EXPRESIA RESTULUI ÎN UNELE FORMULE DE DERIVARE PARȚIALĂ NUMERICĂ

DE

D. D. STANCU

(Cluj)

Lucrare prezentată la Colocviul de analiză numerică, organizat de Institutul de calcul al Academiei R.P.R. și de Soc. științelor matematice și fizice din R.P.R., între 8–13 dec. 1960, Cluj.

1. Să considerăm o funcție de două variabile, $f(x, y)$, care are pe dreptunghiul $D[a \leq x \leq b\,;\, c \leq y \leq d]$ derivatele parțiale de toate ordinele care intervin în această lucrare, cel puțin pe punctele pe care ele vor interveni în mod efectiv.

Fie $x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}$, $m+1$ puncte distincte din $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$, $n+1$ puncte distincte din $[\gamma, \delta] \subset [c, d]$.

Să notăm cu $P_{m,n}(f; x, y)$ polinomul de gradul m în raport cu x și de gradul n în raport cu y care coincide cu funcția $f(x, y)$ pe nodurile $M_{i,k}(x_i, y_k)$ $(i = \overline{1, m+1}\,;\ k = \overline{1, n+1})$. Se știe că formula de interpolare (cu rest), corespunzătoare, are următoarea formă

$$f(x, y) = P_{m,n}(f; x, y) + R_{m,n}(f; x, y), \tag{1}$$

restul avînd expresia

$$\begin{aligned} R_{m,n}(f; x, y) &= u(x)\,[x, x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}; f(t, y)] + \\ &+ v(y)\,[y, y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}; f(x, \tau)] - \\ &- u(x)\,v(y) \left[\begin{matrix} x, x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \\ y, y_1, y_2, \ldots, y_{n+1} \end{matrix} ; f(t, \tau) \right], \end{aligned} \tag{2}$$

unde

$$u(x) = \prod_{i=1}^{m+1} (x - x_i), \quad v(y) = \prod_{k=1}^{n+1} (y - y_k), \tag{3}$$

iar

$$[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\nu+1}; \varphi(t)] = \sum_{i=1}^{\nu+1} \frac{\varphi(\alpha_i)}{\omega'_1(\alpha_i)},$$

$$\left[\begin{matrix}\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\nu+1} \\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{\mu+1}\end{matrix}; \Phi(t,\tau)\right] = \sum_{i=1}^{\nu+1} \sum_{k=1}^{\mu+1} \frac{\Phi(\alpha_i, \beta_k)}{\omega'_1(\alpha_i)\,\omega'_2(\beta_k)},$$

$$\left(\omega_1(x) = \prod_{i=1}^{\nu+1} (x - \alpha_i), \ \omega_2(y) = \prod_{k=1}^{\mu+1} (y - \beta_k) \right)$$

sînt diferenţele divizate, respectiv de ordinele ν şi (ν, μ) ale funcţiilor $\varphi(t)$ şi $\Phi(t, \tau)$. Menţionăm că în cazul diferenţelor divizate, de la (2), relative la o singură variabilă, valorile x, x_i se referă la variabila t din $f(t, y)$, iar valorile y, y_k, la variabila τ din $f(x, \tau)$.

După cum se ştie, polinomul de interpolare $P_{m,n}(f; x,y)$ poate fi pus, de exemplu, fie sub forma lui Lagrange

$$L_{m,n}(f; x, y) = \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{u(x)}{(x-x_i)u'(x_i)} \frac{v(y)}{(y-y_k)v'(y_k)} f(x_i, y_k), \tag{4}$$

fie sub forma lui Newton

$$N_{m,n}(f; x,y) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} u_i(x)v_k(y) \left[\begin{matrix}x_1, x_2, \ldots, x_{i+1} \\ y_1, y_2, \ldots, y_{k+1}\end{matrix}; f(t, \tau)\right], \tag{5}$$

unde

$$u_i(x) = \prod_{\nu=1}^{i} (x-x_\nu), \ v_k(y) = \prod_{\mu=1}^{k} (y-y_\mu). \tag{6}$$

2. În vederea stabilirii unor formule de derivare parţială numerică, adică ale unor formule care permit să se calculeze în mod aproximativ valorile, pe anumite puncte, ale unor derivate parţiale ale funcţiei $f(x, y)$, printr-o combinaţie liniară a valorilor funcţiei pe nodurile $M_{i,k}(x_i, y_k)$, vom putea pleca de la formula de interpolare (1).

