# APLICAREA METODEI APROXIMAŢIILOR SUCCESIVE ÎN INTEGRAREA NUMERICĂ A ECUAŢIILOR DIFERENŢIALE

DE

D. V. IONESCU

(Cluj)

*Lucrare prezentată la sesiunea ştiinţifică din 25 martie 1960 a Academiei R.P.R., Filiala Cluj.*

Într-o comunicare făcută la colocviul de mecanică ţinut la Bucureşti (25 – 29 octombrie 1959) [1], am arătat că fiind dată ecuaţia diferenţială

$$y' = f(x, y)$$

cu condiţia $y(x_0) = 0$, unde funcţia $f(x, y)$ este definită în dreptunghiul $D$ dat de inegalităţile

$$x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + a, \quad |y| \leqslant b$$

şi are derivate parţiale de ordinul întîi şi al doilea continue în dreptunghiul $D$, iar $\varepsilon$ este un număr pozitiv dat, se poate determina pe intervalul $[x_0, x_0 + a)$ o reţea $\Gamma$ de noduri $x_0, x_1, \ldots, x_n$ şi un algoritm pentru calculul numerelor $y_i^{(s)}$, unde $s = 0, 1, 2, \ldots, \nu$ astfel ca pe reţeaua $\Gamma$ să avem

$$|y(x_i) - y_i^{(\nu)}| < 2\varepsilon.$$

Pentru fixarea numărului $\nu$ se ţine seama de metoda aproximaţiilor succesive, iar pentru alegerea numărului $n$ şi a algoritmului de calcul al numerelor $y_i^{(\nu)}$ se întrebuinţează formula de cuadratură a trapezului.

În această lucrare se arată că dacă funcţia $f(x, y)$ are în dreptunghiul $D$ derivate parţiale continue pînă la un ordin mai înalt ca 2, se poate îmbunătăţi alegerea numărului de noduri al reţelei $\Gamma$ şi chiar algoritmul pentru calculul numerelor $y_i^{(\nu)}$, întrebuinţînd alte formule de cuadratură, convenabil alese.

1. Să considerăm ecuaţia diferenţială

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

cu condiţia $y(x_0) = 0$, unde funcţia $f(x, y)$ este continuă în dreptunghiul $D$ definit de inegalităţile

$$x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + a, \ |y| \leqslant b \tag{2}$$

şi satisface la condiţia lui Lipschitz

$$|f(x, Y) - f(x, y)| \leqslant A\,|Y - y|. \tag{3}$$

Se ştie că în aceste condiţii ecuaţia diferenţială (1) are o integrală unică $y(x)$ care se anulează pentru $x = x_0$. Ea este definită pe un interval $[x_0, x_0 + h_1]$, unde

$$h_1 = \min\left(a, \frac{b}{M}\right),$$

$M$ fiind o margine superioară a lui $|f(x, y)|$ în dreptunghiul $D$.

Integrala $y(x)$ se poate obţine cu metoda aproximaţiilor succesive integrînd ecuaţiile diferenţiale

$$\begin{aligned} &\frac{dy^{(0)}(x)}{dx} = f(x, 0) \\ &\frac{dy^{(1)}(x)}{dx} = f[x, y^{(0)}(x)] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{dy^{(s)}(x)}{dx} = f[x, y^{(s-1)}(x)] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{4}$$

cu condiţiile $y^{(s)}(x_0) = 0$, unde $s = 0, 1, 2, \ldots$

Se ştie că seria

$$y^{(0)}(x) + \sum_{s=1}^{\infty} [y^{(s)}(x) - y^{(s-1)}(x)]$$

este absolut şi uniform convergentă pe intervalul $[x_0, x_0 + h_1]$ şi avem

$$|y^{(s)} - y^{(s-1)}| < MA^{s}\frac{(x - x_0)^{s+1}}{(s+1)!}.$$

Vom avea deci

$$y(x) = y_0(x) + \sum_{s=1}^{\infty} [y^{(s)}(x) - y^{(s-1)}(x)].$$



Vom scrie

$$y(x) = y^{(\nu)}(x) + \sum_{s=\nu}^{\infty} [y^{(s+1)}(x) - y^{(s)}(x)]$$

şi vom avea

$$|y(x) - y^{(\nu)}(x)| \leqslant \frac{M}{A} e^{Ah_1} \frac{(Ah_1)^{\nu+2}}{(\nu+2)!}, \tag{5}$$

$\varepsilon$ fiind un număr pozitiv dat, se poate alege numărul natural $\nu$ cel mai mic astfel ca membrul al doilea al inegalităţii de mai sus să fie mai mic ca $\varepsilon$ şi vom avea

$$|y(x) - y^{(\nu)}(x)| \leqslant \varepsilon. \tag{5'}$$

Numărul $\nu$ aşa ales rămîne fix şi va juca un rol important în integrarea numerică a ecuaţiei diferenţiale (1).

