Se obţin pe această cale rezoluţiile standard din teoria algebrelor asociative.

Se pot enumera multe aplicaţii, dar ele fiind cunoscute, nu este locul potrivit.

Primită la redacţie la 15 mai 1967

Facultatea de matematică şi mecanică
a Universităţii din Bucureşti
Str. Academiei Nr. 14

BIBLIOGRAFIE

1. J. Bénabou, *Catégories avec multiplication.* C.R. Acad. Sci. Paris, **256**, 1887–1890 (1963).
2. — *Algèbre élémentaire dans les catégories avec multiplication.* C. R. Acad. Sci. Paris. **258**, 771–779, (1964).
3. P. Huber, *Homotopy Theory in General Categories.* Math. Annalen, November 1961.
4. A. Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique.* Tohoku Mathematical Journal.

OBSERVAŢII ASUPRA REZOLVĂRII SISTEMELOR DE ECUAŢII CU AJUTORUL PROCEDEELOR ITERATIVE[1])

DE

ION PĂVĂLOIU

(Cluj)

În lucrare se dă un criteriu de convergenţă a procedeului iterativ de tip Gauss-Seidel folosit la rezolvarea sistemului de ecuaţii :

$$x = \varphi(x, y)$$
$$y = \psi(x, y).$$

În cadrul aceleaşi probleme se dau apoi evaluările erorilor în cazul calculului exact şi apoi în cazul calculului aproximativ. De asemenea se dă un criteriu de convergenţă pentru cazul cînd sistemul de mai sus conţine un număr k de ecuaţii cu k necunoscute.

INTRODUCERE

Fie dat sistemul de ecuaţii :

$$\begin{aligned} x &= \varphi(x, y) \\ y &= \psi(x, y), \end{aligned} \tag{1}$$

unde despre funcţiile φ şi ψ presupunem că îndeplinesc următoarele condiţii :

a) Funcţiile φ şi ψ sînt definite pe domeniul $\overline{D}$, închis şi transformă acest domeniu în el însuşi.

b) Funcţiile φ şi ψ satisfac condiţiile lui Lipschitz în domeniul $\overline{D}$, adică există constantele nenegative α, β, a şi b astfel ca :

$$|\varphi(x_1, y_1) - \varphi(x_2, y_2)| \leqslant \alpha |x_1 - x_2| + \beta (y_1 - y_2|$$
$$|\psi(x_1, y_1) - \psi(x_2, y_2)| \leqslant a |x_1 - x_2| + b |y_1 - y_2| \text{ pentru orice } (x_i, y_i) \in \overline{D},\ i = 1,2.$$

[1]) Comunicare prezentată la cea de-a doua sesiune ştiinţifică a tineretului din 20–22 mai 1966, Bucureşti.

Pentru rezolvarea sistemului (1) propunem următorul procedeu iterativ. Fie $(x_0, y_0) \in \overline{D}$ un punct oarecare; atunci considerăm următoarele două şiruri :

$$
(2) \qquad \begin{aligned} x_i &= \varphi\,(x_{i-1}, y_{i-1}) \\ y_i &= \psi\,(x_i, y_{i-1}),\ i = 1, 2, 3, \ldots, \end{aligned}
$$

În legătură cu şirurile (2) este bine cunoscut următorul rezultat [1] :

TEOREMA 1. *Dacă funcţiile* φ *şi* ψ *satisfac condiţiile a) şi b) cu următoarele restricţii* $\alpha + \beta < 1$, $a + b < 1$ *sau* $a + \alpha < 1$, $b + \beta < 1$, *atunci şirurile (2) sînt convergente către limitele* $\overline{x}$ *şi* $\overline{y}$ *astfel că punctul* $M\,(\overline{x}, \overline{y})$ *constituie o soluţie pentru sistemul (1), şi această soluţie este unică.*

Deoarece teorema 1 ne oferă condiţii suficiente dar nu şi necesare pentru convergenţa şirurilor (2), există multe cazuri în care constantele α, β, a şi b nu satisfac condiţiile teoremei 1 şi totuşi şirurile (2) converg. În această Notă ne propunem să dăm condiţii asupra constantelor α, β, a şi b diferite de cele prezentate în teorema 1 care cuprind pe acestea şi în plus în condiţiile date de noi vor intra şi alte cazuri pentru care sistemul (1) admite soluţie unică şi soluţia se calculează cu ajutorul şirurilor (2).

