CONSIDERAȚII ASUPRA METODELOR ITERATIVE OBȚINUTE PRIN INTERPOLARE INVERSĂ

DE

I. PĂVĂLOIU
(Cluj)

1. O EVALUARE A ERORII ÎN CAZUL METODEI COARDEI

În lucrarea [3], § 5, am dat o metodă de generare a procedeului iterativ al coardei, folosind interpolarea inversă. În această lucrare vom da mai întîi o evaluare a erorii prin aplicarea metodei coardei o singură dată pentru care, folosind o metodă adecvată, vom extinde rezultatul din lucrarea [2].

Fie dată ecuația

$$P(x) = \theta, \tag{1}$$

unde P este un operator neliniar definit pe spațiul liniar normat X și cu valori în spațiul liniar normat Y. Notăm cu $\overline{x}$ o soluție a ecuației (1) și cu $D \subseteq X$, un domeniu care conține această soluție. Cu x_1, $x_2 \in D$ vom nota două soluții aproximative ale ecuației (1). Presupunem că:

a) Operatorul P admite diferență divizată de ordinul întîi pe nodurile x_1, x_2.

b) Operatorul $[x, y; P]$ este inversabil, adică există operatorul $[x, y; P]^{-1}$.

c) Există două constante m_1, M_1 astfel ca

$$0 < m_1 \leqq \| [x, y; P]^{-1} \| \leqq M_1 < +\infty, \text{ pentru orice } x, y \in D.$$

d) Pentru diferența divizată de ordinul doi a operatorului P există două constante m_2, M_2 astfel ca

$$0 < m_2 \leqq \| [\overline{x}, x, y; P] \| \leqq M_2 < +\infty, \text{ pentru orice } x, y \in D.$$

e) Diferențele divizate de ordinele unu și doi sînt simetrice (conform definiției 3, [3]).

Ţinînd cont de teorema 1. din [3], putem scrie $\theta = P(\bar{x}) = P(x_1) + [x_1, x_2; P](\bar{x} - x_1) + [\bar{x}, x_1, x_2; P](\bar{x} - x_2)(\bar{x} - x_1)$. Dacă aplicăm acestei identităţi operatorul $[x_1, x_2; P]^{-1}$ obţinem

$$\theta = [x_1, x_2; P]^{-1} P(x_1) + (\bar{x} - x_1) + $$
$$+ [x_1, x_2; P]^{-1} [\bar{x}, x_1, x_2; P]\cdot(\bar{x} - x_2)(\bar{x} - x_1)$$

şi dacă notăm

$$x_3 = x_1 - [x_1, x_2; P]^{-1}\cdot P(x_1)$$

avem

$$\text{1')} \quad \bar{x} - x_3 = -[x_1, x_2, P]^{-1} [\bar{x}, x_1, x_2; P]\cdot(\bar{x} - x_2)\cdot(\bar{x} - x_1)$$

de unde, ţinînd cont de presupunerile anterioare, deducem

$$\text{(2)} \quad m_1\cdot m_2\cdot\|\bar{x} - x_2\|\cdot\|\bar{x} - x_1\| \leq \|\bar{x} - x_3\| \leq$$
$$\leq M_1\cdot M_2\|\bar{x} - x_2\|\cdot\|\bar{x} - x_1\|.$$

Din ultima inegalitate rezultă că dacă x_1 şi x_2 sînt două soluţii aproximative ale ecuaţiei (1), atunci şi x_3 este o soluţie aproximativă a ecuaţiei (1). Din inegalitatea (2) se observă că în general x_3 este o soluţie aproximativă în general mai bună deoarece marginile evaluării conţin produsul $\|\bar{x} - x_1\|\cdot\|\bar{x} - x_2\|$. Dacă pentru această evaluare am fi folosit restul de interpolare inversă generalizată, am fi obţinut, aşa după cum este arătat în lucrarea [2], o evaluare mai puţin exactă.

2. O CLASĂ DE METODE DE TIP STEFFENSEN

Este dovedit [1] că în general metodele obţinute prin interpolare inversă au o rapiditate de convergenţă destul de lentă chiar dacă numărul nodurilor de interpolare creşte. Vom arăta aici că aceste metode sînt interesante însă, dintr-un alt punct de vedere şi anume, cu ajutorul lor se poate genera o clasă de metode iterative cu un singur pas care în schimb au o rapiditate de convergenţă mare.