2. Pentru integrarea numerică a ecuaţiei diferenţiale (1) în care urmărim obţinerea unei teoreme analoage cu cea dată în introducerea acestei lucrări, vom face ipoteze noi asupra funcţiei $f(x, y)$, care sînt legate de procedeul de integrare numerică pe care-l vom aplica.

Vom presupune că funcţia $f(x, y)$ are în dreptunghiul $D$ derivate parţiale în raport cu $x$ şi $y$ pînă ordinul al patrulea inclusiv, continue în dreptunghiul $D$.

În aceste condiţii putem să luăm în inegalităţile (5) ca număr $A$, o margine superioară a lui $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$ în dreptunghiul $D$.

Cu aceste ipoteze se demonstrează că funcţiile $y^{(s)}(x)$ date de ecuaţiile diferenţiale (4), cu condiţiile $y^{(s)}(x_0) = 0$, au derivate succesive de ordinul 1, 2, 3 şi 4 continue pe intervalul $[x_0, x_0 + h_1]$.

Funcţiile

$$F^{(s)}(x) = f[x, y^{(s-1)}(x)] \tag{6}$$

pentru $s = 1, 2, \ldots, \nu$ şi $F^{(0)}(x) = f(x, 0)$ au derivate de ordinul 1, 2, 3, 4 continue pe intervalul $[x_0, x_0 + h_1]$.

Vom nota mai departe cu $N$ o margine superioară a lui

$$\left|\frac{d^4F^{(0)}(x)}{dx^4}\right|, \ \left|\frac{d^4F^{(1)}(x)}{dx^4}\right|, \ldots, \ \left|\frac{d^4F^{(\nu)}(x)}{dx^4}\right| \tag{7}$$

pe intervalul $[x_0, x_0 + h_1]$.

$\delta$ fiind un număr pozitiv dat, destul de mic, vom nota cu $h$ un număr pozitiv definit de

$$h = \min\left(a, \frac{b - \delta}{M}\right).$$

Este evident că $h \leqslant h_1$.

Cu aceste ipoteze vom trece la integrarea numerică a ecuației diferențiale (1). Vom căuta o rețea $\Gamma$ de puncte $x_i$ în progresie aritmetică pe $[x_0, x_0 + h]$, unde $i = 1, 2, \ldots, n$ și un algoritm permițînd calculul numerelor $y_i^{(s)}$ pentru $s = 0, 1, \ldots, \nu$, astfel ca să avem

$$|y(x_i) - y_i^{(\nu)}| < 2\,\varepsilon. \tag{8}$$

3. Pentru algoritmul de calcul al numerelor $y_i^{(s)}$, vom folosi formula de cuadratură a lui K. P e t r [2, 3]

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{C_k^1}{C_{2k}^1}\,\frac{b-a}{1!}[f(b) + f(a)] - \frac{C_k^2}{C_{2k}^2}\,\frac{(b-a)^2}{2!}[f'(b) - f'(a)] + \ldots +$$

$$+ (-1)^{k-1}\frac{C_k^k}{C_{2k}^k}\,\frac{(b-a)^k}{k!}[f^{(k-1)}(b) + (-1)^{k-1}f^{(k-1)}(a)] + R, \tag{9}$$

unde

$$R = \frac{(-1)^k}{(2k)!}\int_a^b (x-a)^k\,(b-x)^k f^{(2k)}(x)dx. \tag{10}$$

Vom alege $k = 2$, astfel că formula pe care o vom aplica va fi

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\,[f(b) + f(a)] - \frac{(b-a)^2}{12}\,[f'(b) - f'(a)] + R, \tag{11}$$

