NOI FORMULE DE TIP ADAMS PENTRU INTEGRAREA NUMERICĂ A ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE DE ORDINUL ÎNTÎI

DE

D. V. IONESCU
(Cluj)

Lucrare prezentată la Consfătuirea tehnico-științifică asupra mașinilor electronice de calcul din 13–15 ianuarie 1960, București

1. Am arătat importanța formulelor de derivare numerică în integrarea numerică a ecuațiilor diferențiale [1]. Fie $f(x)$ o funcție de clasa C^{n+1} în intervalul $[a, b]$ și $x_0, x_1, \dots, x_n$ noduri din acest interval astfel ca $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Pentru derivata de ordinul p a funcției $f(x)$ în nodul x_0, unde $1 \leqslant p \leqslant n$, am dat următoarea formulă de derivare numerică

$$\begin{aligned}\frac{f^{(p)}(x_0)}{p\,!} &= [x_0,x_1,\dots,x_p;f(x)] - \mu_1(x_1-x_0,\dots,x_p-x_0)[x_0,x_1,\dots,x_{p+1};f(x)] +\\ &+ \mu_2(x_1-x_0,\dots,x_{p+1}-x_0)[x_0,x_1,\dots,x_{p+2};f(x)]+\dots+\\ &+(-1)^{n-p}\mu_{n-p}(x_1-x_0,\dots,x_{n-1}-x_0)[x_0,x_1,\dots,x_n;f(x)]+\\ &+(-1)^{n-p+1}\mu_{n-p+1}(x_1-x_0,\dots,x_n-x_0)\int_{x_0}^{x_n}\Psi_p(s)f^{(n+1)}(s)\,ds, \end{aligned}\tag{1}$$

unde în general $\mu_k(x_1-x_0, \dots, x_q-x_0)$ este un polinom omogen și de gradul k în $x_1-x_0, \dots, x_q-x_0$ cu coeficienții egali cu 1. Mai scurt vom nota $\mu_k(x_1-x_0, \dots, x_n-x_0) = \mu_k$. S-a demonstrat că funcția $\Psi_p(s)$ este pozitivă în intervalul (x_0, x_n) și că avem

$$\int_{x_0}^{x_n}\Psi_p(s)\,ds = \frac{1}{(n+1)\,!}. \tag{2}$$

Formulele de derivare numerică (1) au fost aplicate la integrarea numerică a ecuațiilor diferențiale de forma

$$y' = f(x, y) \tag{3}$$

Să presupunem că funcția $f(x, y)$ are derivate parțiale în raport cu x și y pînă la ordinul n, continue în dreptunghiul D definit de inegalitățile :

$$| x - x_0 | < \alpha, \quad | y - y_0 | < \beta. \tag{4}$$

În aceste condiții putem deriva succesiv ambii membrii ai ecuației diferențiale (3) și obținem ecuațiile

$$\begin{gathered} y''(x) = f_1(x, y), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n+1)}(x) = f_n(x, y), \end{gathered} \tag{5}$$

unde $f_1(x, y), \ldots, f_n(x, y)$ sînt funcții continue în dreptunghiul D.

Am demonstrat că avem următoarea formulă de integrare numerică a ecuației diferențiale (3)

$$y = L[x_0, x_1, \ldots, x_n; y(x)] + R(x), \tag{6}$$

unde $L[x_0, x_1, \ldots, x_n; y(x)]$ este polinomul de interpolare al lui Lagrange al integralei $y(x)$ relativ la nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_n$, iar restul $R(x)$ este dat de formula

$$R(x) = -\int_{x_0}^{x_n} \Psi(x, s) f_n[s, y(s)]\, ds + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-s)^n}{n!} f_n[s, y(s)]\, ds, \tag{7}$$

unde

$$\begin{aligned} \Psi(x, s) = \mu_1 \Psi_n(s)(x - x_0)^n - \mu_2 \Psi_{n-1}(s)(x - x_0)^{n-1} + \ldots + \\ + (-1)^{n-1} \mu_n \Psi_1(s). \end{aligned} \tag{8}$$

S-a demonstrat că pentru $| R(x) |$ se poate da următoarea evaluare

$$| R(x) | \leqslant \frac{(x - x_0)[(x - x_0) + (x_1 - x_0)] \ldots [(x - x_0) + (x_n - x_0)]}{(n+1)!} F_n, \tag{9}$$

unde F_n este o margine superioară a lui $| f_n(x, y) |$ în dreptunghiul D.