§ 1. PROPOZIŢII AJUTĂTOARE

Fie date două şiruri de numere nenegative :

$$
(1.1) \qquad \begin{aligned} G &= \{g_0, g_1, \ldots, g_n, \ldots\} \\ f &= \{f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots\}. \end{aligned}
$$

Presupunem că elementele celor două şiruri de mai sus sînt legate prin următoarele inegalităţi :

$$
(1.2) \qquad \begin{aligned} f_n &\leqslant \alpha' f_{n-1} + \beta' g_{n-1} \\ g_n &\leqslant a' f_n + b' g_{n-1},\ n = 1, 2, \ldots, \end{aligned}
$$

unde α', β' şi a', b' sînt numere reale nenegative. Sistemului de inegalităţi recurente (1.2) îi ataşăm următorul sistem de ecuaţii algebrice în necunoscutele k şi h :

$$
(1.3) \qquad \begin{aligned} \alpha' + \beta' h &= kh, \\ a'k + b' &= kh. \end{aligned}
$$

LEMA 1. *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca sistemul (1.3) să admită o soluţie* (h_1, k_1), $h_1 \geqslant 0$, $k_1 \geqslant 0$, *pentru care*

$$
(1.4) \qquad 0 \leqslant h_1 k_1 \leqslant q < 1
$$

este ca constantele α', β', a' *şi* b' *să satisfacă următoarele inegalităţi :*

$$
(1.5) \qquad \begin{aligned} \alpha' + b' + a'\beta' &< 2 \\ (1 - \alpha')(1 - b') &> a'\beta'. \end{aligned}
$$

Demonstraţie. Necesitatea. Din sistemul (1.3) deducem următoarea ecuaţie în h :

$$
(1.6) \qquad \beta' h^2 - (b' + \beta' a' - \alpha')\,h - \alpha' a' = 0.
$$

Dacă la sistemul (1.3) adăugăm relaţia :

$$
(1.7) \qquad p = k \cdot h
$$

şi eliminăm din cele trei egalităţi obţinute pe k şi h şi ţinem cont de ecuaţia (1.6), obţinem următoarea ecuaţie în p :

$$
(1.8) \qquad F\,(p) = p^2 - (b' + \beta' a' + \alpha')\,p + b'\alpha' = 0.
$$

Tot din sistemul (1.3) mai deducem următoarea ecuaţie în k :

$$
(1.9) \qquad a'k^2 - (\alpha' + \beta' a' - b')\,k - \beta' b' = 0.
$$

Se observă că ecuaţiile (1.6) şi (1.9) admit rădăcini reale şi deoarece termenii liberi de la ambele ecuaţii sînt negativi, rezultă că ambele ecuaţii admit respectiv rădăcini de semne contrare.

Fie (h_1, h_2) rădăcinile ecuaţiei (1.6) şi (k_1, k_2) rădăcinile ecuaţiei (1.9) ; atunci rădăcinile ecuaţiei (1.8) vor fi $p_1 = k_1 h_1$ şi $p_2 = k_2 h_2$ şi aceste rădăcini sînt totdeauna reale. Dacă (k_1, h_1) este perechea de rădăcini pozitive a ecuaţiilor (1.6) şi (1.9), atunci evident că $p_1 > p_2$ şi $p_2 \geqslant 0$. Presupunem că $p_1 < 1$. Dar pentru ca această inegalitate să fie satisfăcută, este necesar ca $F(1) > 0$ şi $\frac{p_1 + p_2}{2} < 1$ ceea ce conduce la inegalităţile (1.5).