unde

$$R = \frac{1}{24}\int_a^b (x-a)^2(b-x)^2 f^{(IV)}(x)dx \tag{12}$$

și dacă $M_4$ este o margine superioară a lui $|f^{(IV)}(x)|$ pe $[a, b]$, avem

$$|R| \leqslant \frac{(b-a)^5}{720}\,M_4. \tag{13}$$

Să împărțim intervalul $(a, b)$ în $n$ părți egale prin punctele $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ și la fiecare interval $(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, b)$ să aplicăm formula (11). Vom avea

$$\int_a^{x_1} f(x)dx = \frac{b-a}{2n}\,[f(x_1) + f(a)] - \frac{(b-a)^2}{12n^2}\,[f'(x_1) - f'(a)] + R_1$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \frac{b-a}{2n}[f(x_2) + f(x_1)] - \frac{(b-a)^2}{12n^2}\,[f'(x_2) - f'(x_1)] + R_2$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .



$$\int_{x_{n-1}}^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n}\,[f(b) + f(x_{n-1})] - \frac{(b-a)^2}{12n^2}[f'(b) - f'(x_{n-1})] + R_n,$$

unde

$$|R_1| \leqslant \frac{(b-a)^5}{720\,n^5}\,M_4, \ldots, |R_n| \leqslant \frac{(b-a)^5}{720\,n^5}\,M_4.$$

Adunînd toate formulele precedente vom avea formula de calcul

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n}\{f(b) + f(a) + 2\,[f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})]\} -$$

$$- \frac{(b-a)^2}{12n^2}\,[f'(b) - f'(a)] + R, \tag{14}$$

unde

$$|R| \leqslant \frac{(b-a)^5}{720\,n^4}\,M_4. \tag{15}$$

Numărul pozitiv $\varepsilon$ fiind dat, se poate alege $n$ cel mai mic număr natural astfel ca

$$\frac{(b-n)^5}{720\,n^4}\,M_4 < \varepsilon. \tag{16}$$

În formula de calcul, vom avea atunci $|R| < \varepsilon$.

4. Fie $\varepsilon_1$ un număr pozitiv pe care-l vom preciza mai departe. Pentru calculul lui $y^{(0)}(x)$ avem formula

$$y^{(0)}(x) = \int_0^x f(\xi, 0)\,d\xi$$

și la aceasta putem aplica formula de calcul (14) pentru $x = x_i$. Vom avea

$$y^{(0)}(x_i) = y_i^{(0)} + R_i^{(0)},$$

unde

$$y_i^{(0)} = \frac{h}{2n}\left\{f(x_i, 0) + f(x_0, 0) + 2\sum_{j=1}^{i-1} f(x_j, 0)\right\} -$$

$$- \frac{h^2}{12\,n^2}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\,(x_i, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0)\right], \tag{17}$$

cu

$$|R_i^{(0)}| \leqslant \frac{h^5}{720\,n^4}\,\frac{i}{n}\,N \leqslant \frac{h^5}{720\,n^4}\,N.$$

Vom alege numărul $n$, cel mai mic număr natural, astfel ca

$$\frac{h^5}{720\, n^4} N < \varepsilon_1 \tag{18}$$

şi cu această alegere a lui $n$, în formula (16) vom avea

$$|R_i^{(0)}| < \varepsilon_1. \tag{19}$$

5. Pentru calculul lui $y^{(1)}(x)$, avem formula

$$y^{(1)}(x) = \int_{x_0}^{x} f[\xi, y^{(0)}(\xi)]d\xi$$

şi pe nodul $x_i$ vom avea

$$y^{(1)}(x_i) = \int_{x_0}^{x_i} f[\xi, y^{(0)}(\xi)]d\xi.$$

Şi la aceasta putem aplica formula de calcul (14) şi vom avea

$$y^{(1)}(x_i) = [y_i^{(1)}] + r_i^{(1)}, \tag{20}$$

unde

$$|r_i^{(1)}| < \varepsilon_1, \tag{21}$$

iar

$$[y_i^{(1)}] = \frac{h}{2n}\left\{f[x_i, y^{(0)}(x_i)] + f[x_0, y^{(0)}(x_0)] + 2\sum_{j=1}^{i-1} f[x_j, y^{(0)}(x_j)]\right\} -$$

$$- \frac{h^2}{12\, n^2}\left[\frac{df[x, y^{(0)}(x)]}{dx}\bigg|_{x=x_i} - \frac{df[x, y^{(0)}(x)]}{dx}\bigg|_{x=x_0}\right].$$

