CALCULUL ŞARJELOR CELOR MAI ECONOMICE LA CUPTOARELE DE TOPIT FONTĂ

DE

E. MUNTEANU şi F. RADÓ
(Cluj)

Lucrare prezentată la sesiunea ştiinţifică din 25–26 martie 1960 a Academiei R.P.R. – Filiala Cluj

1. Multe probleme economice pot fi formulate matematic în felul următor:

Să se determine $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *astfel ca să satisfacă inegalităţile*:

$$x_j \geqslant 0, \qquad (j = 1, 2, \ldots, m), \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

şi funcţia

$$f = \sum_{j=1}^{m} c_j x_j \tag{3}$$

să fie maximă (sau minimă).

Această problemă numită *programare liniară* a fost enunţată şi rezolvată pentru prima oară de L. V. Kantorovici în 1939 [5], [6] şi apoi independent de el, de G. B. Dantzig în 1947, [1], care s-a bazat pe o lucrare anterioară a lui F. L. Hitchcook relativă la problema transporturilor, publicată în 1941 [4].

Dintre metodele de rezolvare ale problemei de mai sus, cea mai uşor utilizabilă este metoda simplex [7], [2].

Programarea liniară se aplică la problema transporturilor, la problema alegerii tehnologiei în vederea obţinerii numărului maxim de sortimente complete, la alegerea tipurilor de produse pentru atingerea producţiei maxime etc.

O categorie de probleme de amestec, se rezolvă de asemenea cu ajutorul programării liniare. În cadrul Institutului de calcul din Cluj, s-a rezolvat o problemă de amestec privind fabricarea sticlei [8]. De asemenea a fost pusă problema determinării șarjelor la cuptoarele de topit fontă, în așa fel ca să se obțină o fontă lichidă de compoziție dorită, cu cheltuieli minime.

2. Se dă un tabel de materii prime cu compoziția și costul lor.

Materie primă	1 kg materie primă conține				Valoarea unui kilogram din materie primă
	Si (kg)	Mn (kg)	P (kg)	S (kg)	
M_j	a_{1j}	a_{2j}	a_{3j}	a_{4j}	c_j

Materiile prime M_j se împart în următoarele categorii :

$$
\begin{array}{lll}
M_1, \ \ldots, M_p & \text{fonte brute obișnuite} & (FK), \\
M_{p+1}, \ \ldots, M_q & \text{fonte brute speciale} & (FX), \\
M_{q+1}, \ \ldots, M_{m-2} & \text{fontă veche} & (FV), \\
M_{m-1} & \text{oțel vechi} & (O), \\
M_m & \text{deșeuri proprii} & (D).
\end{array}
$$

Se cere o fontă lichidă de următoarea compoziție :

C	Si	Mn	P	S	
$p_0 - p_0'$	$p_1 - p_1'$	$p_2 - p_2'$	$p_3 - p_3'$	$p_4 - p_4'$	(%)

unde pentru fiecare element s-au presupus două limite și care trebuie obținută cu cheltuieli minime.

În cursul topirii, conținutul în C, Si, Mn, P, S se schimbă după felul cuptorului, al combustibilului, al timpului de topire, după debitul de aer, grosimea patului de cocs și temperatura de topire (regimul cuptorului). Datorită acestor condiții de lucru, compoziția încărcăturii diferă de compoziția fontei lichide obținute. Dacă notăm cu $b_0, b_1, \ldots, b_4$ și respectiv $b_0', b_1', \ldots, b_4'$ cantitățile de C, Si, Mn, P, S conținute într-un kilogram din încărcătură, avem următoarele formule empirice

$$
\begin{aligned}
p_i &= \alpha_i + \beta_i b_i, \\
p_i' &= \alpha_i + \beta_i b_i'
\end{aligned}
\qquad (i = 0, \ldots, 4), \tag{4}
$$

unde α_i și β_i sînt constante care depind de regimul cuptorului ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$) [8]. Din formulele (4) se calculează b_1, b_2, b_3, b_4 și respectiv b_1', b_2', b_3', b_4'. Conținutul de carbon din încărcătură nu ne interesează în calcule (nici pentru materiile prime nu avem date precise despre conținutul de carbon), deoarece conținutul de carbon al fontei finale se atinge prin adăugarea cocsului de petrol (în unele cazuri mai rare cînd

se cere o fontă lichidă cu un procent mai mic de carbon, acest lucru se asigură punînd oțel vechi în încărcătură).

