DESPRE ANALOGUL METODEI LUI CEBÎȘEV ȘI A METODEI IPERBOLELOR TANGENTE PENTRU REZOLVAREA APROXIMATIVĂ A ECUAȚIILOR FUNCȚIONALE NELINIARE *)

DE

B. JANKÓ

(*Cluj*)

Lucrare prezentată la „Consfătuirea tehnico-științifică asupra mașinilor electronice de calcul" din 13—15 ianuarie 1960, București.

În cadrul acestei lucrări s-au elaborat noi metode de iterație pentru rezolvarea ecuațiilor funcționale neliniare $P(x) = 0$ care se aplică în condiții largi, fără a presupune existența derivatelor Fréchet sau Gâteaux ale operației P. Aici derivata se înlocuiește cu o anumită diferență divizată, de acelaș ordin cu derivata. În acest sens am construit analogul metodei lui Newton [1]. Pentru generarea metodelor de iterație din această lucrare se consideră formula de iterație de forma

$$x_{n+1} = \Psi_n(P\,;\, x_n,\, x_{n-1},\, x_{n-2}), \tag{1}$$

unde aproximația x_{n+1} nu depinde numai de aproximația x_n — ca de obicei la procedeele de iterație — ci și de aproximațiile precedente x_{n-1}, x_{n-2}. Operația Ψ_n mai depinde de P și de diferențele divizate ale ei. Astfel aici nu va interveni nici calcularea derivatelor lui $P(x)$ nici determinarea inversei $[P'(x_n)]^{-1}$ sau alte inverse de genul acesta. Menționăm că operațiile care intervin aici de obicei nu sînt mărginite în normă; pentru unele din ele vom cere în cele ce urmează ca să fie mărginite inferior (sau superior).

Scopul lucrării de față este construirea analoagelor metodei lui Cebîșev și a metodei iperbolelor tangente și pe lîngă aceasta, generarea dintr-o sursă comună a metodelor de mai sus precum și a celei analoage metodei lui Newton, în condițiile precizate mai sus studiindu-se totodată și condițiile de convergență.

---

*) Această lucrare se publică și în limba franceză în revista „Mathematica" t. 2 (25), fasc. 2 (1960).

Considerăm ecuația funcțională

$$P(x) = 0,$$

unde operația neliniară P este definită de spațiul liniar semiordonat X cu valori în X. În această lucrare ne mărginim la cazul cînd elementele spațiului X sînt funcții de variabilă reală. Vom spune că pentru funcțiile $x, x' \in X$ are loc relația $x < x'$, dacă x este mai mică decît x' pentru orice valoare a variabilei independente din intervalul dat. Diferența divizată de ordinul I a operației $P(x)$ pentru $x_0, x_1 \in X$ se definește ca în cazul obișnuit

$$[x_0, x_1 ; P/x] = \frac{P(x_0) - P(x_1)}{x_0 - x_1},$$

unde se presupune $x_0 < x_1$ și $[x_0, x_1 ; P/x] \in X$. Diferența divizată de ordinul II se introduce sub forma

$$[x_0, x_1, x_2 ; P/x] = \frac{[x_0, x_1 ; P/x] - [x_1, x_2 ; P/x]}{x_0 - x_2},$$

unde $x_0 < x_1 < x_2$. Aici presupunem deasemenea că $[x_0, x_1, x_2 ; P/x] \in X$.

Considerăm operația de aproximare

$$\Phi_n(P ; x, \xi, \eta, \zeta) = x - \lambda_0 P(x) - \lambda_1(x - \xi)P(x) - \lambda_2 P^2(x),$$

unde ξ, η, ζ sînt anumite elemente ale lui X care se aleg ulterior, iar

$$\lambda_0 = \lambda_0(P ; \xi, \eta, \zeta), \; \lambda_1 = \lambda_1(P ; \xi, \eta, \zeta), \; \lambda_2 = \lambda_2(P ; \xi, \eta, \zeta)$$

se determină în cele ce urmează. Impunem condiția $\Phi_n(P ; x, \xi, \eta, \zeta) \in X$; pentru aceasta vom presupune că produsele de funcții $\lambda_0 P(x)$, $\lambda_1(x - \xi)P(x)$, $\lambda_2 P^2(x)$ aparțin spațiului X.

