DELIMITAREA ERORII ÎN PROCEDEUL DE ORDINUL CINCI DE EXACTITATE AL LUI NYSTRÖM, DE INTEGRARE NUMERICĂ A ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE DE ORDINUL ÎNTÎI

DE

A. COȚIU

(Cluj)

Comunicare prezentată la sesiunea științifică din 20—22 mai 1959 a Universității „Babeș-Bolyai" Cluj

1. Să considerăm ecuația diferențială de ordinul întîi

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

și fie $y(x)$ integrala ei care satisface la condiția inițială $y(x_0) = y_0$.

Presupunem că în domeniul D, definit de inegalitățile

$$|x - x_0| \leqslant a, \ |y - y_0| \leqslant b, \tag{2}$$

funcția $f(x,y)$ și derivatele sale parțiale, în raport cu x și y, pînă la ordinul al cincilea inclusiv, sînt continue.

Fie M, N și a' numere pozitive alese astfel încît în domeniul D', definit de inegalitățile

$$|x - x_0| \leqslant a', \ |y - y_0| \leqslant b, \tag{3}$$

să avem

$$|f(x, y)| \leqslant N, \ \left|\frac{\partial^l f(x, y)}{\partial x^i \partial y^k}\right| \leqslant \frac{M}{N^{k-1}}, \ (l = 1, 2, 3, 4, 5), \tag{4}$$

iar

$$a' \ N \leqslant b, \ a' \ M \leqslant 1. \tag{5}$$

2. Deoarece, în cele ce urmează, intervine des noțiunea de ordin de exactitate al unui procedeu de integrare numerică a ecuațiilor diferențiale de ordinul întîi, reamintim definiția dată de L. C o l l a t z [6].

Notînd cu $y(x)$ integrala exactă a ecuației diferențiale (1), pe nodul x, și cu $\tilde{y}(x)$ integrala ei aproximativă, calculată cu ajutorul unui procedeu numeric dat pe același nod, din intervalul $[x_0, x_0 + a']$, să presupunem că $y(x)$ și $\tilde{y}(x)$ se pot dezvolta în serii Taylor cu centrul în punctul x_0 ; avem

$$y(x) = y(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} y'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} y''(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^p}{p!} y^{(p)}(x_0) + \ldots, \tag{6}$$

$$\tilde{y}(x) = y(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} a_1 + \frac{(x - x_0)^2}{2!} a_2 + \ldots + \frac{(x - x_0)^p}{p!} a_p + \ldots \tag{7}$$

Exponentul puterii lui $x - x_0$ din ultimul termen în care coeficienții din cele două dezvoltări coincid, se numește *ordinul de exactitate al procedeului de integrare numerică*. Astfel, dacă ordinul de exactitate al procedeului de integrare numerică este p, atunci avem

$$a_1 = y'(x_0),\ a_2 = y''(x_0),\ \ldots,\ a_p = y^{(p)}(x_0), \tag{8}$$

însă

$$a_{p+1} \neq y^{(p+1)}(x_0).$$

3. Pentru integrarea numerică a ecuației diferențiale (1), K u t t a [11] și N y s t r ö m [12], folosind metoda lui R u n g e [13], au stabilit procedee de ordinul al cincilea de exactitate. Aplicarea acestor procedee necesită calcularea funcției $f(x, y)$ pentru șase perechi de valori (x, y).

Dezvoltînd mai departe metoda lui Runge, H u t a [7], [8], a dat două procedee de ordinul al șaselea de exactitate, a căror aplicare necesită calcularea funcției $f(x, y)$ pentru opt perechi de valori (x, y). Generalizînd proprietatea care intervine în metoda lui R u n g e, prof. D. V. I o n e s c u [9], [10] a indicat o metodă care permite obținerea de procedee de orice ordin de exactitate, de integrare numerică a ecuațiilor diferențiale de ordinul întîi, a sistemelor de astfel de ecuații și a ecuațiilor diferențiale de ordinul n. Delimitări ale erorilor, în procedeele date de prof. D. V. I o n e s c u, au fost date de O. A r a m ă [2], [3]. Folosind o metodă de lucru datorită lui J. A l b r e c h t [1], E. S c h e c h t e r [14] a dat o delimitare a erorii în procedeul de ordinul al patrulea de exactitate al lui Kutta, cînd acest procedeu este aplicat succesiv, de mai multe ori. Rezultatele obținute sînt extinse apoi la sisteme de ecuații diferențiale. În legătură cu fenomenele de acumulare ale erorilor care apar la procedeele de integrare numerică, E. S c h e c h t e r [15] a dat de asemenea delimitări practice pentru o anumită categorie de procedee de integrare numerică, în general neliniare.

