ASUPRA DELIMITĂRII RESTULUI ÎN UNELE FORMULE DE APROXIMARE LINIARĂ ALE ANALIZEI*)

DE

TIBERIU POPOVICIU
Membru corespondent al Academiei R.P.R.
(Cluj)

1. Să presupunem că restul $R[f]$ al unei formule de aproximare liniară este o funcțională liniară definită pe un spațiu vectorial S, format din funcții $f = f(x)$, definite și continue pe un interval I. Funcțiile f și funcționala liniară $R[f]$ sînt reale și S conține toate polinoamele.

Spunem că $R[f]$ este de *formă simplă*, dacă există un întreg $n \geqq -1$, astfel încît să aibă loc egalitatea

$$R[f] = K[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+2}; f], \qquad f \in S, \tag{1}$$

unde $K = R[x^{n+1}]$ este $\neq 0$, independent de funcția f, iar ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n+2$ sînt $n+2$ puncte distincte ale intervalului I (care pot să depindă în general de funcția f și care sînt situate în interiorul intervalului, dacă $n \geqq 0$). Notația $[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+2}; f]$ reprezintă diferența divizată a funcției f pe nodurile $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+2}$. Pentru aceste noțiuni și pentru cele cîteva proprietăți care vor urma, rugăm cititorul de a consulta lucrările noastre anterioare, în particular, lucrarea noastră [3] din volumul anterior al acestei reviste.

În acest caz, n reprezintă gradul de exactitate al restului și se bucură de proprietatea (caracteristică) că $R[f]$ este nul pentru orice polinom de grad n, dar $R[x^{n+1}] \neq 0$.

Reamintim că *pentru ca funcționala $R[f]$ avînd gradul de exactitate n, să fie de formă simplă, este necesar și suficient ca $R[f] \neq 0$ pentru orice funcție $f \in S$ convexă de ordinul n* (pe I). În acest caz este de altfel necesar ca $R[f]$ să păstreze un semn constant pentru orice funcție convexă de ordinul n. Observînd că funcția x^{n+1} este convexă de ordinul n, condiția precedentă se poate scrie

$$R[x^{n+1}] \cdot R[f] > 0. \tag{2}$$

---

*) Această lucrare se publică și în limba franceză în revista „Mathematica" vol. 2(25), fascicola 1.

Condiţia (2) pentru orice funcţie $f \in S$ convexă de ordinul n, este deci necesară şi suficientă pentru ca $R[f]$ să fie de forma simplă (1). Observăm că pentru aceasta este de asemeeea necesar (dar nu suficient) ca $R[x^{n+1}] \neq 0$ şi

$$R[x^{n+1}] \cdot R[f] \geqq 0 \tag{3}$$

pentru orice funcţie $f \in S$ neconcavă de ordinul n.

2. Dacă funcţionala $R[f]$ este de formă simplă (1), atunci o putem delimita cu formula

$$|R[f]| \leqq |R[x^{n+1}]| \cdot M, \tag{4}$$

unde

$$M = \sup_{x_i \in I} |[x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f]|. \tag{5}$$

De altfel dacă f admite o derivată de ordin $n+1$ (mărginită) pe I, numărul (5) este dat de egalitatea

$$M = \frac{1}{(n+1)!} \sup_{x \in I} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Dar delimitarea (4) este valabilă într-un caz mai general. Anume, vom demonstra că:

Delimitarea (4) este valabilă dacă $R[f]$ are gradul de exactitate n şi dacă inegalitatea (3) este verificată pentru orice funcţie $f \in S$ neconcavă de ordinul n.