Pornim de la polinomul de interpolare inversă construit în [2] şi considerăm că operatorul P din ecuaţia (1) are forma

$$\text{(3)} \quad P(x) = x - Q(x)$$

iar spaţiile X, Y sînt unul şi acelaşi spaţiu.

Fie $x_0 \in X$ un element care nu este soluţie pentru ecuaţia (3). Pentru prescurtare introducem notaţiile

$$\text{(4)} \quad x_0^0 = x_0,\ x_1^0 = Q(x_0^0),\ x_2^0 = Q(x_1^0), \dots, x_{n-1}^0 = Q(x_{n-2}^0)$$

Presupunem că operatorul Q admite diferenţe divizate simetrice pe sistemul de noduri generat de (4).

Ţinînd cont de (3) şi de notaţiile făcute mai sus avem

$$P(x_i^0) = x_i^0 - Q(x_i^0) = Q(x_{i-1}^0) - Q(x_i^0) =$$
$$= [x_i^0, x_{i-1}^0; Q]\cdot P(x_{i-1}^0), \quad \text{pentru } i = 1, 2, \dots, n-2.$$

Adică egalitatea

$$P(x_i^0) = [x_i^0, x_{i-1}^0; Q]\cdot P(x_{i-1}^0), \qquad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Aplicînd succesiv această egalitate deducem

$$\text{(5)} \quad P(x_i^0) = [x_i^0, x_{i-1}^0; Q]\,[x_{i-1}^0, x_{i-2}^0; Q]\dots[x_1^0, x_0^0; Q]\cdot P(x_0),$$
$$\text{pentru } i = 1, 2, \dots, n-2.$$

Presupunem că sînt îndeplinite următoarele condiţii:

a) Diferenţele divizate inverse $[y_0^0, y_1^0; x], \dots, [y_0^0, \dots, y_{n-1}^0; x]$, $[\theta, y_0^0, \dots, y_{n-1}^0; x]$ există şi sînt simetrice (conform definiţiei 3, [3]), unde $y_i^0 = P(x_i^0)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

b) Diferenţele divizate $[x_1^0, x_0^0; Q], \dots, [x_{n-1}^0, x_{n-2}^0; Q]$ există şi sînt mărginite de acelaşi număr B în normă.

c) Există un număr M pentru care are loc inegalitatea

$$\|[\theta, y_0^0, \dots, y_{n-1}^0; x]\| \leq M.$$

În ipoteza a) există polinomul generalizat de interpolare inversă, [3].

Să notăm cu x_1 rezultatul înlocuirii în acest polinom a elementelor (4) ca noduri; în acest caz vom avea

$$\text{(6)} \quad x_1 = x_0^0 - [y_0^0, y_1^0; x]\,y_0^0 + \dots + (-1)^{n-1}[y_0^0, \dots, y_{n-1}^0; x]\,y_{n-2}^0 \dots y_0^0$$

Dacă cu x_1 astfel obţinut procedăm la fel ca şi cu x_0 obţinem un element x_2. În general, presupunînd că condiţia a) este îndeplinită şi pentru celelalte elemente succesive, deducem următorul procedeu iterativ

$$\text{(7)} \quad x_{k+1} = x_0^k - [y_0^k, y_1^k; x]\,y_0^k + \dots$$
$$+ (-1)^{n-1}[y_0^k, \dots, y_{n-1}^k; x]\,y_{n-2}^k \dots y_0^k,$$

unde

$$x_0^k = x_k,\quad x_1^k = Q(x_0^k),\quad x_2^k = Q(x_1^k), \dots, x_{n-1}^k = Q(x_{n-2}^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Acest procedeu, pentru $n = 2$, nu este altceva decît binecunoscuta metodă a lui Steffensen. Din aceste motive procedeul (7) va fi numit procedeul generalizat al lui Steffensen.

În continuare vom presupune că ipotezele a), b) şi c) sînt adevărate pentru orice k. Aplicînd formula (14), ([3]) şi ţinînd cont de ipoteza de mai sus deducem următoarea inegalitate:

$$\|\bar{x} - x_{k+1}\| \leq M\|y_{n-1}^k\|\cdot\|y_{n-2}^k\|\ldots\|y_0^k\|, \qquad k = 0, 1, \ldots \tag{8}$$

unde $\bar{x}$ este o soluţie a ecuaţiei (3).