4. În această lucrare, în ipotezele de la pct. **1**, vom da o delimitare a erorii în procedeul de ordinul al cincilea de exactitate al lui N y s t r ö m, de integrare numerică a ecuației diferențiale (1).

Vom folosi pentru aceasta, o metodă de lucru datorită lui L. B i e b e r b a c h [5].

Pentru aplicarea procedeului lui Nyström se calculează

$$\tilde{y}(x) = y_0 + \frac{x - x_0}{192} k, \tag{9}$$

unde

$$k = 23 k_1 + 125 k_3 - 81 k_5 + 125 k_6, \tag{10}$$

cu notațiile

$$\left.\begin{aligned}
k_1 &= f(x_0, y_0),\\
k_2 &= f\left[x_0 + \frac{1}{3}(x - x_0),\ y_0 + \frac{1}{3} k_1(x - x_0)\right],\\
k_3 &= f\left[x_0 + \frac{2}{5}(x - x_0),\ y_0 + \frac{4}{25} k_1(x - x_0) + \frac{6}{25} k_2(x - x_0)\right],\\
k_4 &= f\left[x_0 + (x - x_0),\ y_0 + \frac{1}{4} k_1(x - x_0) - \frac{12}{4} k_2(x - x_0) + \right.\\
&\qquad \left. + \frac{15}{4} k_3(x - x_0)\right],\\
k_5 &= f\left[x_0 + \frac{2}{3}(x - x_0),\ y_0 + \frac{6}{81} k_1(x - x_0) + \frac{90}{81} k_2(x - x_0) - \right.\\
&\qquad \left. - \frac{50}{81} k_3(x - x_0) + \frac{8}{81} k_4(x - x_0)\right],\\
k_6 &= f\left[x_0 + \frac{4}{5}(x - x_0),\ y_0 + \frac{6}{75} k_1(x - x_0) + \frac{36}{75} k_2(x - x_0) + \right.\\
&\qquad \left. + \frac{10}{75} k_3(x - x_0) + \frac{8}{75} k_4(x - x_0)\right].
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Avem

$$\tilde{y}(x) = y(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} y'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} y''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3!} y'''(x_0) + \frac{(x - x_0)^4}{4!} y^{(4)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^5}{5!} y^{(5)}(x_0) + \ldots$$

5. Ne propunem să delimităm eroarea $|y(x) - \tilde{y}(x)|$ în procedeul de ordinul al cincilea de exactitate al lui N y s t r o m, și anume să arătăm că pe intervalul $|x - x_0| \leqslant a'$, avem

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| < 2658{,}5\ MN \frac{M^5 - 1}{M - 1} (x - x_0)^6. \tag{12}$$

Pentru stabilirea inegalităţii (12), dezvoltînd după puterile lui $x - x_0$, avem

$$\tilde{y}(x) = y(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} y'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} y''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3!} y'''(x_0) +$$
$$+ \frac{(x - x_0)^4}{4!} y^{(4)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^5}{5!} y^{(5)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^6}{6!} y^{(6)}[x_0 + \theta(x - x_0)],$$

$$\tilde{y}(x) = y(x_0) + \frac{x - x_0}{192}\Big\{k(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} k'(x_0) + \dots +$$
$$+ \frac{(x - x_0)^4}{4!} k^{(4)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^5}{5!} k^{(5)}[x_0 + \theta_1(x - x_0)]\Big\}.$$

Procedeul este astfel construit încît primii şase termeni ai dezvoltării lui $\tilde{y}(x)$ coincid cu primii şase termeni din dezvoltarea tayloriană a lui $y(x)$ şi deci avem

$$\tilde{y}(x) = y(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} y'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} y''(x_0) + \dots +$$
$$+ \frac{(x - x_0)^5}{5!} y^{(5)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^6}{5!.192} k^{(5)}[x_0 + \theta_1(x - x_0)].$$

Fără a restrînge generalitatea putem presupune că $x - x_0 > 0$. Deliminarea erorii rezultă atunci din egalitatea

$$y(x) - \tilde{y}(x) = \frac{(x - x_0)^6}{6!} y^{(6)}[x_0 + \theta(x - x_0)] - \frac{(x - x_0)^6}{5!.192} k^{(5)}[x_0 + \theta_1(x - x_0)], \quad (13)$$

de unde

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| \leqslant \Bigg[\frac{1}{6!} \max_{|x-x_0| \leqq a'} \left|\frac{d^5 f}{dx^5}\right| + \frac{125}{5!\,192} \max_{|x-x_0| \leqq a'} \left|\frac{d^5 k_3}{dx^5}\right| +$$
$$+ \frac{81}{5!\,192} \max_{|x-x_0| \leqq a'} \left|\frac{d^5 k_5}{dx^5}\right| + \frac{125}{5!\,192} \max_{|x-x_0| \leqq a'} \left|\frac{d^5 k_6}{dx^5}\right|\Bigg](x - x_0)^6. \quad (14)$$

Trebuie deci să delimităm pe $\left|\frac{d^5 f}{dx^5}\right|$, $\left|\frac{d^5 k_3}{dx^5}\right|$, $\left|\frac{d^5 k_5}{dx^5}\right|$ şi $\left|\frac{d^5 k_6}{dx^5}\right|$ pe intervalul $|x - x_0| \leqslant a'$.