Suficienţa. Dacă inegalităţile (1.5) sînt îndeplinite, rezultă că :

$$
F\,(0) = b'\alpha' \geqslant 0
$$

$$
F\,(1) = (1 - \alpha')\,(1 - b') - a'\,\beta' > 0
$$

şi

$$
\frac{p_1 + p_2}{2} = \frac{(\alpha' + b' + a'\beta')}{2} < 1
$$

de unde rezultă că $p_1 < 1$, ceea ce trebuia demonstrat.

LEMA 2. *Dacă* α', β', a' *şi* b' *satisfac inegalităţile (1.5) iar elementele şirurilor (1.1) satisfac inegalităţile (1.2), atunci există o constantă nenegativă* c_1 *pentru care*

$$
(1.10) \qquad \begin{aligned} f_n &\leqslant c_1\, h_1^{n-1}\, k_1^{n-1} \\ g_n &\leqslant c_1\, h_1^{n}\, k_1^{n-1} \end{aligned}
$$

şi în plus seriile $\sum\limits_{i=0}^{\infty} f_i$ *şi* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} g_i$ *sînt convergente.*

Demonstraţie. Fie (h_1, k_1) o soluţie a sistemului (1.3) pentru care sînt satisfăcute condiţiile lemei de mai sus. Presupunem că pentru $n = 1$ avem :

$$
(1.11) \qquad \begin{aligned} f_1 &\leqslant c_1 \\ g_1 &\leqslant c_1\, h_1 \end{aligned}
$$

se observă fără nici un fel de dificultate că pentru ca aceste inegalități să fie satisfăcute este suficient să alegem pe c_1 astfel ca :

$$c_1 \geqslant \max\left\{\alpha' f_0 + \beta' g_0, \frac{a' f_1 + b' g_0}{h_1}\right\}. \tag{1.12}$$

Dar dacă inegalitățile (1.11) sînt satisfăcute cu c_1 astfel ales, atunci vom presupune prin inducție că :

$$f_{n-1} \leqslant c_1 h_1^{n-2} k_1^{n-2}$$

$$g_{n-1} \leqslant c_1 h_1^{n-1} k_1^{n-2}.$$

Dar bazîndu-ne pe faptul că sistemul (1.3) este verificat de soluțiile h_1 și k_1 din (1.2) avem :

$$f_n \leqslant c_1 h_1^{n-2} k_1^{n-2} (\alpha' + \beta' h_1) = c_1 h_1^{n-1} k_1^{n-1}$$

și

$$g_n \leqslant c_1 h_1^{n-1} k_1^{n-2} (a' k_1 + b') = c_1 h_1^{n} k_1^{n-1}.$$

Conform principiului inducției, prima parte a lemei 1 este demonstrată. Cea de a doua parte nu mai necesită nici un fel de demonstrație, deoarece termenii celor două serii sînt majorați de termenii a două serii geometrice cu rația subunitară.

CONSECINȚA 1. Dacă $\alpha' + \beta' < 1$ și $a' + b' < 1$ sau $\alpha' + a' < 1$ și $\beta' + b' < 1$, inegalitățile (1.5) sînt satisfăcute.

LEMA 3. *Dacă elementele șirurilor (1.1) satisfac următoarele inegalități :*

$$\begin{aligned} f_n &\leqslant \alpha' f_{n-1} + \beta' g_{n-1} + \delta \\ g_n &\leqslant a' f_n + b' g_{n-1} + \delta, \end{aligned} \tag{1.13}$$

unde δ este o constantă pozitivă și dacă α', β', a' și b' satisfac inegalitățile (1.5), atunci există o constantă pozitivă c_1 pentru care :

$$\begin{aligned} f_n &\leqslant c_1 h_1^{n-1} k_1^{n-1} + \frac{\delta}{1 - h_1 k_1} \\ g_n &\leqslant c_1 h_1^{n} k_1^{n-1} + \frac{\delta h_1}{1 - h_1 k_1}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Demonstrația acestei leme este analoagă cu demonstrația lemei 1 și de aceea aici nu ne vom ocupa de ea.

