ASUPRA PROBLEMEI TRANSPORTURILOR

DE

ELENA MOLDOVAN
(Cluj)

1. Problema transporturilor este o problemă de programare liniară. Ea se poate formula în felul următor:

Se consideră sistemul de ecuații liniare

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \quad m \geqq 1, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \quad n \geqq 1, \tag{2}$$

unde

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_j, \qquad a_i \geqq 0, \qquad b_j \geqq 0. \tag{4}$$

Numerele a_i și b_j sînt date.

Se consideră de asemenea forma liniară

$$f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} k_{ij}\, x_{ij} \tag{5}$$

cu necunoscutele x_{ij}, în care numerele k_{ij} sînt numere nenegative date. Se cere să se determine soluțiile sistemului format de ecuațiile (1), (2), astfel ca $x_{ij} \geqq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$, pentru care forma liniară (5) ia valoarea minimă [1]).

[1]) O soluție a ecuațiilor (1) și (2) pentru care $x_{ij} \geqq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$, o vom numi pozitivă. O soluție pozitivă pentru care f ia valoarea sa minimă o vom numi optimală.

O problemă care intervine în practică şi care revine la problema matematică de mai sus este următoarea : Fie $E_1, E_2, \ldots, E_m$, $(m \geqq 1)$, centre care produc o anumită marfă, iar $V_1, V_2, \ldots, V_n$, $(n \geqq 1)$, centre care consumă această marfă. Centrul E_i produce $a_i \geqq 0$ unităţi din marfa considerată, iar centrul V_j solicită $b_j \geqq 0$ unităţi din această marfă. Dacă se notează cu x_{ij} cantitatea de marfă transportată de la E_i la V_j, iar cu k_{ij} costul transportului pe unitate de la E_i la V_j, atunci (5) reprezintă costul transportului la toate centrele de consum. Prin urmare problema formulată mai sus revine la determinarea cantităţilor x_{ij} de marfă, astfel ca valoarea transportului să fie minimă.

Se cunosc diferite procedee de rezolvare a problemei transporturilor. În prezenta notă urmărim să aplicăm teoria grafelor la rezolvarea unui caz particular al problemei transporturilor, studiat de E g e r v á r y J. [2].

2. Să ataşăm fiecărui centru de producţie E_i şi fiecărui centru de consum V_j cîte un punct în plan. Dacă unim fiecare din punctele $E_1, E_2, \ldots, E_m$ cu fiecare din punctele $V_1, V_2, \ldots, V_n$, prin cîte un segment de dreaptă h_{ij}, obţinem un graf [1]. În cele ce urmează vom nota cu litera G acest graf.

Să considerăm o soluţie pozitivă [1]) a sistemului format de (1) şi (2). Să notăm cu litera S această soluţie. Să ataşăm muchiilor h_{ij} ale grafului G valorile x_{ij}. Să notăm cu $S(G)$ subgraful lui G, care se obţine din G dacă omitem muchiile h_{ij} cărora le corespund componentele nule x_{ij} din soluţia S. Graful $S(G)$ se numeşte nucleul lui G relativ la soluţia S.

Fie $M_1, M_2, \ldots, M_k$ vîrfuri ale grafului G şi $h_{12}, h_{23}, \ldots, h_{k-1,k}$ muchiile care unesc aceste vîrfuri, astfel că $h_{i,i+1}$ uneşte vîrful M_i cu M_{i+1}, $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Dacă M_1 coincide cu M_k, iar celelalte vîrfuri sînt distincte, atunci se zice că muchiile $h_{12}, h_{23}, \ldots, h_{k-1,k}$ formează un cerc. Se observă că graful G considerat are proprietatea că orice cerc al său conţine un număr par de muchii [1].

DEFINIŢIA 1. *O soluţie pozitivă S a sistemului format de ecuaţiile* (1) *şi* (2) *se numeşte simplă dacă graful $S(G)$ nu conţine nici un cerc.*

DEFINIŢIA 2. *Două soluţii pozitive, distincte S_1 şi S_2 ale sistemului format de ecuaţiile* (1) *şi* (2) *se numesc asociate, dacă graful obţinut prin reunirea grafelor $S_1(G)$ şi $S_2(G)$ conţine un singur cerc.*

Observaţie. Se ştie că dacă S_1 şi S_2 sînt soluţii simple, atunci reunirea grafelor $S_1(G)$ şi $S_2(G)$, conţine cel puţin un cerc [1].

