ASUPRA POLINOAMELOR DE CEA MAI BUNĂ APROXIMAȚIE A UNEI FUNCȚII PE O MULȚIME FINITĂ DE PUNCTE DIN PLANUL COMPLEX

DE

I. MARUȘCIAC

(Cluj)

Lucrare prezentată la Colocviul de analiză numerică, organizat de Institutul de calcul al Acad. R.P.R. și de Soc. științelor matematice și fizice din R.P.R. între 8—13 dec. 1960, Cluj.

1. Fie E o mulțime finită, formată din N ($N \geqslant n + 2$) puncte din planul complex și $f(z)$ o funcție continuă într-un domeniu D care conține în întregime mulțimea E.

Vom studia aici determinarea polinomului de cea mai bună aproximație a unei funcții continue, pe o mulțime finită de puncte din planul complex, folosind aceeași metodă ca într-o lucrare anterioară [4], în care am studiat determinarea polinomului lui Cebîșev k-restrîns, pe o mulțime finită de puncte din planul complex.

2. Considerăm media de ordinul $2p$

$$J_p = \left(\frac{1}{N}\sum_{\nu=1}^{N} |f(c_\nu) - P(c_\nu)|^{2p}\right)^{\frac{1}{2p}}, \tag{1}$$

unde $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ este un polinom oarecare cu coeficienți complecși de grad cel mult n.

Vom căuta minimul expresiei J_p cînd coeficienții $a_0, a_1, \ldots, a_n$ variază independent.

Să arătăm mai întîi că *există un singur polinom $P_p(z)$ care realizează minimul lui J_p, atunci cînd p este fix* (p -întreg pozitiv).

În adevăr ca și în lucrarea amintită [4], în care s-au considerat mediile

$$\left(\frac{1}{N}\sum_{\nu=1}^{N} |P(c_\nu)|^{2p}\right)^{\frac{1}{2p}}, \tag{2}$$

unde $P(z) = \varphi(z) + a_{k+1} z^{n-k-1} + \ldots + a_n$, $\varphi(z) = z^n + A_1 z^{n-1} + \ldots + A_k z^{n-k}$, o funcție dată, J_p^{2p} este un polinom în raport cu a'_l și a''_l ($a_l = a'_l + i a''_l$, $l = 0, 1, 2, \ldots, n$) luînd numai valori pozitive. Minimul există deci și este atins pentru un sistem de numere a'_l, a''_l, care satisfac sistemul

$$\frac{\partial J_p^{2p}}{\partial a'_l} = 0, \quad \frac{\partial J_p^{2p}}{\partial a''_l} = 0, \quad l = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Demonstrația unicității polinomului de cea mai bună aproximație a funcției $\varphi(z) = z^n + A_1 z^{n-1} + \ldots + A_k z^{n-k}$ din lucrarea amintită, se transcrie, fără nici o modificare și pentru cazul nostru [1]).

Vom demonstra acum următoarea

TEOREMA 1. *Fie E o mulțime finită, compusă din N ($N \geqslant n + 2$) puncte: $c_1, c_2, \ldots, c_N$. Atunci, notînd cu $P_p(z)$ polinomul care realizează minimul lui J_p pentru p fix, avem*

$$\lim_{p \to \infty} P_p(z) = T_n(z; f, E); \; j = \lim_{p \to \infty} j_p = \mu_n(f, E) = \max_{z \in E} |f(z) - T_n(z; f, E)|,$$

unde $T_n(z; f, E)$ este polinomul de cea mai bună aproximație de grad cel mult n a funcției $f(z)$ pe mulțimea E, iar j_p — valoarea minimă a lui J_p.

În adevăr, deoarece și în cazul acesta $j_{p+1} \geqslant j_p$, rezultă $j = \lim\limits_{p \to \infty} j_p$ există.

Să arătăm mai întîi că polinoamele $P_p(z)$ formează o familie *uniform mărginită* în raport cu p într-un cerc (C), care conține în interior mulțimea E.