În această formulă avem $y^{(0)}(x_0) = 0$ şi

$$\frac{df[x, y^{(0)}(x)]}{dx}\bigg|_{x=x_i} = \frac{\partial f[x, y^{(0)}(x)]}{\partial x}\bigg|_{x=x_i} + \frac{\partial f[x, y^{(0)}(x)]}{\partial y}\bigg|_{x=x_i} \cdot \frac{dy^{(0)}(x)}{dx}\bigg|_{x=x_i}$$

$$\frac{df[x, y^{(0)}(x)]}{dx}\bigg|_{x=x_0} = \frac{\partial f[x, y^{(0)}(x)]}{\partial x}\bigg|_{x=x_0} + \frac{\partial f[x, y^{(0)}(x)]}{\partial y}\bigg|_{x=x_0} \cdot \frac{dy^{(0)}(x)}{dx}\bigg|_{x=x_0}.$$

Însă

$$\frac{dy^{(0)}(x)}{dx} = f(x, 0)$$



aşa că

$$\frac{df[x, y^{(0)}(x)]}{dx}\bigg|_{x=x_i} = \frac{\partial f}{\partial x}[x_i, y^{(0)}(x_i)] + \frac{\partial f}{\partial y}[x_i, y^{(0)}(x_i)] \cdot f(x_i, 0)$$

$$\frac{df[x, y^{(0)}(x)]}{dx}\bigg|_{x=x_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, 0) \cdot f(x_0, 0).$$

Avem deci

$$[y_i^{(1)}] = \frac{h}{2n}\left\{f[x_i, y^{(0)}(x_i)] + f[x_0, 0] + 2\sum_{j=1}^{i-1} f[x_j, y^{(0)}(x_j)]\right\} -$$

$$- \frac{h^2}{12\, n^2}\left\{\frac{\partial f}{\partial x}[x_i, y^{(0)}(x_i)] - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial f}{\partial y}[x_i, y^{(0)}(x_i)]f(x_i, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, 0)f(x_0, 0)\right\}.$$

Să introducem

$$y_i^{(1)} = \frac{h}{2n}\left\{f(x_i, y_i^{(0)}) + f(x_0, 0) + 2\sum_{j=1}^{i-1} f(x_j, y_j^{(0)})\right\} -$$

$$- \frac{h^2}{12\, n^2}\left\{\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i^{(0)}) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i^{(0)}) f(x_i, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, 0)f(x_0, 0)\right\}. \tag{22}$$

Avem deci

$$[y_i^{(1)}] = y_i^{(1)} + \rho_i^{(1)}, \tag{23}$$

unde

$$\rho_i^{(1)} = \frac{h}{2n}\left\{\left[f[x_i, y^{(0)}(x_i)] - f(x_i, y_i^{(0)})\right] + 2\sum_{j=1}^{i-1}\left[f[x_j, y^{(0)}(x_j)] - f(x_j, y_j^{(0)})\right]\right\} -$$

$$- \frac{h^2}{12\, n^2}\left\{\left[\frac{\partial f}{\partial x}[x_i, y^{(0)}(x_i)] - \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i^{(0)})\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\partial f}{\partial y}[x_i, y^{(0)}(x_i)] - \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i^{(0)})\right] f(x_i, 0)\right\}.$$

Funcțiile $f(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, fiind continue în $D$, avem

$$\left.\begin{aligned} & |f(x, Y) - f(x, y)| < A\,|Y - y| \\ & \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, Y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right| < B\,|Y - y| \\ & \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, Y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| < C\,|Y - y|, \end{aligned}\right. \tag{24}$$

unde $A$, $B$, $C$ sînt margini superioare ale lui $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$, $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|$, $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|$ în dreptunghiul $D$.