Pentru a simplifica calculele, convenim să scriem ${}_p f_q$ în loc de $\frac{\partial^{p+q} f}{\partial x^p \partial y^q}$; în felul acesta, de exemplu, f_q va însemna $\frac{\partial^q f}{\partial y^q}$.

De asemena, derivatele funcţiilor f, k_3, k_5, k_6 le vom exprima cu ajutorul operatorilor

$$D^n f = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f^j \cdot {}_{n-j}f_j, \quad (15)$$

şi

$$D^n f_i = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f^j \cdot {}_{n-j}f_{i+j}, \quad (16)$$

pentru derivatele cărora sînt valabile relaţiile [4] :

$$(D^n f)' = D^{n+1} f + n\, D^{n-1} f_1 Df, \quad (17)$$

$$(D^n f_i)' = D^{n+1} f_i + n\, D^{n-1} f_{i+1} Df. \quad (18)$$

Prin intermediul acestor operatori avem

$$\frac{d^5 f}{dx^5} = D^5 f + f_1 D^4 f + f_1^2 D^3 f + f_1^3 D^2 f + f_1^4 Df + 5\, D^3 f Df_1 +$$
$$+ 9 f_1 D^2 f Df_1 + 12 f_1^2 Df Df_1 + 10\, D^3 f_1 Df + 16 f_1 D^2 f_1\, Df +$$
$$+ 10\, D^2 f_1 D^2 f + 10 f_2 D^2 f Df + 13 f_1 f_2 (Df)^2 + 15\, Df_2 (Df)^2 +$$
$$+ 15\, (Df_1)^2\, Df. \quad (19)$$

De aici, potrivit notaţiilor introduse şi ipotezelor de mărginire (4), avem

$$\max_{|x-x_0| \leqq a'} \left|\frac{d^5 f}{dx^5}\right| = 32\, MN + 416\, M^2 N + 528\, M^3 N + 104\, M^4 N + 2 M^5 N. \quad (20)$$

Calculele necesare pentru delimitarea lui $\left|\frac{d^5 k_3}{dx^5}\right|$, $\left|\frac{d^5 k_5}{dx^5}\right|$ şi $\left|\frac{d^5 k_6}{dx^5}\right|$, şi care fac să intervină şi ipotezele (5), sînt analoage însă foarte laborioase ; ele au fost executate cu o maşină electrică de calculat Rheinmetall.

Dăm numai rezultatele, care sînt următoarele :

$$\max_{|x-x_0| \leqq a'} \left|\frac{d^5 k_3}{dx^5}\right| = 2{,}904\, MN + 8{,}936\, M^2 N + 2{,}498\, M^3 N, \quad (21)$$

$$\max_{|x-x_0| \leqq a'} \left|\frac{d^5 k_5}{dx^5}\right| = 342537{,}604\, NM + 221228{,}267\, M^2 N +$$
$$+ 31190{,}563\, M^3 N + 730{,}308\, M^4 N, \quad (22)$$

$$\max_{|x-x_0| \leqq a'} \left|\frac{d^5 k_6}{dx^5}\right| = 268433{,}428\, MN + 178280{,}059\, M^2 N + 25327{,}878\, M^3 N +$$
$$+ 667{,}571\, M^4 N. \quad (23)$$

Inlocuind rezultatele date de egalităţile (20), (21), (22) şi (23) în inegalitatea (14) şi efectuînd calculele, obţinem.

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| \leqslant (2658{,}469\, MN + 1745{,}629\, M^2 N + 247{,}811\, M^3 N +$$
$$+ 6{,}334\, M^4 N + 0{,}003\, M^5 N)\,(x - x_0)^6 < 2658{,}5\, MN \frac{M^5 - 1}{M - 1} (x - x_0)^6. \quad (24)$$

Inegalitatea (24) ne dă delimitarea erorii care s-a obţinut prin metoda de lucru folosită, în procedeul de ordinul al cincilea de exactitate al lui Nyström, de integrare numerică a ecuaţiilor diferenţiale de ordinul întîi.

Universitatea „Babeş-Bolyai", Cluj
Catedra de ecuaţii diferenţiale

ОГРАНИЧЕНИЕ ПОГРЕШНОСТИ В ПРИЕМЕ ПЯТОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ НИСТРЁМА ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В настоящем труде автор дает ограничение погрешности в приеме пятого порядка точности Нистрёма, численного интегрирования дифференциального уравнения первого порядка (1) при начальном условии $y(x_0) = y_0$. Для применения вышеуказанного приема употребляются формулы (9) и (10) с обозначениями (11).