Cantitățile x_j luate din materiile prime M_j, care dau un kilogram de fontă de compoziția cerută, trebuie deci să satisfacă următoarele condiții :

$$
\begin{aligned}
& x_j \geqslant 0, && (j = 1, 2, \ldots, m), \\
& \sum_{j=1}^{m} x_j = 1, && \\
& b_i \leqslant \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \leqslant b_i', && (i = 1, 2, 3, 4).
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Se mai impun condiții privind structura cristalină a fontei și cantitățile disponibile de deșeuri proprii. Pentru a avea o structură granulară suficient de fină, la anumite fonte se cere să se introducă cel puțin $p\%$ fontă specială care ne conduce la inegalitatea

$$
\sum_{j=p+1}^{q} x_j \geqslant \frac{p}{100} \tag{6}
$$

și la toate fontele, o delimitare a fontei vechi, adică

$$
\sum_{j=q+1}^{m-2} x_j \leqslant \frac{p'}{100}. \tag{7}
$$

Cea mai mare parte a deșeurilor proprii provine de la pîlniile de turnare și o parte mai mică din rebuturi. La piesele mici pîlniile de turnare reprezintă un procent considerabil, iar la piesele mari, un procent mai mic. În același timp, se știe că pentru piesele de o anumită mărime, se utilizează o anumită calitate de fontă lichidă (ca urmare a diagramei Greiner-Klingenstein relativă la domeniul fontelor perlitice), deci cantitățile disponibile de deșeuri proprii pot fi stabilite pentru fiecare calitate de fontă lichidă. Prin urmare avem și condiția

$$
x_m \leqslant \frac{p''}{100}. \tag{8}
$$

Problema șarjelor revine deci la determinarea soluției inegalităților (5), (6), (7), (8), care face minimă funcția

$$
f = \sum_{j=1}^{m} c_j x_j, \tag{9}
$$

f reprezentînd costul unui kilogram de fontă lichidă.

Dintre valorile unitare c_j, valoarea deșeului propriu c_m nu este fixat. Totuși pentru nevoile contabilității, s-a luat o valoare convențională pentru c_m, care însă denaturează problema noastră și nu conduce la soluția realmente cea mai economică. E clar că toate cantitățile existente de deșeuri proprii, trebuie utilizate la retopire, dacă nu la momentul respectiv, atunci mai tîrziu, la șarjele următoare. Așadar într-o perioadă mai mare de timp, deșeurile proprii în orice caz se folosesc în întregime. Prin urmare, partea din fonta lichidă provenită din deșeuri proprii, nu trebuie considerată ca un nou produs. În acest caz, la calculul unei șarje, deșeul propriu nu intră nici în cost, nici în cantitatea produsă. Pentru a face costul unui kilogram de fontă lichidă cît se poate de mic, trebuie să găsim minimul funcției

$$F = \frac{\sum_{j=1}^{m-1} c_j x_j}{1 - x_m}, \tag{10}$$

în loc de minimul funcției (9), cu respectarea ca mai sus a condițiilor (5), (6), (7), (8).

Observăm că dacă se calculează șarjele în acest fel, pe o perioadă mai mare de timp, se va acumula o cantitate oarecare de deșeuri proprii, pentru că în general nu se va merge la diferitele șarje cu deșeurile proprii pînă la limita admisă de inegalitățile (8). Trebuie să se intercaleze atunci cîteva șarje calculate cu un conținut prescris de deșeuri proprii, bineînțeles făcînd iarăși cheltuielile minime în aceste condiții schimbate.

