MATHEMATICA Vol. 12(35), 1970, No. 1, pp. 149–158

INTERPOLATION DANS DES ESPACES LINÉAIRES NORMÉS ET APPLICATIONS*

par I. PĂVĂLOIU à Cluj

1. Dans ce travail nous étendrons le problème de l'interpolation inverse au cas des aopérateurs définis dans des espaces linéaires normés. Pour ce faire, il sera nécessaire de mettre en évidence l'existence d'un polynome généralisé d'interpolation dans des espaces linéaires normés lequel devra être effectivement construit. Le problème d'interpolation que nous traitons au point 3 de ce travail est compris en fait dans un schéma général d'interpolation introduit par E. Moldovan [4]. Dans la construction du polynome généralisé d'interpolation nous nous appuierons sur la notion de différence divisée d'un opérateur que nous introduirons à partir de la définition donnée par A. Sergeev [9] pour les différences divisées du premier ordre. Nous établirons de la sorte la forme du polynome généralisé d'interpolation inverse, que nous utiliserons à la construction, en suivant cette voie, de certaines méthodes itératives pour la résolution des équations opérationnelles.

2. Différences divisées généralisées. Pour faciliter la manière de s'exprimer on désignera par $X^n = X \times X \times \cdots \times X$ le produit cartésien de l'espace X avec lui-même n fois. On désignera aussi par $\left(X^{(1)} \to Y\right)$ l'espace des opérateurs linéaires normé définis sur l'espace linéaire normé X et à valeurs dans l'espace linéaire Y. On désignera d'une manière analogue par $\left(X^{(n)} \to Y\right) = (X \to (X \ldots (X \to Y) \ldots))$ l'espace des opérateurs n-linéaires définis sur X^n et à valeurs dans Y.

* Ce travail a été communiqué au 4-ème congrès des mathématiciens d'expression latine, Bucarest-Braşov, 17-24 septembre 1969.

Les différences divisées généralisées seront définies en considérant l'opérateur

$$y = P\,(x)$$

où P est défini sur l'espace X et à valeurs dans l'espace Y.

On considérera aussi un système de n éléments distincts de l'espace $X,\ x_1,\ x_2,\dots,x_n$ que l'on nommera des noeuds.

Définition 1. *S'il existe un opérateur $[x,y;P]$ défini sur l'espace X^2 et à valeurs dans l'espace $\left(X^{(1)}\to Y\right)$ qui pour $x=x_i$ et $y=x_{i+1}$ satisfait à la propriété:*

$$P\,(x_{i+1}) - P\,(x_i) = [x_i, x_{i+1}; P]\,(x_{i+1}-x_i)$$

alors l'élément $[x_i,x_{i+1};P]\in\left(X^{(1)}\to Y\right)$ est nommé différence divisée de l'ordre 1 de l'opérateur P sur les noeuds $x_i,\ x_{i+1}$

Par rapport au système de noeuds $x_i,\ i=1,2,\dots n$ et à l'opérateur P on construit ainsi les différences divisées suivantes:

$$[x_1,x_2;P]\,,[x_2,x_3;P]\,,\dots,[x_{n-1},x_n;P]\,.$$

On suppose par la suite que l'on a défini un opérateur $[x,y,\dots,u;P]$ sur l'espace X^{i+1} et à valeurs dans l'espace $\left(X^{(i)}\to Y\right)$ à l'aide duquel on obtient des différences divisées de l'ordre i. Si les différences divisées de l'ordre i sont définies alors les différences divisées de l'ordre $i+1$ seront définies de la manière suivante:

Définition 2. *S'il existe un opérateur $[x,y,\dots,u,v;P]$ défini sur l'espace X^{i+2} et à valeurs dans l'espace $\left(X^{(i+1)}\to Y\right)$ qui avec les différences divisées de l'ordre i de l'opérateur P satisfait à la propriété:*

$$\begin{aligned}&[x_{k+1},x_{k+2},\dots,x_{k+i+1};P]-[x_k,x_{k+1},\dots,x_{k+i};P]=\\&=[x_k,x_{k+1},\dots,x_{k+i+1};P]\,(x_{k+i+1}-x_k)\end{aligned}$$

alors l'élément $[x_k,x_{k+1},\dots,x_{k+i+1};P]\in\left(X^{(i+1)}\to Y\right)$ sera dit différence divisée de l'ordre $i+1$ de l'opérateur P sur les noeuds $x_k,x_{k+1},\dots,$ x_{k+i+1}.