Rezultă că vom avea

$$|\rho_i^{(1)}| \leq \frac{h}{2n}(2i - 1)A\,\varepsilon_1 + \frac{h^2}{12n^2}[B\varepsilon_1 + CM\varepsilon_1],$$

adică

$$|\rho_i^{(1)}| < \left[[Ah + (B + CM)\frac{h^2}{12}\right]\varepsilon_1. \tag{25}$$

Revenind la formula (20) vom putea scrie

$$y^{(1)}(x_i) = y_i^{(1)} + R_i^{(1)}, \tag{26}$$

unde

$$R_i^{(1)} = r_i^{(1)} + \rho_i^{(1)}$$

și vom avea

$$|R_i^{(1)}| < \left[1 + Ah + (B + CM)\frac{h^2}{12}\right]\varepsilon_1. \tag{27}$$

**6**. Să trecem la cazul general și să considerăm integrala

$$y^{(s)}(x) = \int_{x_0}^{x} f[\xi, y^{(s-1)}(\xi)]d\xi.$$

Pe nodul $x_i$ vom avea

$$y^{(s)}(x_i) = \int_{x_0}^{x_i} f[\xi, y^{(s-1)}(\xi)]\,d\xi$$

și aplicînd formula de calcul (14), vom avea

$$y^{(s)}(x_i) = [y_i^{(s)}] + r_i^{(s)}, \tag{28}$$



unde

$$\begin{aligned} [y_i^{(s)}] = {} & \frac{h}{2n}\left\{f[x_i, y^{(s-1)}(x_i)] + f[x_0, y^{(s-1)}(x_0)] + 2\sum_{j=1}^{i-1} f[x_j, y^{(s-1)}(x_j)]\right\} - \\ & - \frac{h^2}{12\,n^2}\left\{\frac{df}{dx}[x, y^{(s-1)}(x)]\Big|_{x=x_i} - \frac{df}{dx}[x, y^{(s-1)}(x)]\Big|_{x=x_0}\right\}, \end{aligned} \tag{29}$$

iar

$$|r_i^{(s)}| < \varepsilon_1. \tag{30}$$

În formula (29) avem

$$\frac{df[x, y^{(s-1)}(x)]}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}[x, y^{(s-1)}(x)] + \frac{\partial f}{\partial y}[x, y^{(s-1)}(x)]\,f[x, y^{(s-2)}(x)]$$

și deci

$$\frac{df[x, y^{(s-1)}(x)]}{dx}\Big|_{x=x_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, 0)\,f(x_0, 0)$$

$$\frac{df[x, y^{(s-1)}(x)]}{dx}\Big|_{x=x_i} = \frac{\partial f}{\partial x}[x_i, y^{(s-1)}(x_i)] + \frac{\partial f}{\partial y}[x_i, y^{(s-1)}(x_i)]f[x_i, y^{(s-2)}(x_i)].$$

Ținînd seama de aceste formule, formula (29) devine

$$\begin{aligned} [y_i^{(s)}] = {} & \frac{h}{2n}\left\{f[x_i, y^{(s-1)}(x_i)] + f(x_0, 0) + 2\sum_{j=1}^{i-1} f[x_j, y^{(s-1)}(x_j)]\right\} - \\ & - \frac{h^2}{12\,n^2}\left\{\left[\frac{\partial f}{\partial x}[x_i, y^{(s-1)}(x_i)] - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0)\right] + \right. \\ & \left. + \frac{\partial f}{\partial y}[x_i, y^{(s-1)}(x_i)]f[x_i, y^{(s-2)}(x_i)] - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, 0)f(x_0, 0)\right\}. \end{aligned} \tag{31}$$

Introducem

$$\begin{aligned} y_i^{(s)} = {} & \frac{h}{2n}\left\{f(x_i, y_i^{(s-1)}) + f(x_0, 0) + 2\sum_{j=1}^{i-1} f(x_j, y_j^{(s-1)})\right\} - \\ & - \frac{h^2}{12\,n^2}\left\{\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i^{(s-1)}) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i^{(s-1)})f(x_i, y_i^{(s-2)}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, 0)f(x_0, 0)\right\} \end{aligned} \tag{32}$$

și vom avea

$$[y_i^{(s)}] = y_i^{(s)} + \rho_i^{(s)}, \tag{33}$$

unde

$$\begin{aligned}\rho_i^{(s)} = \frac{h}{2n}\Big\{ & f[x_i, y^{(s-1)}(x_i)] - f(x_i, y_i^{(s-1)}) + \\ & + 2\sum_{j=1}^{i-1} [f[x_j, y^{(s-1)}(x_j)] - f(x_j, y_j^{(s-1)})\Big\} - \\ & - \frac{h^2}{12n^2}\Big\{\Big[\frac{\partial f}{\partial x}[x_i, y^{(s-1)}(x_i)] - \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i^{(s-1)})\Big] + \\ & + \Big[\frac{\partial f}{\partial y}[x_i, y^{(s-1)}(x_i)] - \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y^{(s-1)})\Big] f[x_i, y^{(s-2)}(x_i)] + \\ & + \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i^{(s-1)})[f[x_i, y^{(s-2)}(x_i)] - f(x_i, y_i^{(s-2)})]\Big\}. \end{aligned} \tag{34}$$