În adevăr, deoarece $P_p(z)$ este polinomul care realizează minimul lui J_p, avem

$$j_p = \left(\frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^{N} |f(c_\nu) - P_p(c_\nu)|^{2p}\right)^{\frac{1}{2p}} < \left(\frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^{N} |f(c_\nu) - T_n(c_\nu; f, E)|^{2p}\right)^{\frac{1}{2p}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^{N} \max_{(\nu)} |f(c_\nu) - T_n(c_\nu; f, E)|^{2p}\right)^{\frac{1}{2p}} = \left(\frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^{N} N [\mu_n(f, E)]^{2p}\right)^{\frac{1}{2p}} =$$

$$= \mu\,(f, E). \tag{3}$$

Însă $|f(z) - P_p(z)|$ își atinge maximul său într-un punct $z \in E = \{c_\nu\}$, $\nu = 1, 2, \ldots, N$. Să notăm acest punct cu c_{k_0}, (unde k_0 este una din valorile $1, 2, \ldots, N$), adică

$$\max_{z \in E} |f(z) - P_p(z)| = |f(c_{k_0}) - P_p(c_{k_0})|.$$

Atunci

$$|f(c_\nu) - P_p(c_\nu)| \leqslant |f(c_{k_0}) - P_p(c_{k_0})|, \quad \nu = 1, 2, \ldots, N.$$

[1]) Aici rolul lui $\varphi(z)$ îl joacă funcția $f(z)$, iar al lui $a_{k+1} z^{n-k-1} + a_{k+2} z^{n-k-2} + \ldots + a_n$ — polinomul $P(z)$.

Pe de altă parte din (3) rezultă

$$\frac{1}{N} \max_{\nu} |f(c_\nu) - P_p(c_\nu)|^{2p} = \frac{1}{N} |f(c_{k_0}) - P_p(c_{k_0})|^{2p} <$$

$$< \frac{1}{N} \sum_{\nu=1}^{N} |f(c_\nu) - P_p(c_\nu)|^{2p} < [\mu_n(f, E)]^{2p}.$$

sau

$$|f(c_{k_0}) - P_p(c_{k_0})| < \mu_n(f, E) \,.\, N^{\frac{1}{2p}} < \mu_n(f, E) \,.\, N.$$

Deci $|P_p(c_\nu)| \leqslant |P_p(c_\nu) - f(c_\nu)| + |f(c_\nu)| \leqslant M + N \,.\, \mu_n(f, E)$, $\nu = 1, 2, \ldots, N$, unde $M = \max\limits_{z \in E} |f(z)|$.

Folosind formula de interpolare a lui Lagrange pentru o grupare oarecare de $n + 1$ puncte din E, ne convingem că polinomul $P_p(z)$ este uniform mărginit (în raport cu p) într-un cerc (C), care conține în întregime mulțimea E. Mulțimea $\{P_p(z)\}$ formează deci o familie normală, ale cărei funcții limită sînt polinoame de gradul n.

Fie $P(z)$ unul din aceste polinoame. Înseamnă că există un subșir $\{P_{p_m}(z)\}$ al lui $\{P_p(z)\}$ care converge către $P(z)$, adică

$$P(z) = \lim_{m \to \infty} P_{p_m}(z), \text{ sau } f(z) - P(z) = \lim_{m \to \infty} [f(z) - P_{p_m}(z)],$$

convergența fiind uniformă în cercul (C). Deci

$$|\mu^* - \max_{z \in E} |f(z) - P_{p_m}(z)|| < \frac{\varepsilon}{2}, \; m > m_0, \quad \text{unde} \quad \mu^* = \max |f(z) - P(z)|.$$

De asemenea se știe că

$$\lim_{p \to \infty} J_p[f(x) - P(z)] = \max_{z \in E} |f(z) - P(z)|$$

pentru orice familie de polinoame de gradul n, uniform mărginite în cercul (C). În cazul nostru avem

$$\lim_{m \to \infty} J_{p_m}[f(z) - P_{p_m}(z)] = \lim_{m \to \infty} j_{p_m} = \max_{z \in E} |f(z) - P_{p_m}(z)|.$$

Deci

$$|\max_{z \in E} |f(z) - P_{p_m}(z)| - j_{p_m}| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ dacă } m > m_1.$$

Prin urmare

$$|\mu^* - j_{p_m}| \leqslant |\mu^* - \max_{z \in E} |f(x) - P_{p_m}(z)|| + |\max_{z \in E} |f(z) - P_{p_m}(z)| - j_{p_m}| < \varepsilon,$$

dacă $m > \max(m_0, m_1)$, de unde rezultă $\mu^* = j$.

Dacă notăm însă $\mu_n(f, E) = \max\limits_{z \in E} |f(z) - T_n(z; f, E)|$, avem evident $\mu_n(f, E) \leqslant \mu^*$, deci $\mu_n(f, E) \leqslant j$. Mai avem de asemenea $j_p \leqslant J_p[f(z) - T_n(z; f, E)] < \mu_n(f, E)$, deoarece media $J_p[f - T]$ tinde către maximul modulului diferenței $f - T$ pe E și această medie este o funcție, crescătoare de p.

