subinterval. Vom arăta că în ipotezele făcute au loc relațiile

$$\rho_1 = \rho_3 = b. \tag{42}$$

În acest scop se constată întîi că orice integrală neidentic nulă care admite o rădăcină triplă $x_0 \in [a, b)$ nu se mai anulează în niciun punct din acel interval. Demonstrația acestui fapt se face utilizînd metoda reducerii la absurd.

Din afirmația de mai sus rezultă egalitatea $\rho_3 = b$.

În continuare, considerăm integralele $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ ale ecuației (42), satisfăcînd respectiv condițiile

$$y_j^{(i)}(a) = \begin{cases} 0 \text{ dacă } i \neq j \\ 1 \text{ dacă } i = j \end{cases} \quad (i, j = 0, 1, 2, 3). \tag{43}$$

Se constată îndată că funcția $f(x) = W(y_1, y_2, y_3)$ reprezentînd wronskianul integralelor $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$, verifică ecuația (42), iar în punctul $x = a$ verifică aceleași condiții ale lui Cauchy ca și integrala $y_3(x)$. Rezultă de aici identitatea $W(y_1, y_2, y_3) \equiv y_3(x)$, de unde, ținînd seamă de faptul stabilit anterior că $y_3(x) \neq 0$ pentru orice $x \in (a, b)$, rezultă relația

$$W(y_1, y_2, y_3) \neq 0 \quad \text{pentru} \quad x \in (a, b). \tag{44}$$

Fie acuma $y(x)$ o integrală oarecare din familia Y_1, adică o integrală satisfăcînd condițiile $y(a) = 0$, $y'(a) \neq 0$. Evident că ea va admite reprezentarea $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + C_3y_3(x)$. Să arătăm că o astfel de integrală nu poate avea în intervalul (a, b) nici o rădăcină ξ multiplă de ordin ≥ 3. Într-adevăr, presupunînd contrariul, ar rezulta că sistemul de ecuații algebrice

$$\begin{aligned} C_1y_1(\xi) + C_2y_2(\xi) + C_3y_3(\xi) &= 0 \\ C_1y_1'(\xi) + C_2y_2'(\xi) + C_3y_3'(\xi) &= 0 \\ C_1y_1''(\xi) + C_2y_2''(\xi) + C_3y_3''(\xi) &= 0 \end{aligned}$$

admite soluții nenule în necunoscutele C_1, C_2, C_3 și de aici că $W(y_1, y_2, y_3)|_{x=\xi} = 0$, ceea ce contrazice relația (44). Rezultă deci relația $\rho_1 = b$ și astfel proprietatea (42) este stabilită. Ținînd seamă de relația de definiție (12) precum și de egalitatea (42) stabilită anterior, se obține pentru numărul ρ care intervine în teorema 3, egalitatea

$$\rho = \rho_2. \tag{45}$$

Pentru a afla numărul ρ_2 definit de relațiile (9), (10), (11), considerăm ecuația

$$W(y_2, y_3) = 0, \tag{46}$$

unde $W(y_2, y_3)$ reprezintă wronskianul integralelor $y_2(x)$ și $y_3(x)$ definite în (43). Fie μ marginea inferioară a rădăcinilor din intervalul (a, b) a ecuației (46). În cazul cînd ecuația (46) nu are nici o rădăcină în intervalul (a, b), atunci luăm prin definiție $\mu = b$. În cazul cînd ecuația (46) are cel puțin o rădăcină în intervalul (a, b), din motive de continuitate se constată că această margine este atinsă, adică și μ este o rădăcină a ecuației (46). Vom arăta că numărul μ astfel definit, reprezintă numărul ρ_2. În acest scop vom stabili pe rînd inegalitățile

$$\mu \geqq \rho_2, \quad \mu \leqq \rho_2, \tag{47}$$

de unde va rezulta egalitatea $\rho_2 = \mu$.