S-a arătat că *dacă nodurile* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *sînt în progresie aritmetică cu rația* h, *atunci* $| R(x_0 + \lambda h) |$ *este de ordinul lui* h^{n+1}.

2. O aplicație importantă a formulei de integrare numerică (6), s-a făcut la obținerea formulei de integrare numerică de tip Adams, cea mai generală, presupunînd nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_n$ oricum și că funcția $f(x, y)$ are derivate parțiale în raport cu x și y pînă la ordinul $n + 1$, continue în dreptunghiul D. Dacă se notează mai scurt cu $L_n(x)$ polinomul de interpolare al lui Lagrange $L[x_0, x_1, \ldots, x_n; y(x)]$, atunci integrala $y(x)$ în

nodul x_{n+1}, la dreapta lui x_n, este dată de formula de integrare numerică a lui Adams

$$\begin{aligned} y(x_{n+1}) = y(x_n) + B_0[x_n; F(x)] + B_1[x_{n-1}, x_n; F(x)] + \ldots + \\ + B_n[x_0, x_1, \ldots, x_n; F(x)] + R_1, \end{aligned} \tag{10}$$

unde

$$F(x) = f[x, y(x)],$$

iar $B_0 = x_{n+1} - x_0$ și

$$B_h = \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x_n)(x - x_{n-1}) \ldots (x - x_{n-h+1})\, dx$$

pentru $h = 1, 2, \ldots, n$.

Pentru restul R_1 s-a dat următoarea evaluare

$$| R_1 | \leqslant \frac{H_n}{(n+1)!}, \tag{11}$$

unde

$$H_n = \overline{F}_n B_{n+1}$$

$$+ k F_n \int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x_0)[(x - x_0) + (x_1 - x_0)] \ldots [(x - x_0) + (x_n - x_0)]\, dx, \tag{12}$$

$\overline{F}_n$ fiind o margine superioară a lui $| F^{(n+1)}(x) |$ în intervalul $[x_0, x_0 + a]$ în care s-au luat nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$.

S-a demonstrat că *dacă nodurile* $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ *sînt în progresie aritmetică cu rația* h, *atunci* $| R_1 |$ *este de ordinul lui* h^{n+2}.

3. În această lucrare vom presupune că nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sînt oricum și că funcția $f(x, y)$ are derivate parțiale în raport cu x și cu y pînă la ordinul $n + k$, continue în dreptunghiul D. În aceste condiții vom da pentru ecuația diferențială (3), o formulă de integrare numerică de tip Adams, de forma

$$y(x_{n+1}) = A_0 F_{k-1}(x_0) + A_1 F_{k-1}(x_1) + \ldots + A_n F_{k-1}(x_n) + R_k,$$

în care s-a notat

$$F_{k-1}(x) = f_{k-1}[x, y(x)]$$

și pentru care vom determina restul R_k.

Vom arăta că *dacă nodurile* $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ *sînt în progresie aritmetică cu rația* h, *atunci restul* R_k, *este de ordinul lui* h^{n+k+1}.

4. Cu ipotezele de la punctul 3, putem să derivăm succesiv ambii membri ai ecuației (3), pînă la ordinul $n+k-1$. Vom avea

$$\begin{aligned} y''\ (x) &= f_1(x, y), \\ &\dots\dots\dots \\ y^{(k)}\ (x) &= f_{k-1}(x, y), \qquad (13) \\ &\dots\dots\dots \\ y^{(n+k)}(x) &= f_{n+k-1}(x, y), \end{aligned}$$

funcțiile $f_1(x, y), \dots, f_{n+k-1}(x, y)$ fiind continue în dreptunghiul D.

Fie $y(x)$ integrala ecuației diferențiale (3) care satisface la condiția inițială $y(x_0) = y_0$ și care este cunoscută pe nodurile $x_1, x_2, \dots, x_n$. Vrem să dăm o formulă de integrare numerică de tip Adams, care să dea valoarea integralei într-un punct x_{n+1} la dreapta lui x_n.

Integrînd ecuația diferențială

$$y^{(k)}(x) = f_{k-1}[x, y(x)] = F_{k-1}(x),$$

cu condițiile lui Cauchy din punctul x_n, vom avea

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \frac{x_{n+1} - x_n}{1!} F(x_n) + \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{2!} F_1(x_n) + \dots +$$

$$+ \frac{(x_{n+1} - x_n)^{k-1}}{(k-1)!} F_{k-2}(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{(x_{n+1} - s)^{k-1}}{(k-1)!} F_{k-1}(s)\,ds \qquad (14)$$

unde s-a notat

$$f[x, y(x)] = F(x),\ f_j[x, y(x)] = F_j(x), \qquad j = 1, 2, \dots, k-1.$$

Însă funcția $F_{k-1}(x)$ deși există pe întreg intervalul $[x_0, x_0 + a]$ este cunoscută numai pe nodurile $x_0, x_1, \dots x_n$.