Astfel, dacă $0 \leq p \leq m$, $0 \leq q \leq n$ şi derivăm formula (1) de p ori în raport cu x şi de q ori în raport cu y, obţinem

$$\frac{\partial^{p+q} f(x, y)}{\partial x^p \partial y^q} = P_{m,n}^{(p,q)}(f; x,y) + R_{m,n}^{(p,q)}(f; x, y), \tag{7}$$

unde

$$P_{m,n}^{(p,q)}(f; x, y) = \frac{\partial^{p+q} P_{m,n}(f; x, y)}{\partial x^p \partial y^q}, \ R_{m,n}^{(p,q)}(f; x, y) = \frac{\partial^{p+q} R_{m,n}(f; x, y)}{\partial x^p \partial y^q}. \tag{8}$$

Presupunînd acum, de exemplu, că polinomul de interpolare considerat are expresia (5), se găseşte că

$$P_{m,n}^{(p,q)}(f; x, y) = \sum_{i=p}^{m} \sum_{k=q}^{n} u_i^{(p)}(x) v_k^{(q)}(y) \left[\begin{matrix}x_1, x_2, \ldots, x_{i+1} \\ y_1, y_2, \ldots, y_{k+1}\end{matrix}; f(t, \tau)\right]. \tag{9}$$

3. O problemă principală care se ridică relativă la formula de derivare parţială numerică (7) este problema unei evaluări avantajoase — din punct de vedere practic — a restului $R_{m,n}^{(p,q)}(f; x, y)$.

În paragraful al doilea din lucrarea [1] am încercat să evaluez în acest sens restul unor formule de tipul (7). Formulele care au fost date necesită însă o precizare a domeniilor lor de valabilitate, căci acolo am avut unele scăpări, deoarece m-am bazat pe unele rezultate eronate din cazul funcţiilor de o variabilă.

Să ne propunem a evalua mai întîi $R_{m,n}^{(p,0)}(f; x, y)$. Dacă ţinem seama că

$$u(x)v(y) \left[\begin{matrix}x, x_1, \ldots, x_{m+1} \\ y, y_1, \ldots, y_{n+1}\end{matrix}; f(t, \tau)\right] =$$
$$= v(y)\Big[y, y_1, \ldots, y_{n+1}; \ v(x)[x, x_1 \ \ldots, x_{m+1}; f(t, \tau)]\Big],$$

folosim notaţia

$$u(x)[x, x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}; f(t, \tau)] = \Phi(x, \tau) \tag{10}$$

şi avem în vedere formulele (2) şi (8), găsim că

$$R_{m,n}^{(p,0)}(f; x, y) = \frac{\partial^p \Phi(x, y)}{\partial x^p} + v(y)\left[y, y_1, \ldots, y_{n+1}; \frac{\partial^p f(x, y)}{\partial x^p}\right] -$$
$$- v(y)\left[y, y_1, \ldots, y_{n+1}; \frac{\partial^p \Phi(x,\tau)}{\partial x^p}\right]. \tag{11}$$