Rezultă deci şi $j \leqslant \mu_n(f, E)$, de unde $j = \mu_n(f, E)$.

Aşadar $\mu_n(f, E) = \max\limits_{z \in E} |f(z) - P(z)|$ şi polinomul de cea mai bună aproximaţie a unei funcţii continue fiind unic, rezultă $P(z) = T_n(z\,; f, E)$.

Prin aceasta am arătat că şirul $\{P_{p_m}(z)\}$ converge uniform către $T_n(z\,; f, E)$. Însă în baza aceleaşi observaţii ([4], p. 80), rezultă că întreg şirul $\{P_n(z)\}$ converge uniform către $T_n(z\,; f, E)$ în cercul (C). Prin aceasta afirmaţia teoremei este complet demonstrată.

3. Folosind acelaşi procedeu ca şi în lucrarea amintită mai sus, se poate da polinomului $P_n(z)$ care se abate cel mai puţin de la funcţia $f(z)$ în media $2p$ pe mulţimea E, o formă specială, de unde trecînd la limită pentru $p \to \infty$, se obţine o formă specială pentru polinomul $T_n(z\,; f, E)$.

S-a văzut ([4], formula 10) că polinomul $P(z)$ care realizează minimul mediei (2) verifică următoarea ecuaţie funcţională

$$P(z) = \frac{\sum |P(c_{\nu_1}) \ldots P(c_{\nu_{n-k}})|^{2p-2} |V(c_{\nu_1}, \ldots, c_{\nu_{n-k}})|^2 [\varphi(z) - L(c_{\nu_1}, \ldots, c_{\nu_{n-k}}; \varphi)]}{\sum |P(c_{\nu_1}) \ldots P(c_{\nu_{n-k}})|^{2p-2} |V(c_{\nu_1}, \ldots, c_{\nu_{n-k}})|^2}, \tag{4}$$

unde semnul $\sum$ se extinde asupra tuturor indicilor. Trecîndu-se la limită în (4) pentru $p \to \infty$, se obţine următoarea expresie a polinomului lui Cebîşev k-restrîns ([4], formula 13)

$$\begin{gathered} T_n^k(z; f) = \sum K_{\nu_1} K_{\nu_2} \ldots K_{\nu_{n-k}} |V(c_{\nu_1}, \ldots, c_{\nu_{n-k}})|^2 [\varphi(z) - L(c_{\nu_1}, \ldots, c_{\nu_{n-k}}; \varphi)], \quad (5) \\ \sum K_{\nu_1} K_{\nu_2} \ldots K_{\nu_{n-k}} |V(c_{\nu_1}, \ldots, c_{\nu_{n-k}})|^2 = 1, \end{gathered}$$

unde K_ν sînt nişte constante nenegative, $\varphi(z) = z^n + A_1 z^{n-1} + \ldots + A_k z^{n-k}$ — o funcţie dată, iar $L(z_1, z_2, \ldots, z_n; \varphi)$ reprezintă polinomul de interpolare a lui Lagrange pe nodurile $z_1, z_2, \ldots, z_n$, a funcţiei $\varphi(z)$.

Procedînd la fel ca în lucrarea amintită, găsim o ecuaţie funcţională analoagă cu ecuaţia (4) pentru $g(z) = P_p(z) - f(z)$

$$g(z) = \frac{\sum |g(c_{\nu_1}) \ldots g(c_{\nu_{n+1}})|^{2p-2} \cdot |V(c_{\nu_1}, \ldots, c_{\nu_{n+1}})|^2 [L(c_{\nu_1}, \ldots, c_{\nu_{n+1}}; f) - f(z)]}{\sum |g(c_{\nu_1}) \ldots g(c_{\nu_{n+1}})|^{2p-2} \cdot |V(c_{\nu_1}, \ldots, c_{\nu_{n+1}})|^2} \tag{6}$$

unde $P_p(z)$ reprezintă polinomul care realizează minimul lui J_p.