Atunci să folosim formule de integrare numerică (6) a ecuației diferențiale (3), adică

$$y(x) = L_n(x) + R(x),$$

unde $L_n(x)$ este polinomul de interpolare al lui Lagrange al integralei $y(x)$ pe nodurile $x_0, x_1, \dots, x_n$. Să admitem pentru un moment că curba $y = L_n(x)$ nu iese din dreptunghiul D și vom reveni apoi la cazul cînd ea iese din dreptunghi. În acest caz vom scrie

$$F_{k-1}(x) = f_{k-1}[x, y(x)] = g_{k-1}(x) + h_{k-1}(x),$$

unde s-a notat

$$g_{k-1}(x) = f_{k-1}[x, L_n(x)]$$

și

$$h_{k-1}(x) = f_{k-1}[x, L_n(x) + R(x)] - f_{k-1}[x, L_n(x)].$$

Integrala din formula (14) se descompune în două.

Vom considera întîi integrala

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{(x_{n+1} - s)^{k-1}}{(k-1)!} g_{k-1}(s)\,ds, \qquad (15)$$

la care vom aplica o formulă de cuadratură cu nodurile exterioare $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ și nodul x_n.

Apoi vom considera integrala

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{(x_{n+1} - s)^{k-1}}{(k-1)!} h_{k-1}(s)\,ds$$

pe care o vom evalua, ținînd seama de formula (7) și de evaluarea (9).

5. Avem următoarea formulă de cvadratură [2]:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{(x_{n+1} - s)^{k-1}}{(k-1)!} g(s)\,ds = A_0 g(x_0) + A_1 g(x_1) + \dots + A_n g(x_n) +$$

$$+ \int_{x_n}^{x_{n+1}} \Phi(s)\, g^{(n+1)}(s)\,ds, \qquad (16)$$

unde s-a demonstrat că funcția $\Phi(s)$ păstrează un semn constant în intervalul (x_0, x_{n+1}). Formula precedentă se mai scrie sub forma

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{(x_{n+1} - s)^{k-1}}{(k-1)!} g(s)ds = B_0 g(x_0) + B_1[x_0, x_1; g(x)] + B_2[x_0, x_1, x_2; g(x)] +$$

$$\dots + B_n[x_0, x_1, \dots, x_n; g(x)] + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \Phi(s)\, g^{(n+1)}(s)\,ds, \qquad (17)$$

unde s-au introdus diferențele divizate ale funcției $g(x)$ pe nodurile $x_0, x_1, \dots, x_n$. Coeficienții din formula (17) sînt

$$\begin{aligned} B_0 &= \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{(x_{n+1} - s)^{k-1}}{(k-1)!}\,ds, \\ B_1 &= \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{(x_{n+1} - s)^{k-1}}{(k-1)!} (s - x_0)\,ds, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (18) \\ B_n &= \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{(x_{n+1} - s)^{k-1}}{(k-1)!} (s - x_0)(s - x_1)\dots(s - x_{n+1})\,ds. \end{aligned}$$

Restul din formula (17) se poate scrie

$$R_2 = g^{(n+1)}(\xi) \int_{x_n}^{x_{n+1}} \Phi(s)\,ds,$$

unde $\xi \in (x_0, x_{n+1})$. Integrala din membrul al doilea se determină din formula (17), alegînd

$$g(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)}{(n+1)!}.$$

Se obține

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \Phi(s)\,ds = \frac{1}{(n+1)!}\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{(x_{n+1}-s)^{k-1}}{(k-1)!}(s-x_0)(s-x_1)\ldots(s-x_n)\,ds$$

sau, întrebuințînd notația

$$B_{n+1} = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{(x_{n+1}-s)^{k-1}}{(k-1)!}(s-x_0)(s-x_1)\ldots(s-x_n)\,ds, \tag{18'}$$

vom avea

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \Phi(s)\,ds = \frac{B_{n+1}}{(n+1)!}$$

și deci

$$R_2 = \frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}B_{n+1}. \tag{19}$$

Prin urmare avem următoarea formulă de cuadratură

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{(x_{n+1}-s)^{k-1}}{(k-1)!} g(s)\,ds = B_0\, g(x_0) + B_1[x_0, x_1; g(x)] + \ldots +$$

$$+ B_n[x_0, x_1\ldots, x_n; g(x)] + B_{n+1}\frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \tag{20}$$

unde coeficienții $B_0, B_1, \ldots, B_{n+1}$ sînt dați de formulele (18), (18'), iar $\xi \in (x_0, x_{n+1})$.