Să presupunem că lui y i-am dat o valoare fixă $\bar{y} \in D$. În cele ce urmează ne vom folosi de funcţia auxiliară

$$\varphi(x) = \varphi(x; \bar{y}) = u(x)\Big\{ [x, x_1, \ldots, x_{m+1}; f(t, \bar{y})] -$$
$$- v(\bar{y}) \left[\begin{matrix}x, x_1, \ldots, x_{m+1} \\ \bar{y}, y_1, \ldots, y_{n+1}\end{matrix}; f(t, \tau)\right]\Big\} - \alpha u(x) =$$
$$= \Phi(x, \bar{y}) - v(\bar{y}) [\bar{y}, y_1, \ldots, y_{n+1}; \Phi(x, \tau)] - \alpha u(x), \tag{12}$$

unde α este o constantă. Deoarece $\varphi(x_i) = 0$ $(i = \overline{1, m+1})$, prin aplicarea succesivă a teoremei lui Rolle se constată că derivata parţială de ordinul p a lui $\varphi(x)$

$$\varphi^{(p)}(x) = \frac{\partial^p \Phi(x, \bar{y})}{\partial x^p} - v(\bar{y}) \left[\bar{y}, y_1, \ldots, y_{n+1}; \frac{\partial^p \Phi(x, \tau)}{\partial x^p}\right] - \alpha u^{(p)}(x) \tag{13}$$

are cel puţin $m - p + 1$ rădăcini reale, distincte şi cuprinse în cel mai mic interval deschis, I_1, care conţine punctele $x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}$. Dacă $x = t$ se află în afara lui I_1 atunci se poate determina α astfel încît $\varphi^{(p)}(t) = 0$, căci atunci $u^{(p)}(t) \neq 0$; α fiind determinat în acest fel, $\varphi^{(p)}(x)$ va avea $m + 2 - p$ rădăcini reale şi distincte, ceea ce ne permite să tragem concluzia că în acest caz derivata de ordinul $m+1-p$ a lui $\varphi^{(p)}(x)$ se va anula într-un punct ξ care se află în cel mai mic interval deschis J_1 care conține punctele $t, x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}$:

$$[\varphi^{(p)}(x)]^{(m+1-p)}_{x=\xi} = \varphi^{(m+1)}(\xi) = 0. \tag{14}$$

Ţinînd seama că

$$\varphi^{(m+1)}(x) = \frac{\partial^{m+1}\Phi(x,\bar y)}{\partial x^{m+1}} - v(\bar y)\left[\bar y, y_1,\ldots,y_{n+1}; \frac{\partial^{m+1}\Phi(x,\tau)}{\partial x^{m+1}}\right] - \alpha u^{(m+1)}(x)$$

şi că derivata de ordinul $m+1$ pe punctul $(x,\bar y)$ a formulei de interpolare (1), care poate fi scrisă sub forma

$$f(x,y) = P_{m,n}(f;x,y)+\Phi(x,y)+v(y)[y,y_1,\ldots,y_{n+1}; f(x,y)-\Phi(x,y)],$$

este

$$\frac{\partial^{m+1}f(x,\bar y)}{\partial x^{m+1}} = \frac{\partial^{m+1}\Phi(x,\bar y)}{\partial x^{m+1}} + v(\bar y)\left[\bar y, y_1,\ldots,y_{n+1}; \frac{\partial^{m+1}f(x,\tau)}{\partial x^{m+1}} - \frac{\partial^{m+1}\Phi(x,\tau)}{\partial x^{m+1}}\right],$$

prin efectuarea diferenţei acestor două derivate obţinem

$$\frac{\partial^{m+1}f(x,\bar y)}{\partial x^{m+1}} - \varphi^{(m+1)}(x) = v(\bar y)\left[\bar y, y_1,\ldots,y_{n+1}; \frac{\partial^{m+1}f(x,\tau)}{\partial x^{m+1}}\right] + \alpha(m+1)!\,.$$

Punînd aici $x=\xi$ şi ţinînd seama de (14), putem deduce de aici valoarea lui α:

$$\alpha = \frac{1}{(m+1)!}\,\frac{\partial^{m+1}f(\xi,\bar y)}{\partial\xi^{m+1}} - \frac{v(\bar y)}{(m+1)!}\left[\bar y,y_1,\ldots,y_{n+1}; \frac{\partial^{m+1}f(\xi,\tau)}{\partial\xi^{m+1}}\right].$$