Trecînd la limită în (6) pentru $p \to \infty$, se găseşte

$$\begin{gathered} T_n(z\,; f, E) = \sum K_{\nu_1} \ldots K_{\nu_{n+1}} |V(c_{\nu_1}, \ldots, c_{\nu_{n+1}})|^2 L(c_{\nu_1}, \ldots, c_{\nu_{n+1}}; f), \\ \sum K_{\nu_1} \ldots K_{\nu_{n+1}} |V(c_{\nu_1}, \ldots, c_{\nu_{n+1}})|^2 = 1. \end{gathered} \tag{7}$$

Relaţia (5) în care coeficienţii $K_\nu \geqslant 0$, dă o formă specială pentru polinomul $T_n(z\,; f, E)$, deoarece în membrul al doilea figurează numai afixele punctelor mulţimii E şi polinoamele de interpolare a lui Lagrange relativ

la toate cele C_N^{n+1} combinaţii posibile de noduri $c_{\nu_1}, c_{\nu_2}, \ldots, c_{\nu_{n+1}}$. Coeficienţii K_ν sînt complet determinaţi de sistemul

$$\begin{gathered} |f(c_1) - T_n(c_1\,; f, E)| = \ldots = |f(c_{N^*}) - T_n(c_{N^*}, f, E)|, \\ \sum K_{\nu_1} K_{\nu_2} \ldots K_{\nu_{n+1}} \cdot |V(c_{\nu_1}, c_{\nu_2}, \ldots, c_{\nu_{n+1}})|^2 = 1, \end{gathered} \tag{8}$$

unde $c_1, c_2, \ldots, c_{N^*}$ sînt punctele mulţimii E^* (E^* fiind o mulţime de tip de la Vallée — Poussin, adică o submulţime al lui E care conţine cel puţin $n + 2$ puncte şi în care $|f(z) - T_n(z\,; f, E)| = \mu_n(f, E)$). Ne putem limita la punctele mulţimii E^*, deoarece $T_n(z\,; f, E) = T_n(z\,; f, E^*)$. Aceasta revine la a spune că pentru $c_\nu \in E - E^*$, se ia $K_\nu = 0$.

Se poate extinda formule (7) şi pentru cazul unei mulţimi compacte oarecare, ţinînd cont de faptul că $T_n(z\,; f, E) = T(z\,; f, E^*) = T_n(z\,; f, E^{**})$, unde E^{**} ($E^{**} \subset E^*$) conţine cel mult $2n + 3$ puncte şi folosind algoritmul teoretic de determinare a mulţimilor E^{**}, întrebuinţat într-o lucrare [2] de către Prof. G. Călugăreanu, în care s-a studiat aproximarea funcţiei $f(x) = z^n$.

În cazul particular $N = n + 2$, se poate scrie explicit expresia polinomului de cea mai bună aproximaţie a funcţiei $f(z)$ pe $E_{n+2} = \{c_1, c_2, \ldots, c_{n+2}\}$,

$$T_n(z\,; f, E_{n+2}) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n+2} |V(c_1, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots, c_{i+2})| \cdot L(c_1, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots, c_{n+2}; f)}{\sum\limits_{i=1}^{n+2} |V(c_1, \ldots, c_{i+1}, c_{i+1}, \ldots, c_{n+2})|} \tag{9}$$

precum şi a celei mai bune aproximaţii

$$\mu_n(f, E) = \frac{|D(c_1, c_2, \ldots, c_{n+2}; f)|}{\sum\limits_{i=1}^{n+2} |V(c_1, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots, c_{n+2})|}, \tag{10}$$

unde $D(z_1, z_2, \ldots, z_n; f)$ este determinantul care se obţine din determinantul lui Van der Monde înlocuind coloana corespunzătoare lui z_i^{n-1} cu $f(z_i)$. Formulele (6) şi (7) sînt analoage cu cele cunoscute ([6], p. 28).

4. Aceste rezultate pot fi extinse şi la cazul unei *medii ponderate* de forma

$$J_p(m) = \left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu |f(c_\nu) - P(c_\nu)|^{2p} \right)^{\frac{1}{2p}}, \tag{11}$$

unde numerele m_ν verifică relaţiile $m_\nu \geqslant 0$, $\nu = 1, 2, \ldots, N$, $\sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu = 1$, urmînd întocmai raţionamentul făcut în cazul mediei simetrice $m_1 = m_2 = \ldots = m_N = \frac{1}{N}$, considerată mai sus.