§ 2. TEOREMA DE EXISTENȚĂ ȘI UNICITATE A SOLUȚIEI

TEOREMA 2. *Dacă funcțiile φ și ψ satisfac condițiile a) și b) și în plus constantele α, β, a și b sînt astfel ca inegalitățile :*

$$\begin{aligned} a + b + a\beta &< 2 \\ (1 - \alpha)(1 - b) &> a\beta \end{aligned} \tag{2.1}$$

să fie satisfăcute, atunci sistemul (1) admite o soluție unică în domeniul $\overline{D}$, dată de limitele șirurilor (2).

Demonstrație. Vom arăta mai întîi că șirurile (2) sînt convergente. Se observă că sumele parțiale ale următoarelor două serii

$$\begin{aligned} &(X) \qquad x_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - x_{i-1}) \\ &(Y) \qquad y_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (y_i - y_{i-1}) \end{aligned} \tag{2.2}$$

coincid cu termenii șirurilor (2). Dar dacă notăm $f_{n-1} = |x_n - x_{n-1}|$ și $g_{n-1} = |y_n - y_{n-1}|$, atunci ținînd cont de condiția b) și de termenii șirurilor (2) găsim următoarele inegalități :

$$f_n \leqslant \alpha f_{n-1} + \beta g_{n-1}$$

$$g_n \leqslant a f_n + b g_{n-1}$$

acum folosindu-ne de lema 2, rezultă că seriile (2.2) sînt absolut convergente și deci convergente. Dar așa cum am observat mai înainte, rezultă că există două numere $\overline{x}$ și $\overline{y}$, pentru care avem :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x} \quad \text{și} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \overline{y}.$$

Dacă ținem acum cont că funcțiile φ și ψ satisfac condiția b), rezultă că ele sînt continue pe domeniul $\overline{D}$ și deci trecînd la limită în egalitățile :

$$x_{n+1} = \varphi(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = \psi(x_{n+1} y_n)$$

obținem :

$$\overline{x} = \varphi(\overline{x}, \overline{y})$$

și

$$\overline{y} = \psi(\overline{x}, \overline{y})$$

de unde rezultă că $\overline{x}$ și $\overline{y}$ verifică sistemul (1). Să arătăm acum că soluția obținută este unica soluție a sistemului (1) în domeniul $\overline{D}$. Presupunem că pe lîngă soluția $(\overline{x}, \overline{y})$ sistemul mai admite și o altă soluție $(\overline{x}_1, \overline{y}_1)$ diferită de prima. Vom arăta mai întîi că dacă $(\overline{x}, \overline{y})$ este o soluție a sistemului (1) și $(\overline{x}_0, \overline{y}_0)$ este un punct oarecare din domeniul $\overline{D}$, atunci există două șiruri

$$x_1 = \varphi(x_0, y_0), \ldots, x_n = \varphi(x_{n-1}, y_{n-1}), \ldots$$

$$y_1 = \varphi(x_1, y_0), \ldots, y_n = \varphi(x_n, y_{n-1}), \ldots$$

pentru care

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} |\overline{x} - x_n| = 0 \\ &\lim_{n\to\infty} |\overline{y} - y_n| = 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Într-adevăr, din faptul că soluția $(\bar{x}, \bar{y})$ verifică sistemul (1) și dacă ținem cont de condiția b) rezultă următoarele inegalități :

$$|\bar{x} - x_n| \leqslant \alpha |\bar{x} - x_{n-1}| + \beta |\bar{y} - y_{n-1}|$$

$$|\bar{y} - y_n| \leqslant a |\bar{x} - x_n| + b |\bar{y} - y_{n-1}|,$$

din care dacă ținem cont de lema 1 rezultă că au loc egalitățile (2.3). Dacă (x_0, y_0) și (x_0', y_0') sînt două puncte distincte din domeniul $\overline{D}$ și

$$x_n = \varphi(x_{n-1}, y_{n-1}) \qquad x_n' = \varphi(x_{n-1}', y_{n-1}')$$

$$y_n = \psi(x_n, y_{n-1}),\ n=1,2,\ldots, \qquad y_n' = \psi(x_n', y_{n-1}'),\ n=1,2,\ldots$$

sînt șirurile care le corespund lor, atunci vom arăta că :

$$(2.4)\qquad \begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} |x_n - x_n'| = 0 \\ &\lim_{n\to\infty} |y_n - y_n'| = 0. \end{aligned}$$