Dacă înlocuim această valoare a lui α în $\varphi^{(p)}(t)=0$, primim

$$\frac{\partial^p\Phi(t,\bar y)}{\partial t^p} - v(\bar y)\left[\bar y,y_1,\ldots,y_{n+1};\frac{\partial^p\Phi(t,\tau)}{\partial t^p}\right] - \frac{u^{(p)}(t)}{(m+1)!}\,\frac{\partial^{m+1}f(\xi,\bar y)}{\partial\xi^{m+1}} + \frac{u^{(p)}(t)v(\bar y)}{(m+1)!}\left[\bar y,y_1,\ldots,y_{n+1};\frac{\partial^{m+1}f(\xi,\bar y)}{\partial\xi^{m+1}}\right]=0.$$

Făcînd în (11) $y=\bar y$ şi ţinînd seama de această egalitate, restul (11) devine

$$R^{(p,0)}_{m,n}(f;x,\bar y) = \frac{u^{(p)}(x)}{(m+1)!}\,\frac{\partial^{m+1}f(\xi,\bar y)}{\partial\xi^{m+1}} + v(\bar y)\left[\bar y,y_1,\ldots,y_{n+1};\frac{\partial^pf(x,\tau)}{\partial x^p}\right] - \frac{u^{(p)}(x)v(\bar y)}{(m+1)!}\left[\bar y,y_1,\ldots,y_{n+1};\frac{\partial^{m+1}f(\xi,\tau)}{\partial\xi^{m+1}}\right], \tag{15}$$

sau

$$R^{(p,0)}_{m,n}(f;x,y) = \frac{u^{(p)}(x)}{(m+1)!}\,\frac{\partial^{m+1}f(\xi,\bar y)}{\partial\xi^{m+1}} + v(\bar y)\left[\bar y,y_1,\ldots,y_{n+1};\frac{\partial^pf(x,\tau)}{\partial x^p} - \frac{u^{(p)}(x)}{(m+1)!}\,\frac{\partial^{m+1}f(\xi,\tau)}{\partial\xi^{m+1}}\right].$$

Aplicînd formula de medie a diferenţelor divizate şi punînd y în loc $\bar y$, obţinem în definitiv

$$R^{(p,0)}_{m,n}(f;x,y) = \frac{u^{(p)}(x)}{(m+1)!}\,\frac{\partial^{m+1}f(\xi,y)}{\partial\xi^{m+1}} + \frac{v(y)}{(n+1)!}\,\frac{\partial^{p+n+1}f(x,\eta)}{\partial x^p\,\partial\eta^{n+1}} - \frac{u^{(p)}(x)v(y)}{(m+1)!\,(n+1)!}\,\frac{\partial^{m+n+2}f(\xi,\eta)}{\partial\xi^{m+1}\,\partial\eta^{n+1}}. \tag{16}$$

unde $\xi\in J_1$ şi $\eta\in J_2$ — acesta din urmă fiind cel mai mic interval care conţine punctele $y, y_1,\ldots,y_{n+1}$.

După cum s-a putut vedea, *formula aceasta e valabilă în cazul cînd x nu aparţine intervalului deschis I_1*, iar y e un număr real oarecare din $[c,d]$.

În mod analog se stabileşte formule

$$R^{(0,q)}_{m,n}(f;x,y) = \frac{u(x)}{(m+1)!}\,\frac{\partial^{q+m+1}f(\xi,y)}{\partial\xi^{m+1}\,\partial y^q} + \frac{v^{(q)}(y)}{(n+1)!}\,\frac{\partial^{n+1}f(x,\eta)}{\partial\eta^{n+1}} - \frac{u(x)v^{(q)}(y)}{(m+1)!\,(n+1)!}\,\frac{\partial^{m+n+2}f(\xi,\eta)}{\partial\xi^{m+1}\,\partial\eta^{n+1}}, \tag{17}$$

unde $\xi\in J_1$, şi $\eta\in J_2$. Această formulă e valabilă în cazul cînd x e oarecare din $[a,b]$, iar y nu aparţine celui mai mic interval deschis, I_2, care conţine nodurile $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$.