3. În lucrarea [2] se consideră problema transporturilor în cazul particular $n = m$ şi $a_i = 1$, $i = 1,2,\ldots, m$; $b_j = 1$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Vom numi acest caz cazul (E). Are loc proprietatea : dacă numerele a_i şi b_j sînt

[1]) Este asigurată existenţa a cel puţin unei asemenea soluţii. În cele ce urmează vom considera numai soluţii pozitive şi le vom numi, simplu, soluţii.

toate întregi, problema considerată se poate reduce la cazul (E), considerîndu-se

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = p$$

centre de producţie şi tot atîtea centre de consum.

4. LEMA 1. *Dacă sînt îndeplinite condiţiile din cazul* (E), *atunci toate soluţiile sistemului format din* (1) *şi* (2) *sînt simple.*

Concluzia din lemă se observă că are loc deoarece în cazul (E), rezolvarea sistemului considerat revine la a ataşa în toate modurile posibile fiecărui centru de consum V_j cîte un centru de producţie şi unul singur E_i şi fiecărui centru E_i cîte un centru şi unul singur V_j. Există deci $n\,!$ soluţii simple.

LEMA 2. *Dacă în cazul* (E), *S este soluţia $x_{ii} = 1$, $x_{ij} = 0$, $i \neq j$ a ecuaţiilor* (1), (2), *atunci există* $\binom{n}{2} + 2\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}$ *soluţii asociate cu S.*

Pentru a demonstra lema 2 este suficient să observăm modul de formare a soluţiilor asociate lui S. Să notăm cu $\widetilde{S}$ o soluţie asociată lui S. Pentru a obţine pe $\widetilde{S}(G)$ din $S(G)$, trebuie să adăugăm grafului $S(G)$ cel puţin două muchii din G care nu figurează în $S(G)$ şi să omitem altele două din $S(G)$. Dacă facem această operaţie în toate modurile posibile, obţinem $\binom{n}{2}$ soluţii asociate lui S. Să le notăm cu $\widetilde{S}_1, \widetilde{S}_2, \ldots, \widetilde{S}_h$, $h = \binom{n}{2}$. Oricare ar fi $1 \leqq k \leqq h$, graful $\widetilde{S}_k(G) \cup S(G)$ conţine un singur cerc şi anume un cerc format din patru muchii.

Pentru a obţine soluţiile asociate lui S, care nu se găsesc printre cele h considerate mai sus, trebuie să adaugăm lui $S(G)$ cel puţin trei muchii din G şi să omitem altele trei. Făcînd această operaţie în toate modurile posibile, obţinem $2\binom{n}{2}$ soluţii asociate lui S. Fie S^* una dintre aceste soluţii, graful $S(G) \cup S^*(G)$ conţine un cerc format din şase munchii.

Se observă acum uşor că pentru a obţine o soluţie $S^{(k)}$ asociată lui S şi astfel ca graful $S(G) \cup S^{(k)}(G)$ să conţină un cerc format din $2k$ muchii, trebuie să adaugăm lui $S(G)$, k muchii din G şi să omitem altele k. În total se vor obţine $2\binom{n}{k}$ astfel de soluţii. Numărul soluţiilor asociate lui S este deci

$$\binom{n}{2} + 2\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}.$$

Pentru a exemplifica, să considerăm $n = 4$ şi fie S soluţia pentru care $S(G)$ are înfăţişarea din figura 1.

Pentru soluțiile S_i asociate lui S, obținem 16 grafe $S_i(G)$ dintre care fac parte următoarele (fig. 2, 3 și 4):