Să presupunem că s-a demonstrat că

$$|y^{(s-1)}(x_j) - y_j^{(s-1)}| < P_{s-1}\varepsilon_1$$

pentru $j = 1, 2, \ldots, n$ și $s = 1, 2, 3, \ldots$, unde $P_{s-1}$ este un număr care se va determina mai departe. Atunci din formula (34), vom avea

$$|\rho_i^{(s)}| \leqslant h\frac{2i-1}{2n} AP_{s-1}\varepsilon_1 + \frac{h^2}{12n^2}(BP_{s-1}\varepsilon_1 + MCP_{s-1}\varepsilon_1 + A^2P_{s-2}\varepsilon_1),$$

adică

$$|\rho_i^{(s)}| \leqslant \Big\{\Big[hA + \frac{h^2}{12n^2}(B + MC)\Big]P_{s-1} + \frac{h^2}{12n^2}A^2P_{s-2}\Big\}\varepsilon_1. \tag{35}$$

Revenind la formulele (28), (33), (30) și (35), deducem că

$$y^{(s)}(x_i) = y_i^{(s)} + R_i^{(s)}, \tag{36}$$

unde

$$R_i^{(s)} = r_i^{(s)} + \rho_i^{(s)}$$

și vom avea

$$|R_i^{(s)}| \leqslant P_s\,\varepsilon_1, \tag{37}$$

unde

$$P_s = \Big[1 + hA + \frac{h^2}{12n^2}(B + MC)\Big]P_{s-1} + \frac{h^2}{12n^2}A^2P_{s-2}. \tag{38}$$

Pentru $s = 0$ și $s = 1$ avem în inegalitatea (37)

$$P_0 = 1,\ P_1 = 1 + hA + \frac{h^2}{12n^2}(B + MC), \tag{39}$$

după cum s-a arătat la nr. 4 și 5, (formula (19) și (27)).



7. Rămîne să precizăm întîi numerele $P$ date de ecuația de recurență (38) cu condițiile (39). Pentru a simplifica, să notăm

$$K = \max\Big\{hA + \frac{h^2}{12n^2}(B + MC),\ \frac{hA}{2\sqrt{3}\,n}\Big\}. \tag{40}$$

Atunci inegalitățile (19), (27), (37) se mai pot scrie sub forma

$$\begin{aligned}&|R_i^{(0)}| < \varepsilon_1\\ &|R_i^{(1)}| < (1 + K)\varepsilon_1\\ &|R_i^{(1)}| < Q_s\,\varepsilon_1,\end{aligned} \tag{41}$$

unde $Q_s$ este dat de formula de recurență

$$Q_s = 1 + KQ_{s-1} + K^2Q_{s-2}, \tag{42}$$

cu condițiile

$$Q_0 = 1, \qquad Q_1 = 1 + K. \tag{42'}$$

Se arată cu ușurință că avem

$$\begin{aligned}&Q_2 = (1 + K + K^2) + K^2 \,.\, 1\\ &Q_3 = (1 + K + K^2 + K^3) + K^2(1 + C_2^1 K)\\ &Q_4 = (1 + K + K^2 + K^3 + K^4) + K^2(1 + C_2^1 K + C_3^1 K^2) + K^4 \,.\, 1\\ &Q_5 = (1 + K + K^2 + K^3 + K^4 + K^5) + K^2(1 + C_2^1 K + C_3^1 K^2 + C_4^1 K^3) + \\ &\quad + K^4(1 + C_3^2 K)\end{aligned}$$