4. Pentru a da o evaluare analoagă cu cele precedente pentru restul formulei de derivare parţială numerică (7), să plecăm de la formula pe care am stabilit-o mai sus

$$\frac{\partial^pf(x,y)}{\partial x^p} = P^{(p,0)}_{m,n}(f;x,y)+R^{(p,0)}_{m,n}(f;x,y). \tag{18}$$

Derivînd-o de q $(0\leqq q\leqq n)$ ori, în raport cu y, se obţine o formulă de forma (7), unde pe baza formulei (15) putem scrie

$$R^{(p,0)}_{m,n}(f;x,y) = \frac{\partial^q}{\partial y^q}R^{(p,0)}_{m,n}(f;x,y) = \frac{u^{(p)}(x)}{(n+1)!}\,\frac{\partial^{m+q+1}f(\xi,y)}{\partial\xi^{n+1}\,\partial y^q} + \frac{\partial^q}{\partial y^q}\left((v(y)\left[y,y_1,\ldots,y_{n+1};\frac{\partial^pf(x,y)}{\partial x^p}\right]\right) - \frac{u^{(p)}(x)}{(m+1)!}\,\frac{\partial^q}{\partial y^q}\left(v(y)\left[y,y_1,\ldots,y_{n+1};\frac{\partial^{m+1}f(\xi,y)}{\partial\xi^{m+1}}\right]\right). \tag{19}$$

Să-i dăm lui x o valoare fixă $\bar{x} \in I_1$; atunci pentru ξ va corespunde o valoare $\bar{\xi}$.

Pentru a găsi o evaluare convenabilă pentru restul (18), să introducem următoarea funcţie auxiliară

$$\psi(y) = \psi(\bar{x}\,;y) = v(y)\left[y, y_1, \ldots, y_{n+1};\ \frac{\partial^p f(\bar{x}, y)}{\partial \bar{x}^p}\right] -$$
$$- \frac{u^{(p)}(\bar{x})v(y)}{(m+1)\,!}\left[y, y_1, \ldots, y_{n+1};\ \frac{\partial^{m+1} f(\bar{\xi}, y)}{\partial \bar{\xi}^{m+1}}\right] - \beta\, v(y), \tag{20}$$

unde β e o constantă.

Deoarece $\psi(y_k) = 0$ $(k = \overline{1, n+1})$, rezultă că derivata $\psi^{(q)}(y)$ va avea $n+1-q$ rădăcini reale, distincte şi cuprinse în intervalul deschis cel mai mic I_2 care conţine punctele $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$.

Dacă τ este un punct din afara intervalului I_2, atunci vom putea determina pe β astfel încît $\psi^{(q)}(\tau) = 0$; β fiind determinat în acest mod, rezultă că $\psi^{(q)}(y)$ va avea $n+2-q$ rădăcini reale şi distincte. În acest caz derivata de ordinul $n+1-q$ a lui $\psi^{(q)}(y)$ se va anula într-un punct η situat în cel mai mic interval deschis J_2 care conţine punctele $y, y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$

$$[\psi^{(q)}(y)]^{(n+1-q)}_{y=\eta} = \psi^{(n+1)}(\eta) = 0. \tag{21}$$

Dacă introducem notaţiile

$$g(y) = v(y)\left[y, y_1, y_2, \ldots, y_{n+1};\ \frac{\partial^p f(\bar{x}, y)}{\partial \bar{x}^p}\right], \tag{22}$$

$$h(y) = v(y)\left[y, y_1, y_2, \ldots, y_{n+1};\ \frac{\partial^{m+1} f(\bar{\xi}, y)}{\partial \bar{\xi}^{m+1}}\right] \tag{23}$$

şi calculăm derivata de ordinul $n+1$ a funcţiei (20), obţinem

$$\psi^{(n+1)}(y) = g^{(n+1)}(y) - \frac{u^{(p)}(\bar{x})}{(m+1)!}\, h^{(n+1)}(y) - \beta(n+1)\,!. \tag{24}$$