Să vedem acum ce devine formula (20), cînd nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ sînt în progresie aritmetică cu rația h.

În acest caz avem

$$[x_0, x_1, \ldots, x_j; g(x)] = \frac{\Delta^j g(x_0)}{j!\,h^j},$$

unde $j = 1, 2, \ldots, n$.

Pe de altă parte, avînd

$$x_i = x_0 + ih,$$

în integralele (18), (18') să facem schimbarea de variabilă

$$s = x_n + hu = x_0 + nh + hu.$$

Vom avea

$$B_j = h^{k+j}\int_0^1 \frac{(1-u)^{k-1}}{(k-1)!}(u+n-j+1)(u+n-j+2)\ldots(u+n)\,du.$$

Rezultă că

$$B_j[x_0, x_1, \ldots, x_j; g(x)] = h^k\,\frac{\Delta^j g(x_0)}{j!}\int_0^1 \frac{(1-u)^{k-1}}{(k-1)!}(u+n-j+1)\ldots(u+n)\,du.$$

Deci dacă notăm

$$I_j = \frac{1}{j!}\int_0^1 \frac{(1-u)^{k-1}}{(k-1)!}(u+n-j+1)\ldots(u+n)\,du, \tag{21}$$

unde $j = 1, 2, \ldots, n+1$, iar

$$I_0 = \int_0^1 \frac{(1-u)^{k-1}}{(k-1)!}\,du,$$

formula (20) devine

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{(x_{n+1}-s)^{k-1}}{(k-1)!} g(s)\,ds = h^k\,[I_0\, g(x_0) + I_1\,\Delta^1 g(x_0) + I_2\,\Delta^2 g(x_0) + \ldots$$

$$\ldots + I_n \Delta^n g(x_0)] + h^{n+k+1} I_{n+1}\, g^{(n+1)}(\xi). \tag{22}$$

6. Să considerăm integrala

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{(x_{n+1}-s)^{k-1}}{(k-1)!} h_{k-1}(s)\,ds.$$

Ținînd seama de formula (16) avem

$$h_{k-1}(x) = \int_{L_n(x)}^{L_n(x)+R(x)} \frac{\partial f_{k-1}}{\partial t}(x, t)\,dt.$$

Notînd cu K o margine superioară a lui $\left|\frac{\partial f_{k-1}}{\partial y}\right|$ în dreptunghiul D, deducem că

$$|h_{k-1}(x)| \leqslant K\,R(x)$$

și ținînd seama de inegalitatea (9) putem scrie

$$|h_{k-1}(x)| < K\,\frac{(x-x_0)[(x-x_0)+(x_1-x_0)]\ldots[(x-x_0)+(x_n-x_0)]}{(n+1)!}F_n.$$

Rezultă atunci că

$$\left|\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{(x_{n+1}-s)^{k-1}}{(k-1)!}\, h_{k-1}(s)ds\right| \leqslant \tag{23}$$

$$\leqslant \frac{KF_n}{(n+1)!}\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{(x_{n+1}-s)^{k-1}}{(k-1)!}(s-x_0)[(s-x_0)+(x_1-x_0)]\dots[(s-x_0)+(x_n-x_0)]ds.$$

Dacă nodurile $x_0, x_1, \dots, x_n$ sînt în progresie aritmetică cu raţia h, atunci făcînd în integrala din membrul al doilea al inegalităţii (23) schimbarea de variabilă

$$s = x_n + uh,$$

obţinem

$$h^{n+k-1}\int_0^1 \frac{(1-u)^{k-1}}{(k-1)!}(u+n)(u+n+1)\dots(u+2n)du$$

şi prin urmare

$$\left|\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{(x_{n+1}-s)^{k-1}}{(k-1)!}\, h_{k-1}(s)\, ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{KF_n h^{n+k+1}}{(n+1)!}\int_0^1 \frac{(1-u)^{k-1}}{(k-1)!}(u+n)\ (u+n+1)\dots(u+2n)\ du. \tag{24}$$