Si on donne successivement à k les valeurs $k=1,2,\dots,n-i-2$, $n-i-1$ on obtient les différences divisées de l'ordre $i+1$ suivantes;

$$[x_1,x_2,\dots,x_{k+2};P]\,,\dots,[x_{n-i-1},x_{n-i},\dots,x_n;P]\,.$$

Définition 3. *La différence divisée* $[u_1, u_2, \ldots, u_k; P]$ *où* $u_1, u_2, \ldots, u_k$ *sont des éléments de l'espace* X, *est appelée symétrique si on a l'égalité:*

$$[u_1, u_2, \ldots, u_k; P] = [u_{s_1}, u_{s_2}, \ldots, u_{s_k}; P]$$

où $(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ *est une permutation quelconque des nombres* $1, 2, \ldots, k$.

3. Polynomes généralisés d'interpolation. A côté du système de noeuds distincts $x_i \in X, \ i = 1, 2 \ldots, n$ on considère un autre système d'éléments $y_i \in Y, \ i = 1, 2, \ldots, n$. On y cherchera un polynome généralisé défini sur l'espace X de la forme

$$P(x) = u_0 + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (x - x_k) \ldots (x - x_1)^{*)} \tag{1}$$

qui satisfasse à la condition:

$$P(x_i) = y_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Concernant ce problème on démontre le résultat suivant:

Théorème 1. *Si l'opérateur* F *défini sur l'espace* X *et à valeurs dans l'espace* Y *admet des différences divisées symétriques (conformément à la définition* 3*), jusqu'à l'ordre* n *y compris, alors il existe au moins un polynome de la forme* (1) *qui satisfait aux conditions:*

$$P(x_i) = y_i = F(x_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{2}$$

Démonstration. On va montrer d'abord que pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$ et pour tout $x \neq x_i$ on a les identités:

$$\begin{aligned} F(x) = & F(x_1) + [x_1, x_2; F](x - x_1) + \ldots \\ & + [x_1, x_2, \ldots, x_i; F](x - x_{i-1}) \ldots (x - x_1) \\ & + [x, x_1, \ldots, x_i; F](x - x_i) \ldots (x - x_1). \end{aligned} \tag{3}$$

Pour $i = 1$ cette identité est évidente. On suppose que cette identité est vraie pour $i = k, \ (k \geq 1)$ et on démontre qu'elle est vraie pour $i = k+1$. En effet, pour $i = k$ on a

$$\begin{aligned} F(x) = & F(x_1) + [x_1, x_2, ; F](x - x_1) + \ldots \\ & + [x_1, x_2, \ldots, x_k; F](x - x_{k-1}) \ldots (x - x_1) \\ & + [x, x_1, \ldots, x_k; F](x - x_k) \ldots (x - x_1). \end{aligned} \tag{4}$$

0*) Dans la formule (1) $A_k (x - x_k) \ldots (x - x_1)$ appartiennent à l'espace $Y \ (k = 1, 2, \ldots, n-1)$ et A_k sont des opérateurs k-linéaires, $u_0 \in Y$.

De la définition de la différence divisée, résulte l'égalité suivante:

$$[x, x_1, \dots x_k; F] - [x_1, x_2, \dots, x_{k+1}; F] = [x, x_1, \dots, x_{k+1}; F]\,(x - x_{k+1})$$

qui substituée dans (4) va donner justement l'identité (3) pour $i = k+1$.

Il en résulte que pour tout le système de noeuds considérés a lieu l'identité

$$\begin{aligned} F\,(x) =& F\,(x_1) + [x_1, x_2; F]\,(x - x_1) + \dots \\ & + [x_1, x_2, \dots, x_n; F]\,(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1) \\ & + [x, x_1, \dots, x_n; F]\,(x - x_n) \dots (x - x_1)\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Tenant compte du fait que les différences divisées sont des opérateurs multilinéaires il résulte que l'expression:

$$\begin{aligned} P_n\,(x) =& F\,(x_1) + [x_1, x_2; F]\,(x - x_1) + \dots + \\ & + [x_1, x_2, \dots, x_n; F]\,(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1) \end{aligned} \tag{6}$$

est un polynome généralisé de la forme (1).