Să derivăm acum de $n+1$ ori, în raport cu y, formula de la (18)

$$\frac{\partial^{p+n+1} f(x, y)}{\partial x^p\, \partial y^{n+1}} = \frac{\partial^{n+1}}{\partial y^{n+1}} R^{(p,\,0)}_{m,\,n}(f;\,x, y) =$$
$$= \frac{u^{(p)}(x)}{(m+1)\,!}\, \frac{\partial^{m+n+2} f(\xi, y)}{\partial \xi^{m+1}\, \partial y^{n+1}} + g^{(n+1)}(y) - \frac{u^{(p)}(x)}{(m+1)\,!}\, h^{(n+1)}(y). \tag{25}$$

Punînd aici $x = \bar{x}$, $\xi = \bar{\xi}$ şi scăzînd membru cu membru formulele (24) şi (25), obţinem

$$\frac{\partial^{p+n+1} f(\bar{x}, y)}{\partial \bar{x}^p\, \partial y^{n+1}} - \psi^{(n+1)}(y) = \frac{u^{(p)}(\bar{x})}{(m+1)!}\, \frac{\partial^{m+n+2} f(\bar{\xi}, y)}{\partial \bar{\xi}^{m+1}\, \partial y^{n+1}} + \beta(n+1)\,!\,.$$

Făcînd în aceasta $y = \eta$ şi ţinînd seama de (21), deducem că

$$\beta = \frac{1}{(n+1)\,!}\, \frac{\partial^{p+n+1} f(\bar{x}, y)}{\partial \bar{x}^p\, \partial y^{n+1}} - \frac{u^{(p)}(\bar{x})}{(m+1)\,!\,(n+1)\,!}\, \frac{\partial^{m+n+2} f(\bar{\xi}, \eta)}{\partial \bar{\xi}^{m+1}\, \partial \eta^{n+1}}.$$

Înlocuind această valoare a lui β în $\psi^{(q)}(\tau) = 0$, adică în

$$\psi^{(q)}(\tau) = g^{(q)}(\tau) - \frac{u^{(q)}(x)}{(m+1)!}\, h^{(q)}(\tau) - \beta\, v^{(q)}(\tau) = 0,$$

obţinem

$$\psi^{(q)}(\tau) = g^{(q)}(\tau) - \frac{u^{(p)}(x)}{(m+1)!}\, h^{(q)}(\tau) - \frac{v^{(q)}(y)}{(n+1)!}\, \frac{\partial^{p+n+1} f(\bar{x}, \eta)}{\partial \bar{x}^p\, \partial \eta^{n+1}} +$$
$$+ \frac{u^{(p)}(\bar{x})v^{(q)}(\tau)}{(m+1)\,!\,(n+1)\,!}\, \frac{\partial^{m+n+2} f(\bar{\xi}, \eta)}{\partial \bar{\xi}^{m+1}\, \partial \eta^{n+1}} = 0. \tag{26}$$

Să ţinem seama că atunci cînd $x = \bar{x}$ avem $\xi = \bar{\xi}$ şi cînd folosim notaţiile (22) şi (23) restul (19) se scrie

$$R^{(p,\,q)}_{m,\,n}(f;\bar{x}, y) = \frac{u^{(p)}(\bar{x})}{(m+1)\,!}\, \frac{\partial^{m+q+1} f(\bar{\xi}, y)}{\partial \bar{\xi}^{m+1}\, \partial y^q} +$$
$$+ g^{(q)}(y) - \frac{u^{(p)}(\bar{x})}{(m+1)\,!}\, h^{(q)}(y). \tag{27}$$