Într-adevăr, avem :

$$|x_n - y_n'| \leqslant \alpha |x_{n-1} - x_{n-1}'| + \beta |y_{n-1} - y_{n-1}'|$$

$$|y_n - y_n'| \leqslant a |x_n - x_n'| + b |y_{n-1} - y_{n-1}'|.$$

Atunci din lema 1 rezultă egalitățile (2.4). Dar din cele demonstrate mai sus rezultă că dacă $\{x_n\}$ și $\{y_n\}$ sînt două șiruri pentru care :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \bar{y}$$

și $\{x_n'\}$, $\{y_n'\}$ sînt două șiruri pentru care :

$$\lim x_n' = \bar{x}_1,$$

$$\lim y_1' = \bar{y}_1,$$

atunci avem :

$$|\bar{x} - \bar{x}_1| \leqslant |\bar{x} - x_n| + |x_n - x_n'| + |x_n' - \bar{x}_1|$$

$$|\bar{y} - \bar{y}_1| \leqslant |\bar{y} - y_n| + |y_n - y_n'| + |y_n' - \bar{y}_1|.$$

Aceste inegalități sînt adevărate pentru orice n. Atunci trecînd la limită pentru $n \to \infty$ și ținînd seamă de observațiile de mai sus avem :

$$\bar{x} = \bar{x}_1 \text{ și } \bar{y} = \bar{y}_1$$

și deci sistemul are soluție unică.

Consecința 2. Din consecința lemei 2 rezultă nemijlocit că condițiile cuprinse în teorema 1 sînt cuprinse și în teorema 2, dar în teorema 2 sînt cuprinse și alte cazuri pentru care teorema 1 nu ne poate spune nimic. Acest lucru îl vom ilustra prin următorul exemplu :

Exemplul 1. Fie dat sistemul liniar :

$$x = 0{,}1\, x + 8y - 0{,}6$$

$$y = 0{,}05\, x + 0{,}45\, y - 0{,}5.$$

Despre acest sistem teorema 1 nu ne poate spune nimic, în schimb dacă aplicăm teorema 2 obținem sistemul

$$0{,}1 + 8h = hk$$

$$0{,}05\, k + 0{,}45 = hk$$

care după cum se observă satisface condițiile (1.5). De aici putem trage concluzia că procedeul (2) aplicat sistemului de mai sus converge către soluția acestui sistem. Plecînd de la $x_0 = 0$ și $y_0 = 0$ în aproximativ 150 de iterații se obține pentru acest sistem următoarea soluție aproximativă : $x = -45{,}578936$, $y = -5{,}052631$.

§ 3. EVALUAREA ERORILOR ÎN CAZUL CALCULULUI EXACT

Pentru a evalua erorile presupunem în acest caz că avem posibilitatea să obținem valorile exacte ale funcțiilor φ și ψ pe orice punct din domeniul $\overline{D}$. Considerăm

$$|x_{n+p} - x_n| \leqslant |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + \ldots + |x_{n+1} - x_n| \leqslant$$

$$\leqslant c_1 (h_1^{n+p-2} k_1^{n+p-2} + \ldots + h_1^{n-1} k_1^{n-1}),$$

de unde, trecînd la limită pentru $p \to \infty$, obținem :

$$(3.1)\qquad |\bar{x} - x_n| \leqslant c_1 \frac{h_1^{n-1} k_1^{n-1}}{1 - h_1 k_1}.$$

Analog obținem pentru cea de a doua soluție următoarea evaluare :

$$(3.2)\qquad |\bar{y} - y_n| \leqslant \frac{c_1 h_1^n k_1^{n-1}}{1 - h_1 k_1}.$$