7. Revenind la formula (14) şi ţinînd seamă de formulele (20) şi (23), obţinem următoarea *formulă de integrare numerică a ecuaţiei diferenţiale (3), de tip Adams*

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \frac{x_{n+1}-x_n}{1!}F(x_n) + \frac{(x_{n+1}-x_n)^2}{2!}F_1(x_n)+\dots+$$

$$+\frac{(x_{n+1}-x_n)^{k-1}}{(k-1)!}F_{k-2}(x_n) + B_0F_{k-1}(x_0) + B_1[x_0, x_1; F_{k-1}(x)] +$$

$$B_2[x_0, x_1, x_2; F_{k-1}(x)]+\dots+B_n[x_0, x_1, \dots x_n; F_{k-1}(x)]+R, \tag{25}$$

în care coeficienţii B_j sînt daţi de formulele (18).

Dacă notăm cu $\overline{F}_{k-1}$ o margine superioară a lui $|g_{k-1}^{(n+1)}(x)| = |f_{k-1}[x, L_n(x)]|$ în intervalul $[x_0, x_0+a]$, şi ţinînd seama de formulele (19) şi (23), vom avea pentru restul R din formula (25) următoarea evaluare

$$|R| < \frac{H_{k-1}}{(n+1)!}, \tag{26}$$

unde

$$H_{k-1} = B_{n+1}\overline{F}_{k-1} + \tag{27}$$

$$+KF_n\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{(x_{n+1}-s)^{k-1}}{(k-1)!}(s-x_0)[(s-x_0)+(x_1-x_0)]\dots[(s-x_0)+(x_n-x_0)]ds.$$

Dacă nodurile $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$ sînt în progresie aritmetică cu raţia h, *atunci formula de integrare numerică a ecuaţiei diferenţiale (3) de tip Adams este*

$$y(x_{n+1}) = y(x_n)+\frac{h}{1!}F(x_n)+\frac{h^2}{2!}F_1(x_n)+\dots+\frac{h^{k-1}}{(k-1)!}F_{k-2}(x_n)+$$

$$+h^k[I_0F_{k-1}(x_0)+I_1\Delta^1F_{k-1}(x_0)+I_2\Delta^2F_{k-1}(x_0)+\dots+$$

$$+I_n\Delta^nF_{k-1}(x_0)]+R, \tag{28}$$

în care coeficienţii I_j sînt daţi de formulele (21). Pentru restul R avem următoarea formulă de evaluare

$$|R| < h^{n+k+1}\overline{H}_{k-1}, \tag{29}$$

unde

$$\overline{H}_{k-1} = I_{n+1}\overline{F}_{k-1}+$$

$$+\frac{KF_n}{(n+1)!}\int_0^1\frac{(1-u)^{k-1}}{(k-1)!}(u+n)\ (u+n+1)\dots(u+2n)du. \tag{30}$$

Formula (29) arată că *dacă nodurile $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$ sînt în progresie aritmetică cu raţia h, atunci restul în formula de integrare numerică (28) de tip Adams este de ordinul lui h^{n+k+1}*. De aici rezultă superioritatea formulelor de integrare numerică (25) şi (28) faţă de formula de integrare numerică (10).

Reamintim că pentru formula de integrare numerică a lui Adams, cu noduri în progresie aritmetică cu raţia h care corespunde la $n = 5$ şi $k = 1$, W. Tollmien [3] şi N. S. Bahvalov [4] au demonstrat că restul este de ordinul lui h^7.

8. În cazul cînd curba $y = L_n(x)$ iese din dreptunghiul D, ipoteză pe care am exclus-o la punctul 4, prelungim funcţia $f(x,y)$, deasupra şi dedesubtul dreptelor $y = y_0 + \beta$ şi $y = y_0 - \beta$, aşa cum s-a procedat în lucrarea citată mai sus [1], obţinîndu-se un nou dreptunghi D^*, în care se găseşte curba $y = L_n(x)$. Formulele (26), (27) şi (29), (30) rămîn valabile, cu condiţia ca să se înlocuiască constantele $\overline{F}_{k-1}$ cu valorile corespunzătoare dreptunghiului D^*.

9. În cazul nodurilor în progresie aritmetică şi $n = 5$, dăm următoarele formule practice de integrare numerică a ecuaţiei diferenţiale (3) în nodul x_6. Acestea le deducem din formula (28) ţinînd seama de coeficienţii I_j daţi de formulele (21).