și se poate arăta cu ajutorul metodei inducției complete că în general avem

$$\begin{aligned}Q_{2i} = 1 + K + \ldots + K^{2i} & + K^2(1 + C_2^1 K + \ldots + C_{2i-1}^1 K^{2i-2})\\ & + K^4(1 + C_3^2 K + \ldots + C_{2i-2}^2 K^{2i-4})\\ & + K^6(1 + C_4^3 K + \ldots + C_{2i-3}^3 K^{2i-6}) \qquad (43)\\ & + \ldots..\\ & + K^{2i} \,.\, 1\\ Q_{2i+1} = 1 + K + \ldots + K^{2i+1} & + K^2(1 + C_2^1 K + \ldots + C_{2i}^1 K^{2i-1})\\ & + K^4(1 + C_3^2 K + \ldots + C_{2i-1}^2 K^{2i-3})\\ & + K^6(1 + C_4^3 K + \ldots + C_{2i-2}^3 K^{2i-5})\\ & + \ldots...\\ & + K^{2i}(1 + C_{i+1}^i K).\end{aligned}$$

8. Acum se poate preciza numărul $\varepsilon_1$. În inegalitățile (41) să luăm $s = \nu$ și să alegem pe $\varepsilon_1$ astfel ca

$$Q_\nu \, \varepsilon_1 < \varepsilon,$$

adică

$$\varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{Q_\nu},$$

unde $Q_\nu$ este dat de formulele (43).

Însă $\varepsilon_1$ trebuie să mai verifice o condiție. Cînd s-au scris formulele (32) pentru $s = \nu$, trebuie ca

$$f(x_i, y_i^{(\nu-1)}), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i^{(\nu-1)}), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i^{(\nu-1)})$$

să aibă sens, adică punctul de coordonate $(x_i, y_i^{(\nu-1)})$ să facă parte din dreptunghiul $D$.

Avem identitatea

$$y_i^{(\nu-1)} = -[y^{(\nu-1)}(x_i) - y_i^{(\nu-1)}] + y^{(\nu-1)}(x_i)$$

și din felul cum s-a ales numărul $h$, avem

$$|y_i^{(\nu-1)}| \leqslant R_i^{(\nu-1)} + (b - \delta) \leqslant Q_{\nu-1} \, \varepsilon_1 + b - \delta.$$

Însă $Q_{\nu-1} < Q_\nu$ și deci vom avea

$$|y_i^{(\nu-1)}| < Q_\nu \, \varepsilon_1 + b - \delta.$$

Putem avea $|y_i^{(\nu-1)}| < b$, dacă $Q_\nu \, \varepsilon_1 + b - \delta < b$, adică

$$\varepsilon_1 < \frac{\delta}{Q_\nu}$$

Prin urmare numărul $\varepsilon_1$ se alege astfel

$$\varepsilon_1 = \min\left(\frac{\varepsilon}{Q_\nu}, \frac{\delta}{Q_\nu}\right). \tag{44}$$

Este ușor de văzut că în general avem

$$Q_{s-1} < Q_s,$$

pentru $s = 1, 2, \ldots, \nu$, de unde rezultă că $Q_s < Q_\nu$; deci dacă punctul de coordonate $(x_i, y_i^{(\nu-1)})$ se găsește în dreptunghiul $D$, ceea ce se întîmplă cînd $\varepsilon_1$ verifică condiția (44) atunci și punctul de coordonate $(x_i, y_i^{(s)})$, unde $i = 1, 2, \ldots, n$ și $s = 1, 2, \ldots, \nu - 1$ se găsește în dreptunghiul $D$.



9. Deci s-a putut determina rețeaua $\Gamma$ de noduri $x_1, \ldots, x_n$ care împart intervalul $(x_0, x_0 + h)$ în $n$ părți egale, unde numărul $n$ este determinat de inegalitatea (18), și algoritmul de calcul pentru calculul numerelor $y_i^{(s)}$ (formulele (17) și (32)) unde $s = 0, 1, \ldots, \nu$ astfel ca pe noduri să avem

$$|y^{(\nu)}(x_i) - y_i^{(\nu)}| \leqslant \varepsilon. \tag{45}$$

Atunci, ținînd seama de inegalitățile (5′) și (45) pe nodurile rețelei $\Gamma$ vom avea

$$|y(x_i) - y_i^{(\nu)}| \leqslant 2\varepsilon. \tag{46}$$

Cu aceasta am demonstrat prin urmare următoarea

TEOREMĂ. *In ipotezele precizate la nr.* **2**, *la un număr pozitiv* $\varepsilon$ *dat se poate determina un număr natural* $\nu$ *așa cum s-a arătat la nr.* **1** *și o rețea de* $n$ *noduri* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *pe intervalul* $(x_0, x_0 + h)$, *unde numărul* $n$ *satisface la condiția* (18), $\varepsilon_1$ *fiind dat de formula* (44) *și un algoritm de calcul pentru calculul numerelor* $y_i^{(s)}$, *unde* $s = 1, 2, \ldots, \nu$ (*formulele* (17) *și* (32)), *astfel ca pe noduri să fie verificată inegalitatea* (46).