I. Dacă se aleg $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ și se impune condiția,

$$[\xi, \eta ; \Phi_n/x] = 0,$$

atunci obținem

$$\lambda_0 = \frac{1}{[\xi, \eta ; P/x]}.$$

Astfel procedeul de iterație

$$x_{n+1} = \Phi_n(P ; x_n, \xi, \eta, \zeta)$$

reprezintă analogul metodei lui Newton [1]. În adevăr, dacă se aleg $\xi = \overline{x}_n$, $\eta = \overline{x}_{n+1}$, atunci se obține procedeul pentru aproximațiile superioare

$$\overline{x}_{n+1} = \overline{x}_n - \frac{1}{[\overline{x}_n, \overline{x}_{n-1} ; P/x]} P(\overline{x}_n),$$

iar dacă $\xi = \underline{x}_n$, $\eta = x_n$, atunci găsim iterația pentru aproximațiile inferioare [1]),

$$\underline{x}_{n+1} = \underline{x}_n - \frac{1}{[\underline{x}_n, \overline{x}_n ; P/x]} P(\underline{x}_n).$$

[1]) Observăm că în acest caz operația Φ nu depinde de ξ.

II. Dacă punem $\lambda_1 \equiv 0$ și se mai impun condițiile

$$[\xi, \eta ; \Phi_n/x] = 0, \; [\xi, \eta, \zeta ; \Phi_n/x] = 0,$$

atunci se obțin

$$\lambda_0 = \frac{1}{[\xi, \eta ; P/x]} + \frac{[\xi, \eta, \zeta ; P/x] \, (P(\xi) + P(\eta))}{D}$$

$$\lambda_2 = -\frac{[\xi, \eta, \zeta ; P/x]}{D},$$

unde

$$D = [\xi, \eta ; P/x] \, [\xi, \zeta ; P/x] [\zeta, \eta ; P/x].$$

În acest caz procedeul de iterație (1') se numește analogul metodei lui Cebîșev. În adevăr, dacă alegem $\xi = \overline{x}_n$, $\eta = \overline{x}_{n-1}$, $\zeta = \overline{x}_{n-2}$, atunci se obține iterația pentru aproximațiile superioare

$$\overline{x}_{n+1} = \overline{x}_n - \frac{1}{[\overline{x}_n, \overline{x}_{n-1} ; P/x]} P(\overline{x}_n) -$$

$$- \frac{[\overline{x}_n, \overline{x}_{n-1}, \overline{x}_{n-2} ; P/x] P(\overline{x}_{n-1})}{[\overline{x}_n, \overline{x}_{n-1} ; P/x][\overline{x}_n, \overline{x}_{n-2} ; P/x][\overline{x}_{n-2}, \overline{x}_{n-1} ; P/x]} P(\overline{x}_n), \qquad (2)$$

iar dacă se pune $\xi = \underline{x}_n$, $\eta = \overline{x}_{n-1}$, $\zeta = \overline{x}_{n-2}$, atunci avem iterația pentru aproximațiile inferioare

$$\underline{x}_{n+1} = \underline{x}_n - \frac{1}{[\underline{x}_n, \overline{x}_{n-1}, P/x]} P(\underline{x}_n) -$$

$$- \frac{[\underline{x}_n, \overline{x}_{n-1}, \overline{x}_{n-2} ; P/x]}{[\underline{x}_n, \overline{x}_{n-1} ; P/x][\underline{x}_n, \overline{x}_{n-2} ; P/x][\overline{x}_{n-2}, \overline{x}_{n-1} ; P/x]} P(\overline{x}_{n-1}) \, P(\underline{x}_n). \qquad (2')$$

TEOREMA 1. *Dacă se îndeplinesc condițiile :*

1°. *pentru* $\underline{x}_0 < \overline{x}_0$ *avem* $P(\underline{x}_0) < 0 < P(\overline{x}_0)$,

2°. $0 < [x_1, x_2; P/x] < +\infty$, $0 < [x_1, x_2, x_3; P/x] < +\infty$ *pentru orice* $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ *unde* $x_1, x_2, x_3, x_4 \in [\underline{x}_{-1}, \overline{x}_{-1}]$,

3°. $P(x)$ *este o operație monoton-continuă pe segmentul* $[\underline{x}_0, \overline{x}_0] \subseteq [\underline{x}_{-1}, \overline{x}_{-1}]$, *unde* $\underline{x}_{-1}, \underline{x}_0, \overline{x}_0, \overline{x}_{-1}$, *sînt aproximațiile inițiale,*