§ 4. EVALUAREA ERORILOR ÎN CAZUL CALCULULUI APROXIMATIV

Aici vom considera că nu avem posibilitatea să calculăm valorile exacte ale funcțiilor φ și ψ pe punctele domeniului $\overline{D}$, dar în schimb avem posibilitatea să calculăm valorile exacte a două funcții φ_1 și ψ_1 care sînt definite tot pe domeniul $\overline{D}$ și acest domeniu este transformat de funcțiile φ_1 și ψ_1 în el însuși. Presupunem de asemenea că este dat un număr pozitiv δ pentru care avem :

$$(4.1)\qquad \begin{aligned} &|\varphi(x, y) - \varphi_1(x, y)| \leqslant \delta \\ &|\psi(x, y) - \psi_1(x, y)| \leqslant \delta \text{ pentru orice } (x, y) \in D. \end{aligned}$$

În locul sistemului (1) vom considera acum sistemul aproximativ :

$$(4.2)\qquad \begin{aligned} x^* &= \varphi_1(x^*, y^*) \\ y^* &= \psi_1(x^*, y^*). \end{aligned}$$

În general despre funcțiile φ_1 și ψ_1 nu am presupus decît că ele satisfac condițiile (4.1) și nu putem ști dacă procedeul de tip Gauss-Seidel aplicat acestui sistem converge. De asemenea dacă ne propunem ca acest procedeu să fie oprit la acel pas pentru care sînt îndeplinite simultan inegalitățile :

$$(4.3)\qquad \begin{aligned} &| x^*_{n+1} - x^*_n | \leqslant \varepsilon \\ &| y^*_{n+1} - y^*_n | \leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

nu putem ști că, alegînd pe ε arbitrar, la un anumit pas inegalitățile (4.3) sînt satisfăcute. De aceea, în cele ce urmează vom da un criteriu după care trebuie ales ε astfel ca inegalitățile (4.3) să fie satisfăcute. Într-adevăr, considerăm procedeul iterativ aproximativ :

$$\begin{aligned} x^*_{n+1} &= \varphi_1 (x^*_n, y^*_n) \\ y^*_{n+1} &= \psi_1 (x^*_{n+1}, y^*_n). \end{aligned}$$

Avem

$$| x^*_{n+1} - x^*_n | \leqslant \alpha \, | x^*_n - x^*_{n-1} | + \beta \, | y^*_n - y^*_{n-1} | + 2\delta$$

și

$$| y^*_{n+1} - y^*_n | \leqslant a \, | x^*_{n+1} - x^*_n | + b \, | y^*_n - y^*_{n-1} | + 2\delta.$$

Dacă ținem cont de concluziile lemei 3 avem :

$$(4.4)\qquad \begin{aligned} &| x^*_{n+1} - x^*_n | \leqslant c_1 h_1^{n-1} k_1^{n-1} + \frac{2\delta}{1 - h_1 k_1} \\ &| y^*_{n+1} - y^*_n | \leqslant c_1 h_1^n k_1^{n-1} + \frac{2\delta h_1}{1 - h_1 k_1}, \end{aligned}$$

de unde rezultă că dacă alegem pe ε astfel ca :

$$(4.5)\qquad \varepsilon > \max \left\{ \frac{2\delta}{1 - h_1 k_1}, \frac{2\delta h_1}{1 - h_1 k_1} \right\},$$

la un anumit pas n' inegalitățile (4.3) vor fi satisfăcute în mod necesar. Fie acum ε ales ca în (4.5) ; atunci există un număr n' pentru care :

$$(4.6)\qquad \begin{aligned} &| x^*_{n'+1} - x^*_{n'} | \leqslant \varepsilon \\ &| y^*_{n'+1} - y^*_{n'} | \leqslant \varepsilon ; \end{aligned}$$

avem

$$| \overline{x} - x^*_{n'+1} | \leqslant \alpha \, | \overline{x} - x^*_{n'} | + \beta \, | y - y^*_n | + \delta.$$