Problema pusă în acest fel, nu se mai încadrează în problema programării liniare. Admițînd anumite erori, avem următoarele două posibilități de a o transforma într-o problemă de programare liniară.

a) Fixăm dinainte x_m în baza cantității disponibile de deșeu propriu. Atunci numitorul funcției (10) devine constant și avem o problemă de programare liniară. Această fixare arbitrară, nu va conduce întotdeauna la rezultatul cel mai economic.

b) din (10) se găsește

$$F = \sum_{j=1}^{m-1} c_j x_j + F x_m,$$

unde deși F este necunoscut, cunoaștem o valoare aproximativă $\overline{F}$ a lui, și rezolvăm problema de programare liniară cu funcția

$$F = \sum_{j=1}^{m-1} c_j x_j + \overline{F} x_m,$$

adică în (9) se pune $c_m = \overline{F}$. Soluția acestei probleme ne dă o aproximație care corespunde din punct de vedere practic.

Pentru a determina în mod exact compoziția șarjei celei mai economice, trebuie să studiem următoarea generalizare a problemei programării liniare.

3. *Să se determine* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *astfel ca să satisfacă inegalitățile* (1) *și* (2) *și ca funcția*

$$F = \frac{\sum_{j=1}^{m} c_j x_j + c_0}{\sum_{j=1}^{m} d_j x_j + d_0}, \tag{11}$$

să fie maximă (sau minimă). *Se presupune că relațiile* (1) *și* (2) *atrag după sine*

$$\sum_{j=1}^{m} d_j x_j + d_0 \geqslant N > 0. \tag{12}$$

Vom extinde mai jos metoda simplex pentru acest caz mai general.

Transformăm inegalitățile (2) în ecuații, întroducînd noi necunoscute pozitive. Presupunem, pentru a nu modifica notațiile, că noile necunoscute figurează deja printre $x_1, x_2, \ldots, x_m$, atunci avem un sistem de ecuații care se poate pune sub forma

$$x_i + \sum_{j=n+1}^{m} \alpha_{ij} x_j = \beta_i, \quad \beta_i \geqslant 0, \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{13}$$

sau

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} x_j = \beta_i, \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{13'}$$

unde matricea (α_{ij}), $i, j = 1, \ldots, n$ este matricea unitate. Condiția $\beta_i \geqslant 0$ implică, că anumite necunoscute au fost notate cu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (pentru a obține sistemul de forma (13) se poate aplica cunoscuta metodă a variabilelor artificiale [6]).

Sistemul ordonat de numere $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ se numește un *sistem admisibil* dacă verifică ecuațiile (13) și inegalitățile (1). *Problema constă în determinarea maximului funcției* (11) *în mulțimea sistemelor admisibile.*

Un sistem admisibil $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ se numește un *sistem marginal*, dacă $x_j = 0$ pentru cel puțin $m - n$ indici j. Mulțimea sistemelor admisibile formează un poliedru convex într-un subspațiu $m - n$ dimensional al spațiului afin m-dimensional. Sistemele marginale sînt vîrfurile acestui poliedru. Avînd în vedere că funcția (11) este monotonă în raport cu fiecare din variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_m$ (cînd celelalte devin constante), max F este atins într-un vîrf al poliedrului. Dacă max F este atins numai într-un vîrf, avem o soluție unică, iar dacă acest maxim este atins în mai multe vîrfuri, atunci toate punctele feței determinate de vîrfurile respective, furnizează pentru F valoarea maximă.