Dacă se scad membru cu membru egalităţile (26) şi (27) şi se înlocuiesc apoi $\bar{x}$ cu x şi $\bar{\xi}$ cu ξ, obţinem tocmai formula pe care voiam s-o stabilim

$$\boxed{\begin{aligned} R^{(p,\,q)}_{m,\,n}(f;\,x, y) &= \frac{u^{(p)}(x)}{(m+1)\,!}\, \frac{\partial^{m+q+1} f(\xi, y)}{\partial \xi^{m+1}\, \partial y^q} + \\ &+ \frac{v^{(q)}(y)}{(n+1)!}\, \frac{\partial^{p+n+1} f(x, \eta)}{\partial x^p\, \partial \eta^{n+1}} - \frac{u^{(p)}(x)v^{(q)}(y)}{(m+1)\,!\,(n+1)\,!}\, \frac{\partial^{m+n+2} f(\xi, \eta)}{\partial \xi^{m+1}\, \partial \eta^{n+1}}. \end{aligned}} \tag{28}$$

Aici ξ şi η aparţin respectiv intervalelor J_1 şi J_2 adică celor mai mici intervale deschise care conţin punctele $x, x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}$, respectiv $y, y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$. După cum s-a putut vedea din demonstraţie, ξ şi η sînt aceiaşi în toţi trei termenii de mai sus.

Din cele ce preced s-a putut de asemenea constata că restul formulei de derivare parţială numerică (7) poate fi pus sub forma remarcabilă de la (28), în cazul cînd x şi y sînt respectiv în afara intervalelor I_1 şi I_2, adică a celor mai mici intervale deschise care conţin punctele $x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}$, respectiv $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$.

Formula (28) reprezintă extinderea la două variabile a unei formule binecunoscute a lui J. F. Steffensen [2].

Observații. Se poate constata că formula (28) poate să aibă loc și în anumite cazuri cînd $x \in I_1$ și $y \in I_2$; și anume: ea ar putea să subziste dacă am putea garanta[1]) că x nu coincide cu niciuna din cele $m - p + 1$ rădăcini reale și distincte ale funcției $\varphi^{(p)}(x)$ de la (13), iar y nu ar coincide cu nici una din cele $n - q + 1$ rădăcini reale și distincte ale funcției $\psi^{(q)}(y)$ de la (26). Ne putem convinge fără greutate că această situație are loc:

1°. dacă $x \bar{\in} I_1$ și $y \bar{\in} I_2$, căci chiar în aceste ipoteze am stabilit formula (28),

2°. dacă numerele p și q iau valorile 0 sau 1, iar x coincide cu unul din punctele x_i, cînd $p = 1$ și y coincide cu unul din punctele y_k, cînd $q = 1$.

Într-adevăr, să presupunem de exemplu că $p = 1$ și $q = 1$. Rădăcinile lui $\varphi'(x)$ aflîndu-se între punctele vecine din șirul $x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}$, iar rădăcinile lui $\psi'(y)$ aflîndu-se între punctele vecine din șirul $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$, atunci cînd x coincide cu un x_i, sau y coincide cu un y_k, e înlăturat inconvenientul ca x să cadă peste o rădăcină a lui $\varphi'(x)$ și ca y să cadă peste o rădăcină a lui $\psi'(y)$.

3°. Se mai poate constata că restul formulei (7) mai poate fi pus sub forma simplă a unei sume de trei termeni dacă facem următoarele ipoteze:

a) p și q sînt numere impare,

b) $m = 2m' + 1$, $n = 2n' + 1$ și în loc de $x_1, x_2, \ldots, x_{2m+1}$ avem $0, \pm b_1, \pm b_2, \ldots, \pm b_{m'}$, iar în loc de $y_1, y_2, \ldots, x_{2n+1}$ avem $0, \pm c_1, \pm c_2, \ldots, \pm c_n$

c) derivata $\dfrac{\partial^{2m'+2n'+2} f(x, y)}{\partial x^{2m'+1} \, \partial y^{2n'+1}}$ e continuă cînd $x \in I_1$ și $y \in I_2$.

Să presupunem, pentru simplificare, că $x = y = 0$.