Prima inegalitate rezultă astfel:

Considerăm sistemul de ecuații în necunoscutele C_2 și C_3

$$\begin{aligned} C_2y_2(\mu) + C_3y_3(\mu) &= 0 \\ C_2y_2'(\mu) + C_3y_3'(\mu) &= 0. \end{aligned} \tag{48}$$

Determinantul acestui sistem este $W(y_2, y_3)|_{x=\mu} = 0$, de unde rezultă că sistemul admite soluții nenule. Fie $\{\bar{C}_2, \bar{C}_3\}$ o astfel de soluție nenulă. Considerăm integrala

$$\bar{y}(x) = \bar{C}_2y_2(x) + \bar{C}_3y_3(x).$$

Ea nu poate fi identic nulă și în baza relațiilor (43) și (48) se constată că ea va admite numerele $x = a$ și $x = \mu$ ca rădăcini duble. De aici, ținînd seamă de definiția numărului ρ_2, rezultă inegalitatea $\rho_2 \leqq \mu$.

Să dovedim acuma a doua inegalitate din (47), adică inegalitatea $\mu \leqq \rho_2$. Fie în acest scop o integrală oarecare $\bar{y}(x) \in Y_2$, adică satisfăcînd condiţiile

$$y(a) = \bar{y}'(a) = 0, \ \bar{y}''(a) \neq 0.$$

Evident că va avea loc reprezentarea

$$\bar{y}(x) = C_2 y_2(x) + C_3 y_3(x),$$

unde $y_2(x)$ şi $y_3(x)$ sunt integralele definite în (43). Întrucît prin ipoteză în intervalul (a, μ) are loc relaţia $W(y_2, y_3) \neq 0$, rezultă că integrala considerată $\bar{y}(\mu)$ nu poate avea în intervalul (a, μ) nici o rădăcină de ordin $\geqq 2$. De aici rezultă inegalitatea $\rho_2 \geqq \mu$. Astfel ambele relaţii din (47) sunt verificate. Rezultă în definitiv relaţia

$$\rho_2 = \mu. \tag{49}$$

Obţinem astfel următoarea teoremă:

TEOREMA 10. *Intervalul maximal de forma $[a, l)$ cu extremitatea stîngă dată, în care familia integralelor ecuaţiei* (41) *are proprietatea $I_4[a, l)$ este intervalul $[a, \mu)$ unde μ este prima rădăcină mai mare ca $x = a$ a ecuaţiei* (46).

Aplicaţie. Fie ecuaţia cu coeficienţi constanţi

$$y^{(4)} - y = 0. \tag{50}$$

Integrala ei generală va fi

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \sin x + C_4 \cos x.$$

Efectuînd calculele obţinem

$$4 y_2 = e^x + e^{-x} - 2 \cos x$$

$$4 y_3 = e^x - e^{-x} - 2 \sin x$$

$$4 W(y_2, y_3) = 2 - (e^x + e^{-x}) \cos x.$$

Fie acum ecuaţia

$$(e^x + e^{-x}) \cos x - 2 = 0 \tag{51}$$

şi fie μ cea mai mică rădăcină pozitivă a ei. Se constată prin calcul că $\frac{3\pi}{2} < \mu < 2\pi$. Ţinînd seamă de teorema 10, rezultă că oricare ar fi integrala neidentic nulă $y(x)$ a ecuaţiei (50), această integrală nu poate avea 4 rădăcini situate într-un interval semi-închis de lungime μ.

ИССЛЕДОВАНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ КОРНЕЙ ИНТЕГРАЛОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В СВЯЗИ С НЕКОТОРЫМИ КРАЕВЫМИ ЗАДАЧАМИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Пусть задано линейное однородное дифференциальное уравнение (1), с коэффициентами $a_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ непрерывными на полузамкнутом интервале $[a, b)$ где b есть конечное число или ∞. Пусть Y — множество интегралов этого уравнения на рассмотренном интеравле.

Говорим, что семейство Y обладает свойством $I_n[a, b)$ (т.е. имеет свойство интерполяции n-ого порядка на простых узлах интервала $[a, b)$), если какие ни были бы n различные узлы $x_1, x_2, \ldots, x_n$, находящиеся в интервале $[a, b)$ и какие ни были бы действительные значения $y_1, y_2, \ldots, y_n$, существует один, и только один, интеграл $y(x) \in Y$, удовлетворяющий условиям $y(x_i) = y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

В настоящей статье, исходя от некоторых результатов Г. Пойя [7], характеризуется свойство $I_n[a, b)$ семейства Y существованием решений двухместных предельных задач типа Лагранжа-Эрмита. С этой целью рассматривается подмножество Y_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ интегралов, удовлетворяющих в точке $x = a$ условиям (4). Мы нашли следующую теорему:

ТЕОРЕМА 1. *Необходимым и достаточным условием для того, чтобы семейство Y интегралов дифференциального уравнения* (1) *обладало свойством $I_n[a, b)$ является то, что какое бы ни было натуральное число i $(i \leqq n-1)$, соответствующее подмножество Y_i не содержало ни одного интеграла $y(x)$ который имел бы в открытом интервале (a, b) кратный корень x_0 порядка $\geqq n-i$.*

Непосредственным следствием этой теоремы является следующая

ТЕОРЕМА 2. *Необходимым и достаточным условием для того, чтобы семейство Y интегралов дифференциального уравнения* (1) *обладало свойством $I_n[a, b)$ является то, чтобы это уравнение допускало один, и только один интеграл $y(x)$, удовлетворяющий условиям (K_i), какое ни было бы натуральное число i $(i \leqq n-1)$, какой ни был бы узел $\xi \in (a, b)$ и какие ни были бы системы действительных чисел $\{y_a^{(0)}, y_a^{(1)}, \ldots, y_a^{(i-1)}\}$, $\{y_\xi^{(0)}, y_\xi^{(1)}, \ldots, y_\xi^{(n-i-1)}\}$.*

Аналогичные теоремы получаются и в том случае когда в место замкнутых слева интегралов берутся замкнутые справа интервалы.

Доказательства этих теорем основываются на следующем результате, полученном в предыдущем труде [1]:

ТЕОРЕМА (*). *Предполагая, что семейство Y интегралов дифференциального уравнения* (1) *обладает свойством $I_n[a, b)$ пусть $y(x) \in Y$ некоторый нетождественно равный нулю интеграл и пусть $x_1, x_2, \ldots, x_m$ $(m \leqq n = 1)$ его возможные различные корни на интервале $[a, b)$. Обозначая соответственно через $p_1, p_2, \ldots, p_m$ их порядки кратности, имеет место следующее неравенство:*

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_m \leqq n-1.$$

В заключении исследуются для дифференциальных уравнений (1) максимальные интервалы вида $[a, \rho)$ с заданным левым концом $x = a$, на которых семейство Y интегралов рассматриваемого уравнения обладает свойством $I_n[a, \rho)$.

Полученные теоремы применяются к дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами, а также к уравнениям вида $y^{(n)} \pm P(x)y = 0$, $n = 3, 4$ где $P(x)$ представляет собой непрерывную и неотрицательную на рассматриваемом интервале функцию.

RECHERCHES SUR LA DISTRIBUTION DES RACINES RÉELLES DES INTÉGRALES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES À PROPOS DE QUELQUES PROBLÈMES AUX LIMITES POLYLOCAUX

RÉSUMÉ

Considérons l'équation différentielle linéaire et homogène (1) à coefficients continus dans l'intervalle demi-fermé $[a, b)$, b étant un nombre fini ou ∞. Soit Y l'ensemble des intégrales de cette équation dans l'intervalle considéré. Nous dirons que la famille Y possède la propriété $I_n[a, b)$ (c'est-à-dire qu'elle est interpolatrice sur n noeuds simples de l'intervalle $[a, b)$) si quels que soient les n noeuds distincts $x_1, x_2, \ldots, x_n$ situés dans l'intervalle $[a, b)$ et quelles que soient les valeurs réeles $y_1, y_2, \ldots, y_n$, il existe une intégrale et une seule $y(x) \in Y$ qui satisfasse aux conditions $y(x_i) = y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Dans le présent travail on donne, à partir de quelques recherches de G. Pólya [7], une caractérisation de la propriété $I_n[a, b)$ de la famille Y à l'aide de l'existence des solutions de certains problèmes aux limites *bilocaux* du type Lagrange-Hermite. À cet effet on considère les sous-ensemble Y_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ des intégrales $y(x) \in Y$, qui satisfont au poit $x = a$ aux conditions suivantes :

$$y(a) = y'(a) = \ldots = y^{(i-1)}(a) = 0, \quad y^{(i)}(a) \neq 0. \tag{2}$$

On établit le théorème suivant :