Avem $R[x^{n+1}] \neq 0$ şi pentru demonstraţie putem presupune că $R[x^{n+1}] > 0$. Considerăm atunci funcţionala liniară (definită pe S)

$$R_1[f] = R[f] + \varepsilon [x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}; f], \tag{6}$$

unde $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$ sînt $n+2$ puncte distincte fixate (independent de funcţia f) în intervalul I, iar ε este un număr pozitiv oarecare. Vom arăta că $R_1[f]$ este de formă simplă (1). Într-adevăr, dacă ţinem seamă de faptul că diferenţa divizată pe $n+2$ noduri (nu toate confundate) a unei funcţii convexe de ordinul n este, prin definiţie, pozitivă, deducem că $R_1[f] > 0$, pentru orice funcţie $f \in S$, convexă de ordinul n. Proprietatea este astfel demonstrată. Ţinînd seamă de (5) şi (6) şi scriind de asemenea delimitarea corespunzătoare (4) pentru $R_1[f]$, obţinem

$$|R[f]| \leqq (R[x^{n+1}] + 2\varepsilon) M.$$

Această inegalitate fiind adevărată oricare ar fi numărul pozitiv ε, rezultă delimitarea (4) şi proprietatea în cauză este demonstrată. Dacă avem $R[x^{n+1}] < 0$, demonstraţia este analoagă. Se ia atunci în (6) pentru ε un număr negativ oarecare.

3. Pentru a aplica proprietatea precedentă este suficient de a cunoaşte criterii care să permită de a afirma că (în ipoteza $R[x^{n+1}] \neq 0$) inegalitatea (3) este verificată pentru orice funcţie $f \in S$, neconcavă de ordinul n. Vom

prezenta aici un astfel de criteriu care rezultă din remarcabila proprietate a polinoamelor de aproximare ale lui S. N. Bernstein, de a păstra caracterul convexităţii funcţiilor [2].

Presupunem că $I = [0, 1]$ şi că funcţiile spaţiului S admit derivate de ordinul $j\ (\geqq 0)$ continue pe $[0, 1]$. Considerăm funcţionala liniară $R[f]$, avînd gradul de exactitate n şi care este mărginită în norma

$$||f|| = \sum_{i=0}^{j} \sup_{x \in [0,1]} |f^{(i)}(x)|. \tag{7}$$

Notăm

$$\pi_{k,l} = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \int_x^1 (t-x)^n t^k (1-t)^l \, dt. \tag{8}$$

În ipotezele formulate anterior are loc următoarea proprietate:

Pentru ca inegalitatea (3) să fie verificată pentru orice funcţie $f \in S$, neconcavă de ordinul n, este (necesar şi) *suficient ca să aibă loc inegalitatea $R[x^{n+1}] \cdot R[\pi_{k,l}] \geqq 0$, oricare ar fi întregii nenegativi k şi l.*

Observăm că $\pi_{k,l}^{(n+1)} = x^k(1-x)^l$. Dacă

$$B_m = B_m(x; f) = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} f\left(\frac{i}{m}\right) x^i (1-x)^{m-i}$$

este polinomul lui S. N. Bernstein de gradul m, atunci pentru derivata sa de ordinul $n+1$ $(m \geqq n+1)$, avem

$$B_m^{(n+1)} = \frac{(m-1)!\,(n+1)!}{m^n(m-n-1)!} \sum_{i=0}^{m-n-1} \binom{m-n-1}{i} \left[\frac{i}{m}, \frac{i+1}{m}, \ldots, \frac{i+n+1}{m}; f\right] \pi_{i,\,m-n-1-i}^{(n+1)},$$

de unde

$$B_m = \frac{(m-1)!\,(n+1)!}{m^n(m-n-1)!} \sum_{i=0}^{m-n-1} \binom{m-n-1}{i} \left[\frac{i}{m}, \frac{i+1}{m}, \ldots, \frac{i+n+1}{m}; f\right] \pi_{i,\,m-n-1-i} + \beta_m,$$

unde β_m este un polinom de gradul n.