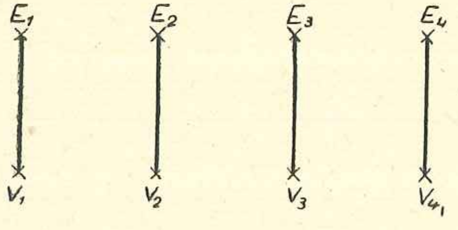

Fig. 1

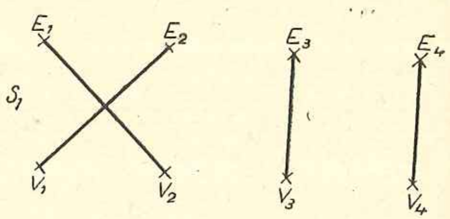

Fig. 2

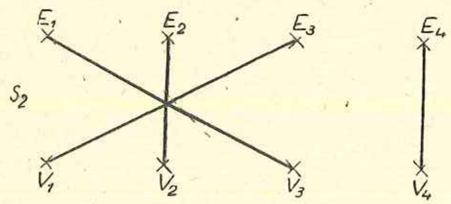

Fig. 3

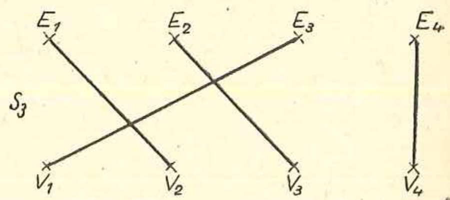

Fig. 4

Graful $S_1(G) \cup S(G)$ are forma din fig. 5;
Graful $S_3(G) \cup S(G)$ are forma din fig. 6.

5. Fie S o soluție a ecuațiilor (1) și (2). Valoarea corespunzătoare a lui f, în ipoteza că sîntem în cazul (E), este un număr de forma $\sum_{i=1}^{n} k_{ij_i}$, pe care pentru a pune în evidență soluția S, să-l notăm cu $f(S)$. Rezultă că pentru a calcula diferența $f(S_1) - f(S_2)$, unde S_1 și S_2 sînt asociate, este suficient să considerăm cercul conținut în $S_1(G) \cup S_2(G)$. Fie acest cerc format din muchiile $h_1, h_2, \ldots, h_l$ din $S_1(G)$ și muchiile $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \ldots, \tilde{h}_l$ din $S_2(G)$. Este suficient să scădem din suma cheltuielilor de transport corespunzătoare muchiilor h_i, suma cheltuielilor de transport corespunzătoare muchiilor $\tilde{h}_i$.

TEOREMĂ. *Dacă S este o soluție a ecuațiilor* (1) *și* (2) *considerate în cazul* (E) *și pentru orice soluție asociată S_k avem $f(S) \leqq f(S_k)$, atunci S este o soluție optimală.*

Pentru demonstrarea teoremei să presupunem ipotezele satisfăcute și să negăm concluzia din enunț. Există deci cel puțin o soluție S^*, care nu e asociată lui S și pentru care $f(S^*) < f(S)$. Dar S^* nefiind asociată lui S, rezultă că graful $S^*(G) \cup S(G)$ conține cel puțin două cercuri Γ_1 și Γ_2. În mulțimea soluțiilor asociate cu S, există o soluție S_1

astfel ca graful $S(G) \cup S_1(G)$ să conțină cercul Γ_1 și există o soluție S_2, astfel ca graful $S(G) \cup S_2(G)$ să conțină cercul Γ_2. Avem

$$f(S) - f(S^*) = f(S) - f(S_1) + f(S) - f(S_2) \leqq 0$$

Prin urmare nu putem avea $f(S^*) < f(S)$.

6. Din teorema enunțată rezultă că pentru a găsi soluția optimă a problemei transporturilor în cazul (E), este suficient să comparăm soluții

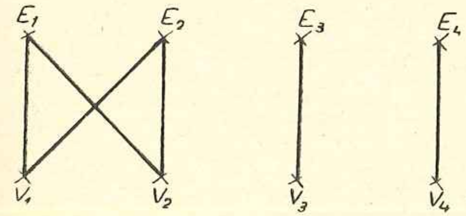

Fig. 5

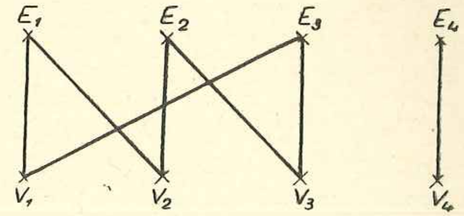

Fig. 6

asociate între ele. În lucrarea [2], rezolvarea problemei necesită un număr de cel mult

$$n^2 + n^2 + (n^2 - n) + (n^2 - 2n) + \ldots + [n^2 - (n-1)n] =$$

$$= n^2(n+1) - \frac{n^2(n-1)}{2}$$

operații de scădere.

Dacă aplicăm proprietățile grafelor, conform teoremei enunțate, procedeul de calcul utilizat necesită în cazul considerat cel puțin

$$2\binom{n}{2} + 2.4\binom{n}{3} + 2.6\binom{n}{4} + \ldots + 4(n-1)$$

operații de adunare și $\binom{n}{2} + 2\sum_{k=3}^{n}\binom{n}{k}$ operații de scădere.