Introducem notațiile

$$g_0 = c_0 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i c_i, \quad h_0 = d_0 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i d_i,$$

$$g_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} c_i - c_j, \quad h_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} d_i - d_j, \quad (j = n+1, \ldots, m);$$

funcția (11) devine

$$F = \frac{-\sum_{j=n+1}^{m} g_j x_j + g_0}{-\sum_{j=n+1}^{m} h_j x_j + h_0}. \tag{14}$$

Sistemul $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, 0, 0, \ldots, 0)$ este un sistem marginal. Pentru aceasta valoarea lui F este

$$F_1 = \frac{g_0}{h_0}.$$

Să căutăm un sistem marginal pentru care $x_r = 0$, $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_{k-1} = x_{k+1} = x_{k+2} = \ldots = x_m = 0$ $(r < n,\ k > n)$. Sistemul de ecuații (13) determină restul necunoscutelor

$$\left.\begin{aligned} x_k &= \frac{\beta_r}{\alpha_{rk}}, \\ x_i &= \beta_i - \frac{\beta_r \alpha_{ik}}{\alpha_{rk}}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, r-1, r+1, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Acest sistem trebuie să verifice încă inegalitățile (1) adică $\alpha_{rk} > 0$ și

$$\beta_i - \frac{\beta_r \alpha_{ik}}{\alpha_{rk}} \geqslant 0. \tag{16}$$

Dacă $\alpha_{ik} \leqslant 0$, condiția (16) se verifică de la sine; dacă $\alpha_{ik} > 0$, împărțim cu el (16) și obținem

$$\frac{\beta_i}{\alpha_{ik}} - \frac{\beta_r}{\alpha_{rk}} \geqslant 0.$$

Presupunem k fixat; condiția (16) va fi verificată dacă alegem dintre indicii i, pentru care $\alpha_{ik} > 0$, pe acela drept r care face pe $\frac{\beta_i}{\alpha_{ik}}$ minim,

$$\frac{\beta_r}{\alpha_{rk}} = \min_{\alpha_{ik} > 0} \frac{\beta_i}{\alpha_{ik}},$$

k fiind fixat arbitrar și r astfel atașat lui k, sistemul de valori (15) este un sistem marginal. Pentru el valoarea lui F este

$$F_2 = \frac{-g_k \frac{\beta_r}{\alpha_{rk}} + g_0}{-h_k \frac{\beta_r}{\alpha_{rk}} + h_0}.$$

Avem

$$F_2 - F_1 = (g_0 h_k - h_0 g_k) \cdot \frac{\beta_r}{\alpha_{rk}} \cdot \frac{1}{h_0\left(-h_k \frac{\beta_r}{\alpha_{rk}} + h_0\right)}.$$

Al doilea factor este pozitiv, de asemenea și cel de-al treilea prin condiția (12). Prin urmare semnul lui $F_2 - F_1$ este dat de semnul expresiei

$$\mu_k = g_0 h_k - h_0 g_k. \tag{17}$$

Dacă (17) *este negativ sau nul pentru orice* k, *atunci sistemul marginal* $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, 0, \ldots, 0)$ *reprezintă soluția problemei* și $\max F = \frac{g_0}{h_0}$ (dacă (17) este negativ pentru orice k avem o soluție unică). *Dacă* (17) *este pozitiv, pentru o valoare a lui* k, *atunci soluția marginală* (15) *dă pentru* F *o valoare mai mare decît soluția marginală inițială* $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, 0, \ldots, 0)$. Este recomandabil ca în calculele numerice să se aleagă pentru k acel indice care face expresia (17) maximă. Dacă pentru un k care face expresia (17) pozitivă, toți $\alpha_{ik} < 0$, atunci se vede că există un sistem admisibil cu $x_i > 0$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ și $x_k > 0$, iar restul de $m - n - 1$ necunoscute fiind zero cu valori oricît de mari; în acest caz $\max F$ nu este atins.