1°. $k = 1$. Avem formula lui Adams propriu-zisă

$$y(x_6) = y(x_5) + h[I_0F(x_0)+I_1\Delta^1F(x_0)+I_2\Delta^2F(x_0)+I_3\Delta^3F(x_0)+$$

$$+I_4\Delta^4F(x_0)+I_5\Delta^5F(x_0)]+R, \tag{31}$$

unde

$$I_0 = \quad 1 \quad = 1$$

$$I_1 = \frac{11}{2} = 5{,}5$$

$$I_2 = \frac{149}{12} = 12{,}4166666\ldots$$

$$I_3 = \frac{117}{8} = 14{,}625 \tag{31_1}$$

$$I_4 = \frac{6\,731}{720} = 9{,}3486111\ldots$$

$$I_5 = \frac{4\,277}{1\,440} = 2{,}9701389\ldots$$

Introducînd în general notația

$$A_n^{(k)} = \frac{1}{(n+1)\,!}\int_0^1 \frac{(1-u)^{k-1}}{(k-1)\,!}(u+n)(u+n+1)(u+n+2)\ldots(u+2n)\,du, \tag{32}$$

restul în formula (31) este evaluat de

$$|\,R\,| \leqslant \overline{H}_0 h^7, \tag{31_2}$$

unde

$$\overline{H}_0 = I_6\overline{F} + A_5^{(1)}KF_5, \tag{31_3}$$

cu

$$I_6 = \frac{19\,087}{60\,480} = 0{,}3155919\ldots \quad < 0{,}316$$

$$A_5^{(1)} = \frac{19\,503\,937}{60\,480} = 322{,}4857308\ldots < 322{,}486. \tag{31_4}$$

2°. $k = 2$. Avem

$$y(x_6) = y(x_5) + hF(x_5) + h^2\,[I_0F_1(x_0) + I_1\,\Delta^1F_1(x_0) + I_2\,\Delta^2F_1(x_0) +$$
$$+ I_3\,\Delta^3F_1(x_0) + I_4\,\Delta^4F_1(x_0) + I_5\,\Delta^5F_1(x_0)] + R, \tag{33}$$

unde

$$I_0 = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$I_1 = \frac{8}{3} = 2{,}6666666\ldots$$

$$I_2 = \frac{139}{24} = 5{,}7916666\ldots \tag{33_1}$$

$$I_3 = \frac{2\,333}{360} = 6{,}4805555\ldots$$

$$I_4 = \frac{5\,539}{1\,440} = 3{,}8465277\ldots$$

$$I_5 = \frac{2\,713}{2\,520} = 1{,}0765873\ldots$$

Restul în formula (33) este evaluat de

$$|\,R\,| \leqslant \overline{H}_1 h^8, \tag{33_2}$$

unde

$$\overline{H}_1 = I_6\overline{F}_1 + A_5^{(2)}KF_5, \tag{33_3}$$

cu

$$I_6 = \frac{1\,369}{17\,280} = 0{,}0792245\ldots \quad < 0{,}080$$

$$A_5^{(2)} = \frac{16\,977\,745}{120\,960} = 140{,}3583416\ldots < 140{,}359 \tag{33_4}$$

3°. $k = 3$. Avem

$$y(x_6) = y(x_5) + \frac{h}{1}F(x_5) + \frac{h^2}{2\,!}F_1(x_5) + h^3\,[I_0F_2(x_0) + I_1\,\Delta^1F_2(x_0) +$$
$$+ I_2\,\Delta^2F_2(x_0) + I_3\,\Delta^3F_2(x_0) + I_4\,\Delta^4F_2(x_0) + I_5\,\Delta^5F_2(x_0)] + R, \tag{34}$$

unde

$$
\begin{aligned}
I_0 &= \frac{1}{6} = 0{,}1666666\ldots\\
I_1 &= \frac{7}{8} = 0{,}875\\
I_2 &= \frac{149}{80} = 1{,}8625\\
I_3 &= \frac{73}{36} = 2{,}0277777\ldots\\
I_4 &= \frac{3\,881}{3\,360} = 1{,}1550595\ldots\\
I_5 &= \frac{12\,079}{40\,320} = 0{,}2995783\ldots
\end{aligned}
\tag{34_1}
$$