Din ipoteza b) rezultă următoarele inegalităţi

$$\|y_s^k\| \leq B^s\|y_0^k\|, \qquad s = 1, 2, \ldots, n-1; \; k = 0, 1 \ldots$$

Din această ultimă inegalitate şi (8) deducem

$$\|\bar{x} - x_{k+1}\| \leq M\cdot B^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\|y_0^k\|^n, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{9}$$

Dar

$$y_0^k = P(x_0^k) = P(x_k) - P(\bar{x}) = [\bar{x}, x_k; P]\,(x_k - \bar{x})$$

şi dacă pentru orice k are loc inegalitatea

$$\|[\bar{x}, x_k; P]\| \leq N < +\infty,$$

atunci

$$\|y_0^k\| \leq N\cdot\|x_k - \bar{x}\|, \qquad k = 0, 1, \ldots \tag{9'}$$

Din ultima inegalitate şi din (9) avem

$$\|x_{k+1} - \bar{x}\| \leq M\cdot B^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot N^n\cdot\|x_k - \bar{x}\|^n \text{ pentru } k = 0, 1, \ldots \tag{9''}$$

Notînd $H = M\cdot B^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot N^n$ obţinem inegalitatea

$$\|x_{k+1} - \bar{x}\| \leq H\cdot\|x_k - \bar{x}\|^n, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

pe care, dacă o înmulţim cu $H^{\frac{1}{n-1}}$ şi notăm

$$\delta_k = H^{\frac{1}{n-1}}\cdot\|x_k - \bar{x}\|, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

obţinem

$$\delta_{k+1} \leq \delta_k^n.$$

Presupunînd că x_0 se poate alege astfel ca împreună cu H să satisfacă inegalitatea

$$\delta_0 < 1$$

rezultă că

$$\delta_{k+1} \leq \delta_0^{n^k} \tag{10}$$

şi deci

$$\lim_{k\to\infty} \delta_{k+1} = 0$$

De aici se deduce convergenţa procedeului (7). După cum rezultă din inegalitatea (10), acest procedeu are o rapiditate mare de convergenţă şi această rapiditate creşte în raport cu n. De exemplu, pentru $n = 3$ obţinem o metodă care rezultă din analogul metodei lui Cebîşev.

Observaţie. Ţinînd cont de inegalitatea (9′) şi de inegalitatea (9) putem deduce

$$\|P(x_{k+1})\| \leq N\cdot\|x_{k+1} - \bar{x}\| \leq M\cdot B^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot N\cdot\|P(x_k)\|^n$$

la care, dacă adăugăm condiţia

$$(M\cdot B^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot N)^{\frac{1}{n-1}}\cdot\|P(x_0)\| < 1$$

sîntem conduşi la concluzia că procedeul iterativ construit mai sus are ordinul de convergenţă n.

Primită la redacţie la 23 iunie 1970

Academia Republicii Socialiste România
Filiala Cluj.
Institutul de calcul

CONSIDÉRATIONS SUR LES MÉTHODES ITÉRATIVES OBTENUES PAR INTERPOLATION INVERSE

(RÉSUMÉ)

En employant le polynôme généralisé d'interpolation inverse on donne une généralisation de la méthode itérative de résolution des équations opérationnelles de Steffensen. Dans la première partie de l'ouvrage on donne une évaluation des erreurs pour le cas où l'équation opérationnelle $P(x) = 0$ est résolue par la méthode de la corde. Dans la deuxième partie on élabore une méthode générale de type Steffensen pour laquelle on étudie l'ordre de convergence et l'erreur.

BIBLIOGRAFIE

1. Ostrowski, A. M., *Reşenie uravnenii i sistem uravnenii.* Moskva, 1963.
2. Popoviciu, Tiberiu, *Sur la délimitation de l'erreur dans l'approximation des racines d'une équations par interpolation linéaire au quadratique.* Rev. Roum. de math. pures et appl., **XIII**, *1*, (1968), 75–78
3. Păvăloiu, I., *Interpolation dans des espaces lineaires normes et applications.* Mathematica, Cluj (sub tipar).