Dacă notăm cu $P_p(z\,;\,m)$ polinomul care realizează minimul lui $J_p(m)$ cu ponderea $m = \{m_\nu\}$ şi cu $j_p(m) = \min_{(P_n)} J_p(m)$, atunci procedînd la fel, se constată că polinomul $P_p(z\,;\,m)$ va satisface o ecuaţie funcţională analoagă cu (6), în care au să apară în plus numerele $m_1, m_2, \ldots, m_N$:

$$g(z) = \frac{\Sigma\, m_{\nu_1} \ldots m_{\nu_{n+1}} |g(c_{\nu_1}) \ldots g(c_{\nu_{n+1}})|^{2p-2} |V(c_{\nu_1}, \ldots, c_{\nu_{n+1}})|^2 [L(c_{\nu_1}, \ldots, c_{\nu_{n+1}}; f) - f(z)]}{\Sigma\, m_{\nu_1} \ldots m_{\nu_{n+1}} |g(c_{\nu_1}) \ldots g(c_{\nu_{n+1}})|^{2p-2} |V(c_{\nu_1}, \ldots c_{\nu_{n+1}})|^2}, \tag{12}$$

sau

$$P_p(z;\, m) = \frac{\Sigma\, m_{\nu_1} \ldots m_{\nu_{n+1}} |g(c_{\nu_1}) \ldots g(c_{\nu_{n+1}})|^{2p-2} |V(c_{\nu_1}, \ldots, c_{\nu_{n+1}})|^2 [L(c_{\nu_1}, \ldots, c_{\nu_{n+1}}; f)}{\Sigma\, m_{\nu_1} \ldots m_{\nu_{n+1}} |g(c_{\nu_1}) \ldots g(c_{\nu_{n+1}})|^{2p-2} |V(c_{\nu_1}, \ldots, c_{\nu_{n+1}})|^2}. \tag{13}$$

Din formula (13) se vede că pentru $p = 1$ polinomul $P_1(z;\, m)$ care realizează minimul mediei patratice ponderate, este complet determinat

$$P_1(z;\, m) = \frac{\Sigma\, m_{\nu_1} \ldots m_{\nu_{n+1}} |V(c_{\nu_1}, \ldots, c_{\nu_{n+1}})|^2 L(c_{\nu_1}, \ldots, c_{\nu_{n+1}}; f)}{\Sigma\, m_{\nu_1} \ldots m_{\nu_{n+1}} |V(c_{\nu_1}, \ldots, c_{\nu_{n+1}})|^2}. \tag{14}$$

Comparî d (14) cu forma (7) a polinomului de cea mai bună aproximaţie a funcţiei $f(z)$, se vede că cele două expresii sînt analoage, cu singura deosebire că în (7) figurează coeficienţii K_ν care sînt complet determinaţi din relaţiile (8) (afară de un factor pozitiv arbitrar), pe cînd în (14) apar numerele care formează ponderea mediei patratice.

În cazul cînd mulţimea E este o mulţime de tip de la Vallée-Poussin, adică în fiecare punct al său $c_\nu \in E$, $|f(c_\nu) - T_n(c_\nu\,;\,f,\,E)| = \mu_\nu(f,\,E)$, se poate caracteriza sistemul de valori $\{m_\nu\}$, care corespunde egalităţii $P_p(z\,;\,m) = T_n(z\,;\,f,\,E)$, oricare ar fi $p \geqslant 1$.

În acest sens, să arătăm că $j_1(K) = \max_{(m_\nu)} j_1(m)$, unde $K = \{K_\nu\}$, $\nu = 1, 2, \ldots, N$, reprezintă coeficienţii ce apar în expresia (7). (evident că putem presupune $\Sigma K_\nu = 1$).

În adevăr, pentru orice mulţime E şi orice sistem de numere $\{m_\nu\} = m$, $m_\nu \geqslant 0$, $\nu = 1, 2, \ldots, N$, avem

$$j_1^2(m) = \min_{(P_n)} \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu |f(c_\nu) - P(c_\nu)|^2 \leqslant \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu |f(c_\nu) - T_n(c_\nu\,;\,f,\,E)|^2 \leqslant [\mu_n(f,\,E)]^2 \tag{12}$$

deci,

$$j_1(m) \leqslant \mu_n(f,\,E). \tag{13}$$

Dacă notăm $j_1 = \max_{\{m_\nu\}} j_1(m)$, avem de asemenea $j_1 \leqslant \mu_n(f,\,E)$.

Însă, deoarece $P_1(z\,;\,K) = T_n(z\,;\,f,\,E)$, avem

$$j_1^2(K) = \sum_{\nu=1}^{N} K_\nu |f(c_\nu) - T_n(c_\nu\,;\,f,\,E)|^2 = [\mu_n(f,\,E)]^2, \tag{14}$$

deci $j_1 = j_1(K) = \mu_n(f,\,E)$.