După cum au arătat S. N. Bernstein [1] şi S. Wigert [5], dacă derivata $f^{(i)}$ de ordin $i\ (\geqq 0)$ a funcţiei f există şi este continuă pe $[0, 1]$, şirul $\{B_m^{(i)}\}$ tinde pentru $m \to \infty$, uniform pe $[0, 1]$ către $f^{(i)}$. Rezultă de aici că $R[B_m] \to R[f]$ pentru $m \to \infty$ şi deci

$$\lim_{m \to \infty} R[x^{n+1}] \cdot R[B_m] = R[x^{n+1}] \cdot R[f]. \tag{9}$$

Dacă observăm că

$$R[B_m] = \frac{(m-1)!\,(n+1)!}{m^n(m-n-1)!} \sum_{i=0}^{m-n-1} \binom{m-n-1}{i} \left[\frac{i}{m}, \frac{i+1}{m}, \ldots, \frac{i+n+1}{m}; f\right] R[\pi_{i,m-n-1-i}]$$

şi că diferenţele divizate pe $n+2$ noduri ale unei funcţii neconcave de ordinul n sînt nenegative, rezultă că $R[x^{n+1}] \cdot R[B_n] \geq 0$ pentru orice funcţie neconcavă de ordinul n. Ţinînd seamă de (9), rezultă proprietatea în cauză.

4. Pentru a da o aplicaţie, fie $R[f]$ restul în formula de cuadratură numerică

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{2}{3}f(0) + \frac{1}{5}f'(0) + \frac{1}{30}f''(0) + \frac{1}{360}f'''(0) + \\ + \frac{1}{3}f(1) - \frac{1}{30}f'(1) + R[f],\end{aligned} \tag{10}$$

unde f admite o derivată de ordinul 3, continuă pe $[0, 1]$.

În acest caz funcţionala $R[f]$ are gradul de exactitate $n = 5$ şi este mărginită în raport cu norma (7), pentru $j = 3$. Avem

$$\pi_{k,l} = \frac{1}{5!}\int_x^1 (t-x)^5 t^k (1-t)^l \, dt.$$

Deducem

$$R[x^6] = \frac{1}{105} > 0, \quad \int_0^1 \pi_{k,l}\, dx = \frac{1}{6}\int_0^1 t^{6+k}(1-t)^l\, dt$$

şi un calcul simplu ne dă

$$R[\pi_{k,l}] = \frac{1}{6}\int_0^1 t^{k+2}(1-t)^{l+4}\, dt > 0.$$

Se poate deci aplica în acest caz delimitarea (4) şi avem

$$R[f] \leq \frac{1}{105} \sup_{x_i \in [0,1]} |[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7; f]|.$$

Dacă derivata de ordinul 6, $f^{(6)}$, există pe $[0, 1]$, avem

$$|R[f]| \leq \frac{1}{150} \cdot \frac{1}{6!} \sup_{x \in [0,1]} |f^{(6)}(x)|.$$

ОБ ОЦЕНКЕ ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ ФОРМУЛ ПРИБЛИЖЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Предполагается что остаток $R[f]$ некоторой формулы линейного приближения является линейным функционалом, определенным на векторном пространстве S, образованном фукциями $f = f(x)$, определенными и непрерывными на интервале I. Функции f и функционал $R[f]$ суть действительные, а пространство S, содержит все полиномы. Исходя от некоторых предыдущих результатов [3] в настоящем труде доказывается следующее свойство:

Чтобы имело место оценка (4), *где M дается формулой* (5), *достаточно чтобы $R[f]$ имел порядок точности n и чтобы неравенство* (3) *удовлетворялось для любой функции $f \in S$ невогнутой порядка n.*

Здесь под порядком точности функционала $R[f]$, разумевается число n с тем свойством, что $R[f]$ равняется нулю для любого полинома n-ой степени, но $R[x^{n+1}] \neq 0$.

В продолжении дается признак, дающий возможность узнать (при предположении $R[x^{n+1}] \neq 0$) удовлетворяется ли неравенство (3) для любой функции $f \in S$ невогнутой степени n. Этот признак основывается на применения свойства полиномов приближения С. Н. Бернштейна сохранять характер выпуклости [2].