Restul în formula (34) este evaluat de

$$
|R| \leqslant \overline{H}_2 h^9, \tag{34_2}
$$

unde

$$
\overline{H}_2 = I_6 \overline{F}_2 + A_5^{(3)} K F_5, \tag{34_3}
$$

cu

$$
\begin{aligned}
I_6 &= \frac{8\,563}{518\,400} = 0{,}0165181\ldots \quad < 0{,}017\\
A_5^{(3)} &= \frac{157\,962\,691}{3\,628\,800} = 43{,}5302830\ldots < 43{,}531.
\end{aligned}
\tag{34_4}
$$

4°. $k = 4$. Avem

$$
\begin{aligned}
y(x_6) = y(x_5) &+ \frac{h}{1} F(x_5) + \frac{h^2}{2\,!} F_1(x_5) + \frac{h^3}{3\,!} F_2(x_5) + h^4 [I_0 F_3(x_0) +\\
&+ I_1 \Delta^1 F_3(x_0) + I_2 \Delta^2 F_3(x_0) + I_3 \Delta^3 F_3(x_0) + I_4 \Delta^4 F_3(x_0) +\\
&+ I_5 \Delta^5 F_3(x_0)] + R,
\end{aligned}
\tag{35}
$$

unde

$$
\begin{aligned}
I_0 &= \frac{1}{24} = 0{,}0416666\ldots\\
I_1 &= \frac{13}{60} = 0{,}2166666\ldots\\
I_2 &= \frac{41}{90} = 0{,}4555555\ldots\\
I_3 &= \frac{1\,229}{2\,520} = 0{,}4876984\ldots\\
I_4 &= \frac{32\,749}{120\,960} = 0{,}2707424\ldots\\
I_5 &= \frac{30311}{4\,536\,000} = 0{,}0668231\ldots
\end{aligned}
\tag{35_1}
$$

Restul în formula (35) este evaluat de

$$
|H| \leqslant \overline{H}_3 h^{10}, \tag{35_2}
$$

unde

$$
\overline{H}_3 = I_6 \overline{F}_3 + A_5^{(4)} K F_5, \tag{35_3}
$$

cu

$$
\begin{aligned}
I_6 &= \frac{1\,501}{518\,400} = 0{,}0028954\ldots \quad < 0{,}003,\\
A_5^{(4)} &= \frac{12\,599\,029}{1\,209\,600} = 10{,}415\,8639\ldots < 10{,}416.
\end{aligned}
\tag{35_4}
$$

5°. $k = 5$. Avem

$$
\begin{aligned}
y(x_6) = y(x_5) &+ \frac{h}{1} F(x_5) + \frac{h^2}{2\,!} F_1(x_5) + \frac{h^3}{3\,!} F_2(x_5) + \frac{h^4}{4\,!} F_3(x_5) +\\
&+ h^5 [I_0 F_4(x_0) + I_1 \Delta^1 F_4(x_0) + I_2 \Delta^2 F_4(x_0) + I_3 \Delta^3 F_4(x_0) +\\
&+ I_4 \Delta^4 F_4(x_0) + I_5 \Delta^5 F_4(x_0)] + R,
\end{aligned}
\tag{36}
$$

unde

$$I_0 = \frac{1}{120} = 0{,}0083333\ldots$$

$$I_1 = \frac{31}{720} = 0{,}0430555\ldots$$

$$I_2 = \frac{181}{2\,016} = 0{,}0897817\ldots$$

$$I_3 = \frac{2\,299}{24\,192} = 0{,}0950314\ldots \qquad (36_1)$$

$$I_4 = \frac{1\,075}{20\,736} = 0{,}0518422\ldots$$

$$I_5 = \frac{89\,723}{7\,257\,600} = 0{,}0123626\ldots$$

Restul în formula (36) este evaluat de

$$|R| \leqslant \overline{H}_4 h^{11}, \qquad (36_2)$$

unde

$$\overline{H}_4 = I_6 \overline{F}_4 + A_5^{(5)} K F_5, \qquad (36_3)$$

cu

$$I_6 = \frac{29\,939}{68\,428\,800} = 0{,}0004375\ldots < 0{,}001,$$

$$A_5^{(5)} = \frac{968\,996\,843}{479\,001\,600} = 2{,}0229511\ldots < 2{,}023. \qquad (36_4)$$

Din exemplele tratate mai sus se vede avantajul formulelor (33), (34), (35), (36) față de formulele lui Adams (31) în condițiile precizate la punctul 3. Ordinul lui $|R|$ crește cînd numărul k se mărește, după cum arată formulele (33_2), (34_2), (35_2), (36_2). Coeficienții lui $\overline{F}$ și ai lui KF_5 din formulele (33_3), (34_3), (35_3), (36_3), descresc destul de repede cînd numărul k se mărește, așa cum arată formulele (33_4), (34_4), (35_4) și (36_4).