Acum putem enunţa următoarea

TEOREMĂ 2. *Dacă E este o mulţime de tip de la Vallée-Poussin, atunci avem*

$$P_p(z\,;\,K) = T_n(z\,;\,f,\,E), \tag{15}$$

oricare ar fi $p \geqslant 1$.

Vom demonstra teorema folosind cunoscuta inegalitate a lui Hölder. Avem

$$\mu_n(f,\,E) = \left(\sum_{\nu=1}^{N} K_\nu |f(c_\nu) - T_n(c_\nu\,;\,f,\,E)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{\nu=1}^{N} K_\nu |f(c_\nu) - P_p(c_\nu\,;\,K)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_{\nu=1}^{N} K_\nu^{1-\frac{1}{p}} [K_\nu^{\frac{1}{p}} |f(c_\nu) - P_p(c_\nu\,;\,K)|^2]\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{\nu=1}^{N} K_\nu\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\nu=1}^{N} K_\nu |f(c_\nu) - P_p(c_\nu\,;\,K)|^{2p}\right)^{\frac{1}{2p}} =$$

$$= \left(\sum_{\nu=1}^{N} K_\nu |f(c_\nu) - P_p(c_\nu\,;\,K)|^{2p}\right)^{\frac{1}{2p}} = j_p(K),$$

deci

$$\mu_n(f,\,E) \leqslant j_p(K). \tag{16}$$

Însă

$$j_p(K) = \left(\sum_{\nu=1}^{N} K_\nu |f(c_\nu) - P_p(c_\nu\,;\,K)|^{2p}\right)^{\frac{1}{2p}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{\nu=1}^{N} K_\nu |f(c_\nu) - T_n(c_\nu\,;\,f,\,E)|^{2p}\right)^{\frac{1}{2p}} = \mu_n(f,\,E)$$

adică, $\mu_n(f,\,E) \geqslant j_p(K)$. De aici şi din (16) rezultă $\mu_n(f,\,E) = j_p(K)$ şi polinoamele $P_p(z\,;\,K)$ şi $T_n(z\,;\,f,\,E)$ fiind unice, avem $P_p(z\,;\,K) = T_n(z\,;\,f,\,E)$. Cum inegalităţile de mai sus au loc oricare ar fi $p \geqslant 1$, teorema este demonstrată.

Folosind rezultatele precedente, putem da o condiţie necesară şi suficientă pentru ca polinomul $T_n(z\,;\,f,\,E)$ să fie cea mai bună aproximaţie, analoagă cu cea din lucrarea [1] a lui V. S. Videnski. Anume, avem următoarea

TEOREMA 3. *Pentru ca polinomul $T_n(z\,;\,f,\,E)$ să fie polinomul de cea mai bună aproximaţie a funcţiei $f(x)$ pe mulţimea E, este necesar şi suficient să fie verificate relaţiile*

$$f(c_\nu) - T_n(c_\nu\,;\,f,\,E) = \mu_n e^{-i\theta_\nu},\ \mu_n > 0,\ \nu = 1, 2, \ldots, N, \tag{17}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} K_\nu e^{i\theta_\nu} P_n(c_\nu) = 0, \tag{18}$$

oricare ar fi polinomul $P_n(z)$ de grad cel mult n, unde $K = \{K_\nu\}$ $\nu = 1, 2, \ldots, N$, este determinat din condiţia $j_1(K) = \max\limits_{\{m_\nu\}} j_1(m)$ $(j_1(m) = \min\limits_{(P_n)} j_1(m))$.

Condiţia este *necesară*. În adevăr, dacă $T_n(z; f, E)$ este polinomul de cea mai bună aproximaţie a funcţiei $f(z)$ pe mulţimea E, atunci din teorema 2, rezultă că el realizează minimul mediei ponderate, cu ponderea $K = \{K_\nu\}$, oricare ar fi $p \geqslant 1$. Prin urmare funcţia reală $J_p[K; T_n + (\xi + i\eta) \cdot P_p]$ îşi atinge minimul său pentru $\xi = 0$, $\eta = 0$ (deoarece $J_p(K, T_n) = j_p(K)$).