Montrons que ce polynome satisfait aux propriétés (2). À cet effet nous partirons de l'égalité suivante

$$\begin{aligned} P_n\,(x_i) =& F\,(x_1) + [x_1, x_2; F]\,(x_i - x_1) + \dots + \\ & + [x_1, x_2, \dots, x_i; F]\,(x_i - x_{i-1}) \dots (x_i - x_1) \end{aligned} \tag{7}$$

pour $i = 1, 2, \dots, n$. Cette égalité résulte du fait que les différences divisées sont des opérateurs multilinéaires et les termes qui vont suivre dans la somme antérieure sont nuls, par ce qu'ils contiennent comme facteurs $x_i - x_i = \theta$. Si on part maintenant du dernier terme de la somme (6) et si l'on tient compte du fait que l'élément $[x_1, x_2, \dots, x_i; F]\,(x_i - x_{i-1})$ du fait que la différence divisée $[x_1, x_2, \dots, x_i; F]$ est symétrique peut être ecrit aussi sous la forme $[x_{i-1}, x_1, \dots, x_{i-2}, x_i; F]\,(x_i - x_{i-1})$, alors on a l'égalité

$$\begin{aligned} & [x_1, x_2, \dots, x_i; F]\,(x_i - x_{i-1}) = \\ & = [x_1, x_2, \dots, x_{i-2}, x_i; F] - [x_{i-1}, x_1, \dots, x_{i-2}; F] \\ & = [x_1, x_2, \dots, x_{i-2}, x_i; F] - [x_1, x_2, \dots, x_{i-1}; F]\,. \end{aligned}$$

Substituant cette expression en (7) on obtient:

$$\begin{aligned} P\,(x_i) =& F\,(x_1) + [x_1, x_2; F]\,(x_i - x_1) + \dots + \\ & + [x_1, x_2, \dots, x_{i-2}, x_i; F]\,(x_i - x_{i-2}) \dots (x_i - x_1)\,. \end{aligned}$$

Avec l'égalité obtenue on procède de la même manière et à la fin on obtient le résultat désiré. □

En ce qui concerne l'unicité du polynome généralisé d'interpolation on se bornera à dire qu'il existe de nombreux examples des quels il résulte qu'il n'existe pas pour tout système de noeuds et pour tout opérateur, un polynome d'interpolation unique.

L'expression $R(x) = [x, x_1, x_2, \ldots, x_n; F](x - x_n) \ldots (x - x_1)$ qui figure dans l'égalité (5) sera nommée le reste du polynome d'interpolation généralisé.

4. Polynomes d'interpolation inverse généralisés. Le problème de l'interpolation inverse, dans le cas des fonctions d'une variable réelle a été posé à propos de la résolution numérique des équations algébriques et transcendentes.

Dans le travaile [5] l'auteur utilise cette méthode à la résolution numérique des équations à l'aide des procédés itératifs à plusieurs pas. Les erreurs évaluées à son aide, ne sont pas toujours les meilleures, ainsi qu'il a été montré dans le travail [6]. Cela ne nous empêche pas d'utiliser cette méthode pour trouver des procédés itératifs à plusieurs pas qui puissent être appliqués ensuite à la résolution des équations opérationnelles. De ce point de vue, la méthode paraît être assez générale. Par la suite on va essayer de généraliser le problème de l'interpolation inverse pour le cas des opérateurs dans des espaces linéaires normés.

Soit $y_i = F(x_i)\,,\ i = 1, 2, \ldots, n.$

DÉFINITION 4. *S'il existe un opérateur $[u, v; x]$ défini sur l'espace Y^2 et à valeurs dans l'espace $\left(Y^{(1)} \to X\right)$ qui pour $u = y_i,\ v = y_{i+1}$ satisfait à la propriété*

$$[y_i, y_{i+1}; F]\,(F(x_{i+1}) - F(x_i)) = x_{i+1} - x_i \tag{8}$$

alors l'élément $[y_i, y_{i+1}; x] \in \left[Y^{(1)} \to X\right]$ est nommé différence divisée inverse de l'ordre 1 de l'opérateur F sur les noeuds $y_i, y_{i+1} \in Y$.