НОВЫЕ ФОРМУЛЫ ТИПА АДАМСА ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

РЕЗЮМЕ

Автор показывает значение формул численного дифференцирования при интегрировании дифференциальных уравнений [1]. Рассмотрим дифференциальное уравнение (3) и предположим, что функция $f(x, y)$ обладает частными производными по x и y до n-го порядка непрерывными в прямоугольнике D, определяемом неравенствами (4). В этом случае доказано, что если интеграл $y(x)$ известен в узлах $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, то имеем формулу численного интегрирования (6), где $L[x_0, x_1, \ldots, x_n; y(x)]$ — интерполяционный многочлен Лагранжа интеграла $y(x)$ для узлов $x_0, x_1, \ldots, x_n$, и где остаточный член дается формулой (7). Для остаточного члена $R(x)$ имеем неравенство (9). Если узлы $x_0, x_1, \ldots x_{n+1}$ образуют арифметическую прогрессию с разностью h, то остаточный член $|R(x_0 + \lambda h)|$ имеет порядок h^{n+1}.

В настоящей работе предполагается, что узлы $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ произвольны и что функция $f(x, y)$ обладает частными производными по x и y до порядка $n+k$ включительно. Основываясь на формуле (6) и исходя из уравнения $y^{(k)}(x) = f_{k-1}(x, y)$ автор вывел формулу (25) адамсового типа, остаточный член которой R оценивается неравенствами (26), (27). Если узлы образуют арифметическую прогрессию с разностью h, то формула (25) переходит в формулу (28) и ее остаточный член имеет порядок h^{n+k+1}, откуда вытекает преимущество этих формул перед формулами Адамса (10).

NOUVELLES FORMULES DU TYPE ADAMS POUR L'INTÉGRATION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

RÉSUMÉ

L'auteur montre l'importance des formules de dérivation numérique pour l'intégration numérique des équations différentielles [1]. On considère l'équation différentielle (3) et on suppose que la fonction $f(x, y)$ ait des dérivées partielles par rapport à x et à y jusqu'à l'ordre n, continues dans le rectangle D, défini par les inégalités (4). On a démontré que, dans ce cas, l'intégrale $y(x)$ étant connue sur les nœuds $x_0, x_1, \ldots, x_n$, on a la formule d'intégration numérique (6), où $L[x_0, x_1, \ldots, x_n; y(x)]$ est le polynôme d'interpolation de Lagrange de l'intégrale $y(x)$ relatif aux nœuds $x_0, x_1, \ldots, x_n$ et où le reste $R(x)$ est donné par la formule

(7). On a pour $R(x)$ l'inégalité (9). Lorsque les nœuds $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ sont en progression arithmétique à la raison h, le reste $|R(x_0 + \lambda h)|$ est de l'ordre de h^{n+1}.

Dans ce travail on suppose que les nœuds $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ sont quelconques et que la fonction $f(x, y)$ ait des dérivées partielles par rapport à x et à y jusqu'à l'ordre $n + k$, continues dans le rectangle D. En s'appuyant sur la formule (6) et en partant de l'equation $y^{(k)}(x) = f_{k-1}(x, y)$ on déduit la formule d'intégration numérique (25), du type d'Adams, avec son reste R, évalué par les inégalités (26), (27). Lorsque les nœuds sont en progression arithmétique à la raison h, la formule (25) devient la formule (28) et son reste est de l'ordre de h^{n+k+1}, d'où résulte la supériorité de ces formules, par rapport à la formule d'Adams (10).

BIBLIOGRAFIE

1. IONESCU D. V., *Aplicarea formulelor de derivare numerică la integrarea numerică a ecuațiilor diferențiale.* Studii și cercetări de matematică (Cluj), **X**, *2*, 259–315 (1959).
2. — *Formule de cuadratură cu noduri exterioare.* Studii și cercetări de matematică, (Cluj), **IX**, 45–135 (1958).
3. TOLLMIEN W., *Über die Fehlerabschätzung beim Adamschen Verfahren zur Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen.* Zeitschr. für. Ang. Math. und. Mech. **18**, 83–90 (1938).
4. БАХВАЛОВ Н. С., *К оценке ошибки при численном интегрировании дифференциальных уравнений экстраполяционным методом Адамса.* Доклады Акад. Наук. СССР, **104**, 683—686 (1955).

Primit la 14.X.1959.