Pentru demonstrația afirmației noastre se folosește funcția auxiliară

$$h(t, \tau) = \frac{1}{4} \left[f(t, \tau) - f(-t, \tau) - f(t, -\tau) + f(-t, -\tau) \right]$$

și se ține seama de faptul că

$$R^{(p, q)}_{2m', 2n'}(f; 0, 0) = R^{(p, q)}_{2m', 2n'}(h; 0, 0).$$

4°. Încazul cînd p și q sînt pari și în loc de $x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}$ avem $0, 0, \pm b_1, \pm b_2, \ldots, \pm b_m$, iar în loc de $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$ avem $0, 0, \pm c_1, \pm c_2, \ldots, \pm c_n$, se folosește funcția auxiliară

$$h_1(t, \tau) = \frac{1}{4} \left[f(t, \tau) + f(t, -\tau) + f(-t, \tau) + f(-t, -\tau) \right],$$

și se constată că formula (28) iarăși rămîne în vigoare.

5°. Dacă de exemplu p e impar și q par și în loc de $x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}$ avem $0, \pm b_1, \pm b_2, \ldots, \pm b_m$, iar în loc de $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$ avem $0, 0, \pm c_1, \pm c_2, \ldots, \pm c_n$, pentru a demonstra că restul formulei de

[1]) Așa după cum a atras atenția, în cazul unei singure variabile, M. L. B r o d s k i [3].

derivare parțială numerică poate fi pus sub forma unei sume de trei termen se poate folosi funcția ajutătoare

$$h_2(t, \tau) = \frac{1}{4} \left[f(t, \tau) - f(-t, \tau) + f(t, -\tau) - f(-t, -\tau) \right].$$

Într-o lucrare viitoare, care este în curs de elaborare, vom prezenta un studiu amănunțit al formulelor de derivare parțială numerică care folosesc și noduri multiple. De asemenea vom prezenta o evaluare a restului acestor formule și în cazurile cînd nu se fac ipoteze de felul acelora din lucrarea de față.

ВЫРАЖЕНИЕ ОСТАТКА В НЕКОТОРЫХ ФОРМУЛАХ ЧИСЛЕННОГО ЧАСТНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Для остатка формулы численного частного дифференцирования (7) дается оценка (28), верная в том случае, когда x и y находятся вне наименьших открытых интервалов I_1 и I_2, содержащих точки $x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}$, соответственно $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$. Этот результат представляет собой распространение на две переменных одного хорошо известного результата С т е ф ф е н с е н а [2].

В статье даются и некоторые частные случаи, в которых формула (28) верна также если $x \in I_1$, и $y \in I_2$. Результаты представленные в настоящей статье уточняют области достоверности некоторых оценок, данных в труде [1].

L'EXPRESSION DU RESTE DANS QUELQUES FORMULES DE DÉRIVATION PARTIELLE NUMÉRIQUE

RÉSUMÉ

Pour le reste de la formule de dérivation partielle numérique (7) on donne l'évaluation (28), valable au cas où x et y sont en dehors des plus petits intervalles ouverts I_1 et I_2 qui contiennent les points $x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}$, respectivement $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$. Ce résultat représente l'extension à deux variables d'un résultat bien connu de J. S t e f f e n s e n [2].

On indique aussi quelques cas particuliers où la formule (28) est valable également si $x \in I_1$ et $y \in I_2$. Les résultats de ce travail précisent les domaines de valabilité de certaines évaluations données dans le travail [1].

BIBLIOGRAFIE

1. D. D. Stancu, *Contribuţii la derivarea parţială numerică a funcţiilor de două şi mai multe variabile*. Bul. ştiinţ., Acad. R.P.R., Secţia de ştiinţe matematice şi fizice, **VIII**, 4 (1956).
2. J. F. Steffensen, *Interpolation*. Baltimore, 1950.
3. М. Л. Бродский, *Об оценке остаточного члена формул численного дифференцирования*. Усп. Матем. Ннук, **13**, 6 (84), 73—77 (1958).

Primit la 30 aprilie 1960.