Les différences divisées de l'ordre $2, 3, \ldots,$ se définissent d'une manière analogue comme au point 2.

En ce qui concerne la différence divisée inverse du premier ordre on démontre le résultat suivant:

LEMME 2. *Si l'opérateur $[x_i, x_{i+1}; F]$ admet un inverse alors, la différence divisée inverse $[y_i, y_{i+1}; x]$, existe et peut être fournie par la relation:*

$$[y_i, y_{i+1}; x] = [x_i, x_{i+1}; F]^{-1}$$

Démonstration. En effet l'opérateur $[x_i, x_{i+1}; F]^{-1} \in \left(Y^{(1)} \to X\right)$ peut être considéré lui aussi par l'intermède de F comme défini sur l'espace

Y^2. Mais en tenant compte de l'égalité:

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) = [x_i, x_{i+1}; F](x_{i+1} - x_i)$$

et en appliquant à cette égalité l'opérateur $[x_i, x_{i+1}; F]^{-1}$ on déduit:

$$\begin{aligned} &[x_i, x_{i+1}; F]^{-1} [F(x_{i+1}) - F(x_i)] = \\ &= [x_i, x_{i+1}; F]^{-1} [x_i, x_{i+1}; F](x_{i+1} - x_i) \\ &= x_{i+1} - x_i. \end{aligned}$$

D'ou, il résulte que l'opérateur $[x_i, x_{i+1}; F]^{-1}$ satisfait à l'égalité (8) qui intervient dans la définition de la différence divisée inverse. Alors, évidemment, on peut prendre comme différence divisée inverse, l'opérateur $[x_i, x_{i+1}; F]^{-1}$ lui-même ce qu'il fallait démontrer. □

Lemme 3. *Si les différences divisées de l'ordre* 1 *et* 2 *de l'opérateur* F *sur les noeuds* x_i, x_{i+1}, x_{i+2} *existent et si les différences divisées de l'ordre* 1 *sont des opérateurs admettant des inverses, alors il existe aussi la différence divisée inverse de l'ordre* 2 *et elle a la forme:*

(9)
$$\begin{aligned} &[y_i, y_{i+1}, y_{i+2}; x] = \\ &= -[x_{i+1}, x_{i+2}; F]^{-1} [x_i, x_{i+1}, x_{i+2}; F] [x_i, x_{i+2}; F]^{-1} [x_i, x_{i+1}, F]^{-1}. \end{aligned}$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} &-[x_{i+1}, x_{i+2}; F]^{-1} [x_i, x_{i+1}, x_{i+2}; F] [x_i, x_{i+2}; F]^{-1} (F(x_{i+2}) - F(x_i)) [x_i, x_{i+1}; F]^{-1} = \\ &= -[x_{i+1}, x_{i+2}; F]^{-1} [x_i, x_{i+1}, x_{i+2}; F](x_{i+2} - x_i)[x_i, x_{i+1}; F]^{-1} \\ &= -[x_{i+1}, x_{i+2}, F]^{-1} \{[x_{i+1}, x_{i+2}; F] - [x_i, x_{i+1}; F]\} [x_i, x_{i+1}; F]^{-1} \\ &= [x_{i+1}, x_{i+2}; F]^{-1} - [x_i, x_{i+1}; F]^{-1} \\ &= [y_{i+1}, y_{i+2}; x] - [y_i, y_{i+1}, x] \\ &= [y_i, y_{i+1}, y_{i+2}; x](F(x_{i+2}) - F(x_i)) \end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer. □

Evidemment, la forme générale des différences divisées inverses, de l'opérateur F se complique quand leur ordre croît. Pour les besoins pratiques on peut se borner seulement aux différences divisées des deux premiers ordres.