Deci, trebuie să fie îndeplinite relaţiile

$$\frac{\partial(J_p(K;\ T_n))}{\partial \xi} = 0, \qquad \frac{\partial(J_p(K;\ T_n))}{\partial \eta} = 0, \tag{19}$$

care sînt echivalente cu următoarea:

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{K_\nu\, |f(c_\nu) - T_n(c_\nu; f, E)|^{2p} P_n(c_\nu)}{f(c_\nu) - T_n(c_\nu; f, E)} = 0, \tag{20}$$

care are loc oricare ar fi polinomul $P_n(z)$ de grad cel mult n. Ţinînd cont de faptul că E este o mulţime de tip de la Vallée-Poussin, avem

$$f(c_\nu) - T_n(c_\nu; f, E) = \mu_n(f, E)\, e^{-i\theta_\nu}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, N. \tag{21}$$

Din (20) şi (21) rezultă relaţia (18) şi deci necesitatea este demonstrată.

Pentru a demonstra *suficienţa* să observăm că relaţia (18) se poate transcrie şi sub următoarea formă:

$$\sum_{\nu=1}^{N} K_\nu \overline{[f(c_\nu) - T_n(c_\nu; f, E)]} \cdot P_n(c_\nu) = 0. \tag{22}$$

De aici se vede că $T_n(z; f, E)$ este polinomul minimizant al mediei patratice ponderate, cu ponderea $K = \{K_\nu\}$.

Ţinînd însă cont de condiţiile impuse constantelor $\{K_\nu\}$, din teorema 1, rezultă că $T_n(z; f, E)$ este polinomul de cea mai bună aproximaţie a funcţiei $f(z)$ pe mulţimea E. Prin urmare, suficienţa este demonstrată.

Această teoremă reprezintă o precizare a teoremei amintite ([1], p. 170, teorema 1), deoarece în teorema 3 se precizează constantele care apar în enunţ. De altfel ele coincid cu coeficienţii care apar în expresia (7) a polinomului $T_n(z; f, E)$.

Universitatea „Babeş–Bolyai", Cluj
Catedra de Teoria funcţiilor

О ПОЛИНОМАХ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ НА КОНЕЧНОМ МНОЖЕСТВЕ ТОЧЕК КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Пусть E конечное множество состоящее из $N\,(N \geqslant n + 2)$ точек комплексной плоскости и $f(z)$ непрерывная функция в некоторой области, содержащей множество E.

В труде исследуется определение полинома наилучшего приближения непрерывной функции $f(z)$ на множестве E, применяя метод Г. П о й я, который связывает наилучшее равномерное приближение с наилучшим степенным приближением.

Рассматривается симметрическое среднее порядка $2p$.

$$J_p = \left(\frac{1}{N}\sum_{\nu=1}^{N} |f(c_\nu) - P(c_\nu)|^{2p}\right)^{\frac{1}{2p}},$$

где $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ есть любой полином с комплексными коэффициентами степени не выше n.

Доказывается, что *существует только один полином $P_p(z)$ осуществляющий минимум J_p* (для фиксированного p) *и что, обозначая через $j_p = \min J_p$ имеем следующие соотношения:*

$$\lim_{p\to\infty} P_p(z) = T_n(z; f, E),\ j = \lim_{p\to\infty} j_p = \mu_n(f, E) = \max_{z\in E} |f(z) - T_n(z; f, E)|,$$

где $T_n(z; f, E)$ есть полином наилучшего приближения n-ой степени функции $f(z)$ на множестве E.

Применяя тот же прием, как и в предыдущем труде [4] находится особую форму полинома $T_n(z; f, E)$ (формула (7) в тексте статьи) в которой коэффициенты $K_\nu \geqslant 0$ а $L(c_1, \ldots, c_n; f)$ представляет собой полином Лагранжа функции $f(z)$ относительно узлов $c_1, \ldots, c_n$. Коэффициенты $K_\nu \geqslant 0$ определяются алгебрической системой (формула (8)).

Во второй части расматривается весовое среднее

$$J_p(m) = \left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\, |f(c_\nu) - P(c_\nu)|^{2p}\right)^{\frac{1}{2p}}$$

и показывается что полученные результаты в случае симметрической средней $m_\nu = \frac{1}{N}$, $\nu = 1, 2, \ldots, N$ распространяются и на этот случай.

В случае множества типа Вале-Пусэн (т.е. множества E в точках которого $|f(z) - T_n(z; f, E)| = \mu_n(f, E)$ доказывается теорема 2, в которой характеризуется система чисел $\{m_\nu\}$, соответствующих равенству $P_n(z; m) = T_n(z; f, E)$ где $P_p(z; m)$ представляет собой минимизирующий полином средней $J_p(m)$.

Наконец, в теореме 3 дается необходимое и достаточное условие для полинома $T_n(z; f, E)$.