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ К ЧИСЛЕННОМУ ИНТЕГРИРОВАНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ


### КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В заметке представленной на колоквиуме по механике (Бухарест, 25—29 октября 1959 года) [1], была доказана мною следующая теорема:

*Рассмотрим дифференциальное уравнение* $y' = f(x, y)$ *и условие* $y(x_0) = 0$, *где функция* $f(x, y)$ *определена на прямоугольнике* $D(x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + a, |y| \leqslant b)$ *и имеет частные производные первого и второго порядка относительно* $x$ *и* $y$ *непрерывные на прямоугольнике* $D$. *Если* $\varepsilon$ *-заданное положительное число, то можно определить на интервале* $(x_0, x_0 + a)$ *сетку* $\Gamma$ *узлов* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *и вычислительный алгорифм для вычисления чисел* $y_i^{(s)}$ *где* $s = 0, 1, \ldots, \nu$ *таким образом, чтобы имели неравенство*

$$|y(x_i) - y_i^{(\nu)}| \leqslant 2\varepsilon.$$

*верное для всех узлов сетки* $\Gamma$.

При установлении числа $\nu$ применяли метод последовательных приближений и при установлении числа $y_i^{(\nu)}$ и вычислительного алгорифма для чисел $y_i^{(s)}$, применяли квадратурную формулу трапеции.

В настоящей статье мы вернулись к этой теореме для того случая, когда функция $f(x, y)$ имеет частные производные первых четырех порядков относительно $x$ и $y$ непрерывные в прямоугольнике $D$, и применили квадратурную формулу (11) К. Петра [2, 3], что уменьшает число $n$ из первой теоремы.

## APPLICATION DE LA MÉTHODE DES APPROXIMATIONS SUCCESSIVES À L'INTÉGRATION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES


### RÉSUMÉ

Dans une Note présentée au Colloque de Mécanique (Bucarest 25–29 octobre 1959) [1] nous avons démontré le théorème suivant :

*Considerons l'équation différentielle* $y' = f(x, y)$ *et la condition* $y(x_0) = 0$, *où la fonction* $f(x, y)$ *est définie dans le rectangle* $D$ $(x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + a,$ $|y| \leqslant b)$ *et a des dérivées partielles du premier et du second ordre par rapport à* $x$ *et à* $y$ *continues dans le rectangle* $D$. $\varepsilon$ *étant un nombre positif donné, on peut déterminer sur l'intervalle* $[x_0, x_0 + a)$ *un réseau* $\Gamma$ *de noeuds* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *et un algorithme pour le calcul des nombres* $y_i^{(s)}$ *où* $s = 0, 1, \ldots, \nu$ *de manière à avoir l'inégalité*

$$|y(x_i) - y_i^{(\nu)}| < 2\,\varepsilon$$

*valable pour tous les noeuds du réseau* $\Gamma$.

Pour fixer le nombre $\nu$, nous avons tenu compte de la méthode des approximations successives et pour fixer le nombre $n$ ainsi que l'algorithme de calcul pour les nombres $y_i^{(s)}$, nous avons employé la formule de quadrature du trapèze.

Dans ce travail on reprend ce théorème pour le cas où la fonction $f(x, y)$ a des dérivées partielles de quatre premiers ordres par rapport à $x$ et à $y$ continues dans le rectangle $D$, et on applique la formule de quadrature (11) de K. Petr [2, 3] ce qui diminue le nombre $n$ du premier théorème.



### BIBLIOGRAFIE

1. D. V. Ionescu, *Integrarea numerică a ecuațiilor diferențiale.* Comunicare prezentată la Colocviul de mecanică, București, 25–29 oct. 1959.
2. K. Petr, *Über eine Formel für numerische Berechnung der bestimmten Integrale.* Casopis propestovani Matematiky a Fysiky, 44, 454–455 (1915).
3. D. V. Ionescu, *Cuadraturi numerice.* Editura tehnică, București, 1957, p. 55.


Primit 15 martie 1960.