De la même manière dont on a procédé au point 3, on écrira à l'aide des différences divisées inverses le polynome d'interpolation inverse généralisé. Pour cela, il va falloir supposer que les différences divisées inverses, existent et qu'elles sont des opérateurs symétriques (dans le sens de la définiton 3).

Dans ce cas, tenant compte du théorème 1 on peut écrire le polynome d'interpolation inverse suivant

$$
\begin{aligned}
P(y) =& x_1 + [y_1, y_2; x](y - y_1) + \cdots + \\
&+ [y_1, y_2, \cdots, y_n; x](y - y_{n-1}) \cdots (y - y_1)
\end{aligned}
\tag{10}
$$

où x_1 est le noeud pour lequel $F(x_1) = y_1$ et $[y_1, y_2; x], \ldots, [y_1, y_2, \ldots, y_n; x]$ sont les différences divisées inverses de l'opérateur F d'ordres respectivement $1, 2, \ldots, n-1$.

5. Application des polynomes d'interpolation inverse à la résolution approchée des équations opérationnelles.

Soit donnée l'équation opérationnelle:

$$
F(x) = \theta \tag{11}
$$

où F est un opérateur défini sur l'espace linéaire normé X et à valeurs dans l'espace linéaire normé Y; θ sera l'élément zéro de l'espace Y. On va supposer que l'opérateur F admet pour $x \in D$ où D est un domaine de l'espace X - un opérateur inverse $x = \mathcal{F}(y)$. Si l'équation (11) admet une solution dans le domaine D, alors évidemment cette solution se calcule en remplaçant dans l'opérateur inverse $\mathcal{F}$,y par θ, c'est-à-dire que:

$$
\bar{x} = \mathcal{F}(\theta).
$$

On choisira dans le domaine D un système de n noeuds $x_1, x_2, \ldots, x_n \in D$ et on désignera par $y_1, y_2, \ldots y_n \in F(D)$ les valeurs de l'opérateur F sur les noeuds $x_1, x_2, \ldots, x_n$ c'est-à-dire $y_i = F(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. On va supposer que l'opérateur F admet sur le système de noeuds $x_1, x_2, \ldots, x_n$, x, $x \neq x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, et $x \in D$ des différences divisées inverses, symétriques.

Dans ce cas, le polynome d'interpolation inverse (10) est un polynome d'interpolation pour l'opérateur $\mathcal{F}$.

Alors, on a l'égalité suivante:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(y) =& x_1 + [y_1, y_2; x](y - y_1) + \ldots \\
&+ [y_1, y_2, \ldots, y_n; x](y - y_{n-1}) \ldots (y - y_1) \\
&+ [y, y_1 \ldots, y_n; x][y - y_n] \ldots (y - y_1)
\end{aligned}
\tag{12}
$$

où $[y, y_1, y_2, \ldots y_n; x]\,(y - y_n)\ldots(y - y_1)$ est le reste du polynome d'interpolation (10). Si on néglige dans l'égalité (12) le reste, et que l'on remplace y par θ, alors on obtient pour la solution $\bar{x}$ de l'équation (11) une valeur approchée, c'est-à-dire

(13)

$$\bar{x} \approx P(\theta)$$

$$= x_1 - [y_1, y_2, ; x]\, y_1 + \ldots + (-1)^{n-1}\, [y_1, y_2, \ldots, y_n; x]\, y_{n-1} y_{n-2} \ldots y_1,$$

il en résulte, si $\|[\theta, y_1, y_2, \ldots, y_n; x]\| \leq M < +\infty$ l'évaluation suivante:

$$\|\bar{x} - P(\theta)\| \leq M\,\|y_1\| \ldots \|y_n\|\,. \tag{14}$$

Dans l'inégalité (14) on remarque que $P(\theta)$ constitue une approximation pour $\bar{x}$ d'autant meilleure que les nombres $\|y_1\|, \|y_2\|, \ldots, \|y_n\|$ sont plus rapprochés de zéro.

On utilisera maintenant la méthode (13) pour déduire quelques méthodes itératives à plusieurs pas qui sont utilisées à la résolution des équations opérationnelles.