Dacă ținem cont acum de faptul că, pentru ca sistemul (1.3) să admită o soluție (h_1, k_1) pentru care :

$$0 \leqslant h_1 k_1 \leqslant q < 1,$$

este necesar ca $\alpha < 1$ și $b < 1$. Atunci avem :

$$(4.7)\qquad | \overline{x} - x^*_{n'+1} | \leqslant \frac{\alpha\varepsilon + \delta + \beta \, | \overline{y} - y^*_{n'} |}{1 - \alpha}.$$

Analog găsim pentru $| \overline{y} - y^*_{n'+1} |$ următoarea evaluare :

$$(4.8)\qquad | \overline{y} - y^*_{n'+1} | \leqslant \frac{b\varepsilon + \delta + a \, | \overline{x} - x^*_{n'+1} |}{1 - b}.$$

Din (4.7) și (4.8) obținem

$$(4.9)\qquad \begin{aligned} &| \overline{x} - x^*_{n'+1} | \leqslant \frac{(\alpha + \beta)\,\varepsilon + \delta}{1 - \alpha} + \frac{\beta}{1 - \alpha} \, | \overline{y} - y^*_{n'+1} | \\ &| \overline{y} - y^*_{n'+1} | \leqslant \frac{b\varepsilon + \delta}{1 - b} + \frac{a}{1 - b} \, | \overline{x} - x^*_{n'+1} | . \end{aligned}$$

Din acest sistem de inegalități, ținînd cont de inegalitățile (1.5), deducem :

$$(4.10)\qquad \begin{aligned} &| \overline{x} - x^*_{n'+1} | \leqslant \frac{(1 - b)\,[(\alpha + \beta)\,\varepsilon + \delta] + \beta\,(b\varepsilon + \delta)}{(1 - \alpha)(1 - b) - \beta a} \\ &| \overline{y} - y^*_{n'+1} | \leqslant \frac{(1 - \alpha)[b\varepsilon + \delta] + a[(\alpha + \beta)\,\varepsilon + \delta]}{(1 - \alpha)(1 - b) - \beta a}. \end{aligned}$$

§ 5. GENERALIZARE

Considerăm acum un sistem de k ecuații cu k necunoscute de forma :

$$(5.1)\qquad x_i = \varphi_i (x_1, x_2, \ldots, x_k), \qquad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Asupra funcțiilor φ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, facem ipoteze analoage ca și pentru funcțiile sistemului (1).

a') Funcțiile φ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, transformă domeniul $\overline{D}$ din spațiul E_k în el însuși.

b') Există o matrice de constante nenegative $\beta = (\beta_i^j)$, $i, j = 1, 2, \ldots, k$, pentru care sînt îndeplinite inegalitățile :

$$| \varphi_i (x_1, x_2, \ldots, x_k) - \varphi_i (x'_1, x'_2, \ldots, x'_k) | \leqslant \sum_{j=1}^{k} \beta_i^j \, | x_j - x'_j |$$

$$i = 1, 2, \ldots, k$$

pentru orice $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ și $x'_1, x'_2, \ldots, x'_k$ două puncte din domeniul $\overline{D}$.

Avem următoarea teoremă :

Teorema 3. *Dacă funcțiile* φ_i, $i = 1, 2 \ldots, k$, *satisfac condițiile a') și b') și elementele matricei* β *sînt în așa fel ca sistemul*

$$\beta_1^1 + \beta_2^1 h_1 + \ldots + \beta_k^1 h_1 h_2 \ldots h_{k-1} = h_1 h_2 \ldots h_k$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\beta_1^i h_i h_{i+1} \ldots h_k + \beta_2^i h_1 h_i \ldots h_k + \ldots + \beta_i^i + \beta_{i+1}^i h_i + \\ + \ldots + \beta_k^i h_i h_{i+1} \ldots h_{k-1} = h_1 h_2 \ldots h_k$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\beta_1^k h_k + \beta_2^k h_1 h_k + \ldots + \beta_{k-1}^k h_1 h_2 \ldots h_{k-2} h_k + \beta_k^k = h_1 h_2 \ldots h_k$$