С этой целью предполагается что $I = [0, 1]$ и что элементы пространства S имеют производные порядка j (≥ 0) непрерывные на $[0, 1]$. Предполагается еще что линейный функционал $R[f]$ ограничен относительно нормы (7). При этих предположениях доказывается свойство:

Для того, чтобы неравенство (3) *удовлетворялось какая ни была функция $f \in S$ невогнутая порядка n, (необходимо и) достаточно, чтобы имело место неравенство $R[x^{n+1}] \cdot R[\pi_{k,l}] \geq 0$, какие ни были неотрицательные целые числа k и l.*

Вышеуказанные результаты применяются к ограничению остатка квадратурных формул (10).

SUR LA DÉLIMITATION DU RESTE DANS CERTAINES FORMULES D'APPROXIMATION LINÉAIRES DE L'ANALYSE

RÉSUMÉ

On suppose que le reste $R[f]$ d'une formule d'approximation linéaire est une fonctionnelle linéaire définie sur un espace vectoriel S, formé par les fonctions $f = f(x)$, définies et continues sur un intervalle I. Les fonctions f et la fonctionnelle $R(f]$ sont réelles, et l'espace S contient tous les polynomes. En partant de quelques résultats antérieurs [3], on démontre dans le présent travail la propriété suivante :

Pour que la délimitation (4) *ait lieu, où M est donné par* (5), *il suffit que $R[f]$ ait le degré d'exactitude n et que l'inégalité* (3) *soit vérifiée pour toute fonction $f \in S$, non-concave d'ordre n.*

Nous entendons ici par degré d'exactitude d'une fonctionnelle $R[f]$ un nombre n ayant la propriété que $R[f]$ est nul pour tout polynome de degré n, mais $R[x^{n+1}] \neq 0$.

On donne ensuite un critère qui permet de connaître si (dans l'hypothèse $R[x^{n+1}] \neq 0$) l'inégalité (3) est vérifiée pour toute fonction $f \in S$, non-concave d'ordre n. Ce critère se base sur l'utilisation de la propriété qu'ont les polynomes d'approximation de S. N. Bernstein de conserver les caractères de convexité des fonctions [2].

On suppose à cette fin que $I = [0, 1]$ et que les éléments de l'espace S aient des dérivées d'ordre j ($\geqq 0$) continues dans $[0, 1]$. On suppose aussi que la fonctionnelle linéaire $R[f]$ soit bornée par rapport à la norme (7). Dans cette hypothèse on démontre la propriété suivante :

Pour que l'inégalité (3) *soit vérifiée quelles que soit la fonction $f \in S$ non-concave d'ordre n, il est* (nécessaire et) *suffisant qu'ait lieu l'inégalité $R[x^{n+1}]$. $R[\pi_{k,l}] \geqq 0$, quels que soient les entiers non-négatifs k et l.*

Les résultats ci-dessus s'appliquent à la délimitation du reste de la formule de quadrature (10).

BIBLIOGRAFIE

1. S. N. Bernstein, *Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités.* Сооб. Харьк. Матем. Об-ва, серия 2, **13**, 1—2 (1912).

2. T. Popoviciu, *Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur.* Mathematica, **10**, 49—54 (1934).

3. — *Asupra restului în unele formule liniare de aproximare ale analizei.* Studii şi Cercetări de Matematică (Cluj), X, 2, 337—389 (1959).

4. — *Sur le reste dans certaines formules linéaires d'approximation de l'analyse.* Mathematica, **1**(**24**), 95—142 (1960).

5. S. Wigert, *Sur l'approximation par polynomes des fonctions continues.* Arkiv för Mat Astr., och Fysik, **22** B, No. 9, 1—4 (1932).

Primit la 29 noembrie 1060.