Transformăm sistemul de ecuații (13) într-un sistem echivalent de aceeași formă, numai că schimbăm rolul necunoscutelor x_r și x_k

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha'_{ij} x_j = \beta'_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{18}$$

unde matricea (α'_{ij}) are proprietatea că dacă extragem coloanele $1, 2, \ldots, r-1, k, r+1, \ldots, n$, obținem matricea unitate. Avem

$$\left.\begin{aligned} \alpha'_{ij} &= \alpha_{ij} - \frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{rk}} \alpha_{rj}, \qquad (i \neq r), \\ \alpha'_{rj} &= \frac{\alpha_{rj}}{\alpha_{rk}}, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

$$\left.\begin{aligned} \beta'_i &= \beta_i - \frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{rk}} \beta_r, \qquad (i \neq r) \\ \beta'_r &= \frac{\beta_r}{\alpha_{rk}}. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

La calculele efective procedăm în felul următor. Formăm tabela 1.

Tabela 1

β_1	1	0	. . .	0	$\alpha_{1,n+1}$	. . .	$\alpha_{1,k}$	. . .	$\alpha_{1,m}$
β_2	0	1	. . .	0	$\alpha_{2,n+1}$	. . .	$\alpha_{2,k}$	. . .	$\alpha_{2,m}$
.	.	.		.	.		.		.
.	.	.		.	.		.		.
.	.	.		.	.		.		.
β_n	0	0	. . .	1	$\alpha_{n,n+1}$	. . .	$\alpha_{n,k}$	. . .	$\alpha_{n,m}$
g_0	0	0	. . .	0	g_{n+1}	. . .	g_k	. . .	g_m
h_0	0	0	. . .	0	h_{n+1}	. . .	h_k	. . .	h_m
					μ_{n+1}	. . .	μ_k	. . .	μ_m

Stabilim valoarea indicelui k prin alegerea numărului cel mai mare din ultima linie a tabelei 1, formăm rapoartele $\frac{\beta_i}{\alpha_{ik}}$ pentru $\alpha_{ik} > 0$ şi stabilim indicele r prin alegerea celui mai mic raport. În acest fel am determinat *elementul pivot* α_{rk}. Împărţim elementele liniei a r-a cu α_{rk} şi din celelalte linii (în afară de ultima) scădem linia r — a amplificată cu un coeficient, astfel ca în coloana k să apară 0. În acest fel obţinem un tabel T ale cărui elemente le notăm cu aceleaşi litere ca elementele respective ale tabelei 1, punînd în acest fel în evidenţă analogia între cele două tabele. În sfîrşit formăm ultima linie a tabelei T, calculînd $g_0'h_k' - h_0'g_k'$. Elementele α_{ij}' şi β_i' ale noului tabel sînt tocmai cele date de formulele (19) şi (20), iar

$$
\begin{aligned}
g_j' &= g_j - \frac{g_k}{\alpha_{rk}}\,\alpha_{rj}, & g_0' &= g_0 - \frac{g_k}{\alpha_{rk}}\,\beta_r, \\
h_j' &= h_j - \frac{h_k}{\alpha_{rk}}\,\alpha_{rj}, & h_0' &= h_0 - \frac{h_k}{\alpha_{rk}}\,\beta_r .
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Se observă că membrii doi ai formulelor (15) şi (20), sînt respectivi egali, deci sistemul marginal care ne-a furnizat $F = F_2$ va apare în prima coloană a tabelei T.

Notăm cu $g_j^*, g_0^*, h_j^*, h_0^*$ numerele ataşate sistemului (18) în acelaşi fel cum g_j, g_0, h_j, h_0 corespund sistemului (13),

$$
\begin{aligned}
-g_j^* &= c_j - {\sum_{i=1}^{n}}' c_i\alpha_{ij}' - c_k\alpha_{rj}' = c_j - {\sum_{i=1}^{n}}' c_i\left(\alpha_{ij} - \frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{rk}}\,\alpha_{rj}\right) - c_k\frac{\alpha_{rj}}{\alpha_{rk}} = \\
&= c_j - {\sum_{i=1}^{n}}' c_i\alpha_{ij} - \frac{\alpha_{rj}}{\alpha_{rk}}\left(c_k - \sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_{ik}\right) = -g_j + g_k\frac{\alpha_{rj}}{\alpha_{rk}} = -g_j' .
\end{aligned}
$$