să fie compatibil și să posede o soluție $(h_1^0, h_2^0, \ldots, h_k^0)$ $h_i \geqslant 0$ $i=1, 2, \ldots, k$ *pentru care*

$$0 \leqslant h_1^0 h_2^0 \ldots h_k^0 \leqslant q < 1,$$

atunci sistemul (5.1) are o soluție unică în domeniul $\overline{D}$ *care se poate obține cu ajutorul următorului procedeu iterativ:*

$$x_i^{(n)} = \varphi_i (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_{i-1}^{(n)}, x_i^{n-1}, \ldots, -x_k^{n-1}), \quad i=1,2,\ldots,k;\ n=1,2,3,\ldots,$$

oricare ar fi punctul $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k^0) \in D$.

Demonstrația acestei teoreme se face în mod analog cu demonstrația teoremei 2 și de aceea nu ne vom ocupa de ea.

Primită la redacție la 23 martie 1967

Institutul de calcul al Academiei Republicii Socialiste România — Filiala Cluj

BIBLIOGRAFIE

1. Б. П. Демидович и И. А. Марон, *Основы вычислительной математики.* Гос. изд. физ. мат. лит. Москва, 1960, pp. 148—151.
2. J. F. Traub, *Iterative Methods for the Solution of Equations.* Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1964, pp. 38—39.
3. А. Н. Островский, *Решение уравнений и систем уравнений.* Изд. иностр. лит. Москва, 1963, pp. 83—94.
4. I. Păvăloiu, *Asupra unor inegalități recurente și aplicații ale lor.* Comunicare ținută la Sesiunea Științifică a Institutului de Mine Petroșani din 7—10 februarie 1966.

O CARACTERIZARE A SPAȚIILOR UNIFORME

DE

EUGEN POPA

(Iași)

Se știe [1] că definiția spațiilor uniforme se dă cu ajutorul filtrului de anturaje sau cu o familie de semidistanțe. În Nota de față vom defini o „pseudometrică", care induce o structură topologică echivalentă cu cea de spațiu uniform.

Definiția 1. *Fie* D *o mulțime ordonată, cu cel mai mic element* d_0 *în care s-a definit o aplicație*: $(d_1, d_2) \to d_1 + d_2$ *încît*:

(D1) $d_0 + d = d + d_0 = d$

(D2) $d_1 + d_2 = d_2 + d_1$

(D3) $d_1 \leqslant d_2 \Rightarrow d + d_1 \leqslant d + d_2$, $\forall\, d \in D$

și există o submulțime $D_1 \subseteq D$, *nevidă și dirijată la stînga încît*:

(D4) $\forall\, d \in D_1\ \exists\, d_1 \in D_1$ încît : $d_1 + d_1 \leqslant d$.

Mulțimea X *fiind nevidă, vom numi pseudometrică o aplicație*

$\rho : X \times X \to D$ *dacă*:

(X1) $\rho(x, y) = d_0 \Leftrightarrow x = y$

(X2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$

(X3) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$, $\forall\, z \in X$.

Vom nota cu (X, ρ, D) o mulțime în care s-a definit o pseudometrică. Într-un astfel de spațiu, mulțimea :

$$B(x_0, d) = \{x : \rho(x_0, x) \leqslant d\}, \ \forall\, d \in D_1$$

se numește bulă de centru x_0. Rezultă imediat că $x_0 \in B(x_0, d)$, căci $\rho(x_0, x_0) = d_0 \leqslant d$. De asemenea, pentru orice două bule $B(x_0, d_1)$, $B(x_0, d_2)$ există $d_3 \leqslant d_1$, $d_3 \leqslant d_2$, mulțimea D_1 fiind dirijată la stînga ; deci $B(x_0, d_3) \subseteq B(x_0, d_1) \cap B(x_0, d_2)$. În sfîrșit, fiind dată bula $B(x_0, d)$,