Prin urmare pentru $n \geqq 4$ numărul de operații care se fac aplicînd procedeul lui Egerváry J. este mai mic decît numărul de operații care se fac aplicînd procedeul grafelor.

Totuși, în ceea ce privește întocmirea programului de calcul în cazul (E), procedeul grafelor este mai ușor de utilizat. Aceasta se poate observa atît în cazul (E) cît și în cazurile care revin la aceasta prin descompunerea indicată în [2]. În exemplul numeric dat în [2], procedeul grafelor se aplică în felul următor. Datele problemei sînt cuprinse în tabela 1.

Tabela 1

	V_1	V_2	V_3	V_4
E_1	$k_{11} = 1$	$k_{12} = 9$	$k_{13} = 5$	$k_{14} = 8$
E_2	$k_{21} = 2$	$k_{22} = 3$	$k_{23} = 0$	$k_{24} = 4$
E_3	$k_{31} = 3$	$k_{32} = 1$	$k_{33} = 4$	$k_{34} = 1$
E_4	$k_{41} = 2$	$k_{42} = 7$	$k_{43} = 2$	$k_{44} = 8$

Numerele k_{ij} din tabelă reprezintă cheltuielile de transport de la E_i la V_j. Fiecare centru de producție produce o unitate din marfa considerată și fiecare centru de consum necesită o unitate din această marfă. Aranjăm numerele din tabela 1 în ordine crescătoare

$$0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 8,\ 9.$$

Completăm tabela 1 ținînd seama de această ordine :

	V_1	V_2	V_3	V_4
E_1	1	0	0	0
E_2	0	0	1	0
E_3	0	1	0	0
E_4	0	0	0	1

Valoarea corespunzătoare a lui f este $1 + 0 + 1 + 8 = 10$. Comparăm soluția considerată, cu soluțiile care-i sînt asociate. Se observă imediat că soluția dată de tabela 2 este mai bună. În acest caz valoarea lui f este $1 + 1 + 4 + 2 = 8$.

Tabela 2

	V_1	V_2	V_3	V_4
E_1	1	0	0	0
E_2	0	0	0	1
E_3	0	1	0	0
E_4	0	0	1	0

Să comparăm această soluție cu toate soluțiile care îi sînt asociate și observăm că printre acestea se găsește soluția dată de tabela 3,

Tabela 3

	V_1	V_2	V_3	V_4
E_1	1	0	0	0
E_2	0	1	0	0
E_3	0	0	0	1
E_4	0	0	1	0

pentru care valoarea lui f este $1 + 3 + 1 + 2 = 7$, care reprezintă valoarea minimă a lui f. Această proprietate de minimum se observă imediat dacă comparăm soluția dată de tabela 3 cu toate soluțiile asociate ei. Graful corespunzător soluției optimale este (fig. 7).

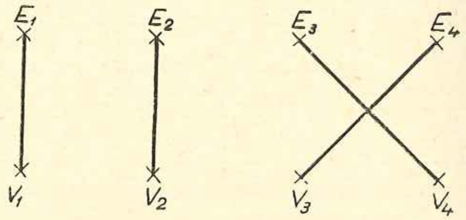

Fig. 7

ОТНОСИТЕЛЬНО ЗАДАЧИ О ПЕРЕВОЗКАХ

РЕЗЮМЕ

Работа содержит сравнительное изучение метода решения задачи линейного программирования, предложенного Ж. Эгервари [2] и способ графов [1]. Отмечается, что в определяемом в работе случае (E), способ Эгервари более выгоден, чем способ графов, в отношении числа операций.

SUR LE PROBLÈME DES TRANSPORTS

RÉSUMÉ

Le travail constitue une étude comparative entre la méthode pour résoudre le problème de la programmation linéaire, due à J. Egerváry [2] et le procédé des graphes [1]. L'auteur fait remarquer que, dans le cas (*E*), défini dans le travail, le procédé d'Egerváry offre, par rapport au procédé des graphes, l'avantage d'un nombre plus réduit d'opérations.

BIBLIOGRAFIE

1. BILY J., FIEDLER M., NOZIČKA F., *Die Graphentheorie in Anwendung auf das Transport problem.* Czech. Math J., **8 (83)**, *1*, 94—121 (1958).
2. EGERVÁRY J., *Kombinatorikus módszer a szállitási probléma megoldására.* Publ. of the Math. Inst. of the Hungarian Acad. of Sci., **IV**, *1*, 15—28 (1959).

Primit la 28.X.1960.