În mod analog avem

$$
g_0^* = g_0', \quad h_j^* = h_j', \quad h_0^* = h_0' .
$$

Sistemului (18) respectiv tabelei T, îi aplicăm acelaşi procedeu pe care l-am aplicat sistemului iniţial (13) şi tabelei 1 şi continuăm acest procedeu pînă cînd numerele din ultima linie sînt negative sau nule. Se demonstrează ca şi în cazul metodei simplex obişnuite, [6], că după un număr finit de paşi, se ajunge la această situaţie. Rezultatul problemei se citeşte în prima coloană a unui ultim tabel astfel obţinut : în primele n linii apar valorile nenule ale sistemului marginal optim, iar cîtul elementelor din ultimele două linii este valoarea maximă a lui F.

РАСЧЕТ НАИБОЛЕЕ ЭКОНОМИЧНЫХ ШИХТ В ПЕЧАХ ДЛЯ ПЛАВКИ ЧУГУНА

РЕЗЮМЕ

В работе решается одна задача о смешивании, касающаяся загрузки сырьем печей для плавки чугуна таким образом, чтобы получить желаемую продукцию при минимальной себестоимости, учитывая определенные заданные условия.

В силу того, что среди сырья фигурируют также и отходы производства, единичная цена которых заранее неизвестна и принимается равной цене готовой продукции, задача приводит к следующему обобщению линейного программирования:

Определить x_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ таким образом, чтобы удовлетворить неравенства (1) и (2) и чтобы дробь (11) была максимальной (или минимальной). Симплекс-метод распространяется на этот более общий случай.

CALCUL DES CHARGES LES PLUS ÉCONOMIQUES DES FOURS À FONTE

RÉSUMÉ

Dans ce travail, les auteurs donnent la solution d'un problème de mélange concernant le chargement des fours à fonte avec des matières premières, de manière à obtenir le produit voulu au prix minimum, tout en satisfaisant à certaines conditions imposées.

Par suite du fait que les matières premières comprennent aussi des déchets, dont le prix unitaire n'étant pas connu d'avance est considéré égal au prix du produit obtenu, le problème conduit à la généralisation suivante du programme linéaire :

Déterminer x_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ de manière qu'il satisfasse aux inégalités (1) et (2) et que, par conséquent, la fraction (11) ait la valeur maximum (ou minimum). En outre, la méthode simplex est étendue à ce cas plus général.

BIBLIOGRAFIE

1. DANTZIG G. B., *Maximization of a Linear Function of Variables Subject to Linear Inequalities.* Activity Analysis of Production and Allocation edit. by T. C. Koopmans, New York, 1951.
2. EISEMANN K., *Linear Programming.* Quarterly of Appl. Math., **13**, 209–232 (1955).
3. GHIRSOVICI, *Turnarea fontei.* Ed. tehnică, Bucureşti.
4. HITCHCOOK F. L., *The Distribution of a Product from Several Sources to Numerous Localities.* Journ. of Math. and Phys., **20**, 224–230 (1941).
5. КАНТАРОВИЧ Л. В., *Математические методы организации и планирования производства.* Изд. ЛГУ, **67** (1939).
6. — *О методах анализа некоторых экстремальных планово-производственных задач.* Докл. АН СССР, **115**, 3, 441—444 (1957).
7. — *Экономический расчет наилучшего использования ресурсов.* Москва, 1959.
8. RADÓ F., *Despre problema programării liniare.* Studii şi cercetări de matematică (Cluj) (acest volum, p. 167—177).

Primit la 17. VI.1960.