4°. *aproximațiile* $\underline{x}_{n+1}$, $\overline{x}_{n+1}$ *se obțin prin formulele de mai jos ; pentru* $n = 1$,

$$\overline{x}_1 = \overline{x}_0 - \frac{1}{[\overline{x}_0, \overline{x}_{-1} ; P/x]} P(\overline{x}_0),$$

$$\underline{x}_1 = \underline{x}_0 - \frac{1}{[\underline{x}_0, \overline{x}_0 ; P/x]} P(\underline{x}_0),$$

iar pentru $n \geqslant 2$ *se folosesc iterațiile* (2), (2'), 5°. $0 < [x_1, x_2, x_3, x_4; \Phi_n/x] < +\infty$ *pentru orice* $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, *unde* $x_1, x_2, x_3, x_4 \in [\underline{x}_{-1}, \bar{x}_{-1}]$, *atunci ecuația funcțională* $P(x) = 0$ *admite o soluție unică* x^*, *pentru care avem relațiile*

$$(\alpha) \quad \underline{x}_n < \underline{x}_{n+1} < x^* < \bar{x}_{n+1} < \bar{x}_n,$$

$$(\beta) \quad x^* = (o) - \lim_{n\to\infty} \underline{x}_n = (o) - \lim_{n\to\infty} \bar{x}_n, \ \textit{unde} \ x^* \in [\underline{x}_0, \bar{x}_0].$$

Demonstrație. a). Existența și unicitatea rezultă din următoarele proprietăți [1] (Teorema 3):

Dacă avem îndeplinite condițiile 1°–3° de la teorema 1 și dacă aproximațiile $\underline{x}'_{n+1}$, $\bar{x}'_{n+1}$ se obțin folosind formulele

$$\underline{x}'_{n+1} = \underline{x}'_n - \frac{1}{[\underline{x}'_n, \bar{x}'_n; P/x]} P(\underline{x}'_n); \quad \bar{x}'_{n+1} = \bar{x}'_n - \frac{1}{[\bar{x}'_n, \bar{x}'_{n-1}; P/x]} P(\bar{x}'_n)$$

(avînd $\underline{x}'_i = \underline{x}_i$, $\bar{x}'_i = \bar{x}_i$ pentru $i = -1, 0, 1$), atunci pentru ecuația funcțională $P(x) = 0$ există o soluție unică $x^* \in [\underline{x}_0, \bar{x}_0]$, unde

$$x^* = (o) - \lim_{n\to\infty} \underline{x}'_n = (o) - \lim_{n\to\infty} \bar{x}'_n,$$

$$\underline{x}'_n < \underline{x}'_{n+1} < x^* < \bar{x}'_{n+1} < \bar{x}'_n. \qquad (3)$$

b) Demonstrăm inegalitățile (α). Observăm mai întîi că în baza teoremei citate mai sus avem

$$\underline{x}_0 < \underline{x}_1 < x^* < \bar{x}_1 < \bar{x}_0.$$

Apoi din structura formulelor (3), (3') rezultă imediat că $\underline{x}_n < \underline{x}_{n+1}$, $\bar{x}_{n+1} < \bar{x}_n$ pentru orice $n \geqslant 1$.

Mai departe considerăm funcția de aproximație $\Phi_n(P; x, \bar{x}_n, \bar{x}_{n-1}, \bar{x}_{n-2}) \equiv \bar{f}_n(x)$ sub forma

$$\bar{f}_n(x) = \bar{f}_n(\bar{x}_n) + (x - \bar{x}_n)[\bar{x}_n, \bar{x}_{n-1}; \bar{f}_n/x] + (x - \bar{x}_n)(x - \bar{x}_{n-1})[\bar{x}_n, \bar{x}_{n-1}, \bar{x}_{n-2}; \bar{f}_n/x] +$$
$$+ (x - \bar{x}_n)(x - \bar{x}_{n-1})(x - \bar{x}_{n-2})[\bar{x}_n, \bar{x}_{n-1}, \bar{x}_{n-2}, \tau; \bar{f}_n/x],$$

de unde pentru $x = x^*$ obținem

$$x^* - \bar{x}_{n+1} = (x^* - \bar{x}_n)(x^* - \bar{x}_{n-1})(x^* - \bar{x}_{n-2})[\bar{x}_n, \bar{x}_{n-1}, \bar{x}_{n-2}, \tau; \bar{f}_n/x], \qquad (4)$$

deoarece $x^* = \bar{f}_n(x^*)$ și $\bar{x}_{n+1} = \bar{f}_n(\bar{x}_n)$. Ținînd seama de condiția 5°, din (4) rezultă

$$x^* < \bar{x}_{n+1},$$

pentru orice n. Folosindu-ne de funcția de aproximație

$$\Phi_n(P; x, \underline{x}_n, \bar{x}_{n-1}, \bar{x}_{n-2}) \equiv \underline{f}_n(x),$$

se obține analog că $\underline{x}_{n+1} < x^*$. Astfel am demonstrat inegalitățile (α).