SUR LES POLYNOMES DE LA MEILLEURE APPROXIMATION D'UNE FONCTION CONTINUE SUR UN ENSEMBLE FINI DE POINTS DANS LE PLAN COMPLEXE

RÉSUMÉ

Soient E un ensemble fini formé de N $(N \geqslant n+2)$ points du plan complexe et $f(z)$ une fonction continue dans un domaine qui contient entièrement l'ensemble E.

On étudie la détermination du polynome de la meilleure approximation d'une fonction continue $f(z)$ sur un ensemble E, en utilisant une méthode de G. Pólya [5] qui relie la meilleure approximation uniforme à la meilleure approximation exponentielle.

On considère la moyenne symétrique de l'ordre $2p$

$$J_p = \left(\frac{1}{N}\sum_{\nu=1}^{N}|f(c_\nu) - P(c_\nu)|^{2p}\right)^{\frac{1}{2p}},$$

où $P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_n$ est un polynome quelconque à coefficients complexes du degré n au plus.

On démontre *qu'il existe un seul polynome* $P_p(z)$ *qui réalise le minimum de* J_p (pour p — fixe) *et, en notant* $j_p = \min J_p$, *on a les relations suivantes :*

$$\lim_{p\to\infty} P_p(z) = T_n(z;f,E), \quad j = \lim_{p\to\infty} j_p = \mu_n(f,E) = \max_{z\in E}|f(z) - T_n(z;f,E)|,$$

où $T_n(z;f,E)$ *est le polynome de la meilleure approximation de degré* n *de la fonction* $f(z)$ *sur l'ensemble* E.

En employant le même procédé que dans un travail antérieur [4] on trouve une forme spéciale pour le polynome $T_n(z;f,E)$ (formule (7) du texte), où les coefficients $K_\nu \geqslant 0$, et $L(c_1,\ldots,c_n;f)$ représente le polynome de Lagrange relatif aux noeuds $c_1, c_2, \ldots, c_n$ de la fonction $f(z)$. Les coefficients $K_\nu \geqslant 0$ sont déterminés à partir d'un système algébrique (formule (8)).

Dans la deuxième partie du travail on considère la moyenne pondérée

$$J_p(m) = \left(\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu\,|f(c_\nu) - P(c_\nu)|^{2p}\right)^{\frac{1}{2p}}$$

et on montre que les résultats obtenus dans le cas de la moyenne symétrique $m_\nu = \frac{1}{M}$, $\nu = 1,2,\ldots,N$, s'étendent aussi à ce cas.

Dans le cas d'un ensemble du type de De la Vallée-Poussin (c'est-à-dire un ensemble E dans les points duquel $|f(z) - T_n(z;f,E)| = \mu_n(f,E)$), on démontre le théorème 2, où l'on donne une caractérisation du système de nombres $\{m_\nu\}$ qui correspondent à l'égalité $P_p(z;m) = T_n(z;f,E)$. où $P_p(z;m)$ représente le polynome minimisant de la moyenne $J_p(m)$.

Enfin, dans le théorème 3, on donne une condition nécessaire et suffisant pour le polynome $T_n(z;f,E)$.

BIBLIOGRAFIE

1. В. С. Виденский, *О равномерном приближении в комплексной плоскости.* У.М.Н., **XI**, *5* (7), 169—175 (1956).
2. G. Călugăreanu, *Asupra polinoamelor lui Cebîşev ale mulţimilor plane mărginite şi închise.* Bul. Ştiinţific. Seria Mat. Fiz. Chim., **II**, 8—15 (1950).
3. G. Călugăreanu, *Despre polinoamele lui Cebîşev ale mulţimilor finite de puncte din plan (III).* Studia Univ. Babeş şi Bolyai din Cluj. Seria Mat., **1**, 24—28 (1958).
4. I. Maruşciac, *Asupra polinoamelor lui Cebîşev k-restrînse pe o mulţime mărginită şi închisă.* Studia Univ. Babeş-Bolyai Cluj, Seria Mat. Fiz., **2** 1960
5. G. Pólya, *Sur un algorithm toujours convergent pour obtenir les polynomes de meilleure approximation de Tchebicheff pour une fonction continue quelconque.* Comtes Rendus, Paris, **157**, 840 (1913).
6. T. Popoviciu, *Despre cea mai bună aproximaţie a funcţiilor continue prin polinoame.* Monografii matematice a Univ. din Cluj, 1937.
7. I. L. Walsh and Zedek, *On generalized Tchebycheff Polynomials.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1956, nr. 2. pp. 99—104.

Primit la 18. V. 1960.