THÉORÈME 1. *La condition nécessaire et suffisante pour que la famille Y des intégrales de l'équation différentielle* (1) *possède la propriété $I_n[a, b)$ est que, quel que soit le nombre naturel i $(i \leq n-1)$, le sous-ensemble correspondant Y_i ne contienne aucune intégrale $y(x)$ qui ait dans l'intervalle ouvert (a, b) une racine x_0, multiple de l'ordre $\geq n - i$ (ou plusieurs racines de ce genre).*

Une conséquence immédiate de ce théorème est le

THÉORÈME 2. *La condition nécessaire et suffisante pour que la famille Y des integrales de l'équation differentielle* (1) *possède la propriété $I_n[a, b)$ est que cette équation admette une intégrale $y(x)$ et une seule qui satisfasse aux conditions bilocaux (K_i), quel que soit le nombre naturel i $(i \leq n-1)$, quel que soit le noeud $\xi \in (a, b)$ et quels que soient les systèmes de nombres réels $\left\{y_a^{(0)}, y_a^{(1)}, \ldots, y_a^{(i-1)}\right\}$, $\left\{y_\xi^{(0)}, y_\xi^{(1)}, \ldots, y_\xi^{(n-i-1)}\right\}$.*

On obtient également des théorèmes analogues pour des intervalles fermés à droite. La démonstration de ces théorèmes est basée sur le résultat suivant, que nous avons établi dans un précédent travail :

THÉORÈME (*). *Supposant que la famille Y des intégrales de l'équation differentielle* (1) *possède la propriété $I_n[a, b)$, soit $y(x) \in Y$ une intégrale quelconque non-identiquement nulle et soient $x_1, x_2, \ldots, x_m$ $(m \leq n-1)$ ses racines distinctes éventuelles de l'intervalle $[a, b)$. En désignant respectivement par $p_1, p_2, \ldots, p_m$ leurs ordres de multiplicité, l'inégalité suivante subsiste :*

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_m \leq n - 1.$$

On étudie ensuite pour l'équation différentielle (1), l'intervalle de longueur maxima de la forme $[a, \rho)$, à extrémité gauche $x = a$ donnée, dans lequel la famille Y des ses intégrales jouit de la propriété $I_n[a, \rho)$. Les théorèmes obtenus s'appliquent aux équations différentielles à coefficients constants, ainsi qu'aux équations binômes $y'' \pm P(x)y = 0$ $(n = 3, 4)$, où $P(x)$ représente une fonction continue et non-négative dans l'intervalle considéré.

BIBLIOGRAFIE

1. O. Aramă, *Rezultate comparative asupra unor probleme la limită polilocale pentru ecuații diferențiale liniare.* Studii și cercet. de mat. (Cluj), **X**, nr. 2, p. 207—257 (1959).
2. O. Aramă și D. Ripianu, *Asupra problemei polilocale pentru ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți.* Studii și cercet. de mat. (Cluj), **VIII**, nr. 1—2, p. 37—74; nr. 3—4, p. 211—265 (1957).
3. Н. В. Азбелев и З. Б. Цалюк, *Заметка о неосциляции решений дифференциальных уравнений n-го порядка.* Ученые Зариски Удмуртского Государственного Педагогического Института, **12**, 44—46 (1958).
4. Н. В. Азбелев и З. Б. Чалюк, *К вопросу о распределении нулей решений линейного дифференциального уравнения третьего порядка.* Матем. Сборник, новая серия, **51 (93)** : 4, 475—486 (1960).
5. В. А. Кондратьев, *О колебаемости решений линейных дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядков.* Докл. Акад. Наук СССР, **118**, nr. 1, p. 22—24 (1958).
6. В. А. Кондратьев, *О нулях решений уравнения $y^{(n)} + p(x)y = 0$.* Докл. Акад. Наук СССР, **120**, но. 6, 1180—1182 (1958).
7. G. Pólya, *On the Mean-value Theorem corresponding to a given Linear Homogeneous Differential Equation.* Amer. Math. S. Bull. **24**, 312—324 (1922).
8. M. Švec, *Über eine neue Eigenschaften der (oscillatorischen) Lösungen der linearen homogenen Differentialgleichung vierter ordnung.* Cehoslov. Mat. Journ. **4 (79)**, p. 75—94 (1954).
9. Е. С. Чичкин, *О неосциляции решений нелинейных дифференциальных уравнений 3-го и 4-го порядков.* Известия высших учебных заведений, Математика, 5 (12), p. 219—221 (1959).

Primit la 19. XII. 1959.