În ce privesc relațiile (β), ele rezultă imediat din (3) și din inegalitățile $\underline{x}'_n < \underline{x}_n < x^* < \bar{x}_n < \bar{x}'_n$. În adevăr din $\underline{x}'_n < \bar{x}_n < \bar{x}'_n$ și din (3) rezultă imediat că $x^* = (0) - \lim_{n\to\infty} \bar{x}_n$. Analog, din $\underline{x}'_n < \underline{x}_n < \bar{x}'_n$ și (3) obținem $x^* = (0) - \lim_{n\to\infty} \underline{x}_n$. Cu aceasta am demonstrat teorema.

Observație. Condiția 5° poate fi înlocuită cu următoarea

$$0 > [x_1, x_2, x_3, x_4; P/x] > -\infty$$

pentru orice $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, unde $x_1, x_2, x_3, x_4 \in [\underline{x}_{-1}, \bar{x}_{-1}]$.

III. Considerînd acum $\lambda_2 \equiv 0$ și impunînd condițiile

$$[\xi, \eta; \Phi_n/x] = 0, \quad [\xi, \eta, \zeta; \Phi_n/x] = 0,$$

obținem că

$$\lambda_0 = \frac{[\xi, \eta; P/x]}{D_1}, \quad \lambda_1 = -\frac{[x_n, \eta, \zeta; P/x]}{D_1},$$

unde

$$D_1 = [\xi, \eta; P/x][\eta, \zeta; P/x] - [\xi, \eta, \zeta; P/x].$$

Dacă se aleg $\xi = \bar{x}_n$, $\zeta = \bar{x}_{n-1}$ respectiv $\xi = \underline{x}_n$, $\zeta = \bar{x}_n$, atunci se obțin iterațiile pentru aproximațiile superioare respectiv inferioare, analoage metodei iperbolelor tangente

$$\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{[\eta, \bar{x}_{n-1}; P/x]}{[\bar{x}_n, \eta; P/x][\eta, \bar{x}_{n-1}; P/x] - [\bar{x}_n, \eta, \bar{x}_{n-1}; P/x]\, P(\underline{x}_n)} P(\bar{x}_n) \qquad (5)$$

$$\underline{x}_{n+1} = \underline{x}_n - \frac{[\eta', \bar{x}_n; P/x]}{[\underline{x}_n, \eta'; P/x][\eta', \bar{x}_n; P/x] - [\underline{x}_n, \eta', \bar{x}_n; P/x]\, P(\eta')} P(\underline{x}_n), \qquad (5')$$

unde η și η' sînt aproximații inferioare, arbitrare; în particular pot fi alese $\eta = \underline{x}_n$, $\eta' = \underline{x}_{n-1}$.

TEOREMA 2. *Dacă sînt îndeplinite condițiile* 1°–3° *de la teorema* 1 *și dacă*

α) *interațiile* $\underline{x}_{n+1}$, $\bar{x}_{n+1}$ *se obțin prin formulele de mai jos, pentru* $n = 1$

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_0 - \frac{1}{[\bar{x}_0, \bar{x}_{-1}; P/x]} P(\bar{x}_0)$$

$$\underline{x}_1 = \underline{x}_0 - \frac{1}{[\underline{x}_0, \bar{x}_0; P/x]} P(\underline{x}_0),$$

iar pentru $n \geqslant 2$ — *prin formulele* (5), (5'),

β) $0 > [x_1, x_2, x_3, x_4; \Phi_n/x] > -\infty$ *pentru orice*

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4;\ x_1, x_2, x_3, x_4 \in [\underline{x}_{-1}, \overline{x}_{-1}],$$

atunci ecuația funcțională $P(x) = 0$ *admite o soluție unică* x^*,

$$x^* \in [\underline{x}_0, \overline{x}_0],\ \textit{unde}\ x^* = (0) - \lim_{n\to\infty} \underline{x}_n = (0) - \lim_{n\to\infty} \overline{x}_n\ \textit{și}$$

$$\underline{x}_n < \underline{x}_{n+1} < x^* < \overline{x}_{n+1} < \overline{x}_n.$$

Demonstația teoremei se face la fel ca în cazul teoremei 1.