С этой целью разлагаются по степеням $x-x_0$, как точное решение $y(x)$, так и приближенное решение $\tilde{y}(x)$ дифференциального уравнения (1), вычисленное при помощи формул (9) и (10).

Имея в виду предположения (4) и (5) получаются следующие ограничения погрешности

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| < 2658{,}5\, MN \frac{M^5-1}{M-1} (x-x_0)^6,$$

где предполагали, что $x-x_0 > 0$.

LA DÉLIMITATION DE L'ERREUR DANS LE PROCÉDÉ DU CINQUIÈME ORDRE D'EXACTITUDE DE NYSTRÖM, D'INTÉGRATION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

RÉSUMÉ

Dans le présent travail, l'auteur donne une délimitation de l'erreur dans le procédé du cinquième ordre d'exactitude de Nyström, d'intégration numérique de l'équation différentielle du premier ordre (1), à la condition initiale $y(x_0) = y_0$. À l'application du procédé considéré, on emploie les formules (9) et (10) avec les notations (11).

A cette fin, on développe suivant les puissances de $x - x_0$, tant l'intégrale exacte $y(x)$ que l'intégrale approximative $\tilde{y}(x)$ de l'équation différentielle (1), calculée à l'aide des formules (9) et (10).

Compte tenus des hypothèses (4) et (5), on obtient la délimitation suivante de l'erreur

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| < 2658{,}5\, MN \frac{M^5-1}{M-1} (x-x_0)^6,$$

où on a supposé que $x - x_0 > 0$.

BIBLIOGRAFIE

1. J. Albrecht, *Beiträge zum Runge-Kutta Verfahren*. Zeitschr. angew. Math. u. Mech., **35**, 100—110 (1955).
2. O. Aramă, *Asupra restului unor formule de integrare numerică de tip Runge-Kutta, a ecuaţiilor diferenţiale*. Stud. şi cercet. de matem. (Cluj), **XI**, *Anexă*, 9—29 (1960).
3. — *Asupra restului unor formule de integrare numerică de tip Runge-Kutta, a ecuaţiilor diferenţiale de ordinul n* (sub tipar).
4. I. S. Bezicovici, *Calcule aproximative*. Bucureşti, Ed. Tehnică, 1952 (trad. din l.rusă).
5. L. Bieberbach, *On the Remainder of the Runge-Kutta Formula in the Theory of Ordinary Differential Equations*. Zeitschr. angew. Math. u. Phys., **2**, 233—248 (1951).
6. L. Collatz, *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen*. Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1951 (trad. în limba rusă, Moscova, 1953, p. 11—12).
7. A. Huta, *Une amélioration de la méthode de Runge-Kutta-Nyström pour la résolution numérique des équations différentielles du premier ordre*. Acta fac. rerum naturalium Univ. Comenianae, **I**, *4—6* (Mathematica), 201—224 (1956).
8. — *Contribution à la formule de sixième ordre dans la méthode de Runge-Kutta-Nyström*. Acta fac. rerum naturalium Univ. Comenianae, **II**, *1—2* (Mathematica), 21—24 (1957).
9. D. V. Ionescu, *O generalizare a unei proprietăţi care intervine în metoda lui Runge-Kutta pentru integrarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale*. Bul. ştiinţ.-Acad. R.P.R., Secţia de ştiinţe matematice şi fizice, **VI**, *2*, 229—241 (1954).
10. — *O generalizare a unei proprietăţi care intervine în metoda lui Runge şi Kutta pentru integrarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale*. Bul. ştiinţ.—Acad. R.P.R., Secţia de ştiinţe matematice şi fizice, **VIII**, *1*, 67—100 (1956).
11. W. Kutta, *Beitrag zur näherungsweisen Integration totaler Differentialgleichungen*. Zeitschr. f. Math. u. Physik, **46**, 435—453 (1901).
12. E. J. Nyström, *Über die numerische Integration von Differentialgleichungen*. Acta Soc. Sci. Fennicae, **L**, *13*, 1—55 (1925).
13. C. Runge, *Über die numerische Auflösung von Differentialgleichungen*. Math. Annalen, **46**, 167—178 (1895).
14. E. Schechter, *Asupra erorii în procedeul de integrare numerică a lui Runge-Kutta*. Stud. şi cercet. de matem. (Cluj), **VIII**, *1—2*, 115—126 (1957).
15. — *Asupra delimitării erorilor în unele procedee de integrare numerică a ecuaţiilor diferenţiale*. Stud. şi cercet. de matem. (Cluj), **IX**, *1—2*, 343—350 (1958).

Primit la 9. X. 1959.