Observații. 1) Comparînd această metodă cu analogul metodei lui Newton se arată ușor prin calcule directe, că metoda imperbolelor tangente converge mai rapid, anume există următoarele inegalități $\underline{x}'_{n+1} < \underline{x}_{n+1}$ și $\overline{x}_{n+1} < \overline{x}'_{n+1}$.

2) În cazul dacă $P(x)$ este o funcție de variabilă reală atunci metodele de mai sus sînt mai convenabile în calculele numerice, decît metoda clasică a lui Cebîșev și metoda iperbolelor tangente chiar dacă $P(x)$ admite derivate. În adevăr, pe cînd la aceste metode se cere calcularea valorilor x_n, $P(x_n)$, $P'(x_n)$, $P''(x_n)$ atunci în metodele noastre se cer doar valorile numerice ale lui x_n și $P(x_n)$. Aceste valori fiind cunoscute, diferențele divizate indicate în formulele de iterație (2), (2') respectiv (5), (5') se calculează ușor.

3) Din studiul convergenței acestor metode reiese că rapiditatea convergenței poate fi mărită fără să presupunem existența derivatelor.

ОБ АНАЛОГИЧНОМ МЕТОДЕ МЕТОДА ЧЕБЫШЕВА И О МЕТОДЕ КАСАТЕЛЬНЫХ ГИПЕРБОЛ ПРИ ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В рамках настоящего труда были созданы новые методы решения функциональных уравнений $P(x) = 0$, применяемые при более широких условиях, не предполагая существования производных Фреше или Гато действия P. В этом смысле были построены аналоги метода Ньютона, Чебышева и метода касательных гипербол. При этом производные Фреше были заменены подходящими разделенными разностями того же порядка.

Была построена общаяя формула итерации

$$x_{n+1} = \Psi_n(P; x_n, x_{n-1}, x_{n-2}),$$

где приближение x_{n+1} не зависит только от приближения x_n как это обычно случается в итерационных приемах, а зависит и от предыдущих приближений x_{n-1}, x_{n-2} При частных видах действия $\Psi_n(P; x_n, x_{n-1}, x_{n-2})$ получаются по очереди вышеупомянутые методы. Эти методы в особенности выгодны в численных вычислениях.

SUR L'ANALOGUE DE LA MÉTHODE DE TCHÉBYCHEFF ET DE LA MÉTHODE DES HYPERBOLES TANGENTES POUR LA RÉSOLUTION APPROXIMATIVE DES ÉQUATIONS FONCTIONELLES NON-LINÉAIRES

RÉSUMÉ

Dans le cadre du présent travail, l'auteur a élaboré des méthodes nouvelles pour la résolution des équations fonctionnelles $P(x) = 0$, qui s'appliquent dans des conditions plus larges, sans supposer l'existence des dérivées de Fréchet ou Gâteaux de l'opération P. Dans ce sens l'auteur a construit les analoques de la méthode de Newton, de Tchébycheff et de la méthode des hyperboles tangentes. Les dérivées de Fréchet ont été remplacées par des différences divisées convenables du même ordre. On a construit une formule générale d'intération

$$x_{n+1} = \Psi_n(P; x_n, x_{n-1}, x_{n-2}),$$

où l'approximation x_{n-1} ne dépend pas seulement de l'approximation x_n, comme d'habitude dans les procédés d'itération, mais aussi des approximations précédentes x_{n-1}, x_{n-2}. En particularisant l'opération $\Psi_n(P; x_n, x_{n-1}, x_{n-2})$, on obtient tour à tour les méthodes mentionnées plus haut. Ces méthodes sont avantageuses surtout pour les calculs numériques.

BIBLIOGRAFIE

1. B. Jankó, *Aplicații la rezolvarea ecuațiilor funcționale neliniare considerate în spații semi-ordonate*. Studii și cercet. mat. (Cluj), **10**, *1*, 51–57 (1959).
2. M. И. Нечепуренко, *О метода Чебышева для функциональных уравнений*. Успехи Мат. Наук. **9**, *2*, 163—170 (1954).
3. M. A. Мертвецова, *Аналог процесса касательных гипербол для общих функциональных уравнений*. Доклады Акад. Наук. СССР, **88**, *4*, 611—614 (1953).

Primit la 5. X. 1959.