Méthode de la corde. [7], [9] Soient $x^{(0)}, x^{(1)} \in X$ deux approximations initiales de la solution $\bar{x}$ de l'équation (11) et $y^{(0)},\ y^{(1)}$ les valeurs de l'opérateur F sur les éléments $x^{(0)}$ et $x^{(1)}$ alors, on désigne par $x^{(2)}$ l'expression:

$$x^{(2)} = x^{(0)} - \left[y^{(0)}, y^{(1)}; x\right] y^{(0)}$$

qui est obtenue en conservant seulement les deux premiers termes de la somme (13). En remplaçant maintenant l'élément $x^{(0)}$ par $x^{(2)}$ on obtient l'élément $x^{(3)}$ de la sorte:

$$x^{(3)} = x^{(1)} - \left[y^{(1)}, y^{(2)}; x\right] y^{(1)}.$$

En procédant ainsi de suite, on obtiendra le procédé itératif suivant

$$x^{(k)} = x^{(k-2)} - \left[y^{(k-2)}, y^{(k-1)}; x\right] y^{(k-2)}, \qquad k = 2, 3, \ldots,\ x^0, x^1 \in X$$

où $y^{(i)} = F\left(x^{(i)}\right),\ i = 0, 1, 2, \ldots$. Si on tient compte de l'égalité:

$$\left[y^{(k-2)}, y^{(k-1)}; x\right] = \left[x^{(k-2)}, x^{(k-1)}; F\right]^{-1}$$

(qui suppose que les conditions du lemme 2 sont remplies). On obtient le procédé itératif de la corde, c'est-à-dire;

$$x^{(k)} = x^{(k-2)} - \left[x^{(k-2)}, x^{(k-1)}; F\right]^{-1} F\left(x^{(k-2)}\right),$$

$k = 2, 3, \ldots, x^{(0)}, x^{(1)} \in X.$

L'analogue de la méthode de Tschébycheff. [1], [2], [3]. On va conserver maitenant les trois premiers termes de la somme (13) et on va choisir comme approximations initiales trois éléments $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)} \in X$. En utilisant ces approximations et en procédant comme dans le cas de le méthode de la corde, on va obtenir le procédé itératif suivant:

$$x^{(k)} = x^{(k-3)} - \left[y^{(k-3)}, y^{(k-2)}; x\right] y^{(k-3)} + \left[y^{(k-3)}, y^{(k-2)}, y^{(k-1)}; x\right] y^{(k-2)} y^{(k-3)}$$

ou $y^{(k)} = F\left(x^{(k)}\right),\ k = 2, 3, \ldots$ En tenant compte du lemme 3 on a

$$\begin{aligned} x^{(k)} = & x^{(k-3)} - \left[x^{(k-3)}, x^{(k-2)}, F\right]^{-1} F\big(x^{(k-3)}\big) \\ & - \left[x^{(k-2)}, x^{(k-3)}; F\right]^{-1} \left[x^{(k-3)}, x^{(k-2)}, x^{(k-1)}; F\right] \times \\ & \times \left[x^{(k-3)}, x^{(k-1)}; F\right]^{-1} F\big(x^{(k-3)}\big) \cdot \left[x^{(k-2)}, x^{(k-1)}; F\right]^{-1} F\big(x^{(k-2)}\big) \end{aligned}$$

pour $k = 2, 3, 4, \ldots$ et $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)} \in X$.

En utilisant la méthode de l'interpolation inverse on obtient des procédés itératifs à un nombre arbitraire de pas. Ainsi, en conservant tous les termes de la somme (13), on obtient un procédé itératif à n pas. On choisit donc comme approximations initiales n éléments $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)} \in X$ et comme au par avant on considère le procédé itératif suivant:

$$\begin{aligned} x^{(k+n+1)} = & x^{(k+1)} - \left[y^{(k+1)}, y^{(k+2)}; x\right] y^{(k+1)} + \cdots + \\ & + (-1)^{n-1} \left[y^{(k+1)}, \ldots y^{(k+n)}; x\right] y^{(k+n-1)} \ldots y^{(k+1)} \end{aligned}$$

pour $k = 0, 1, \ldots$, où $y^{(i)} = F\left(x^{(i)}\right),\ i = 1, 2, \ldots$ On a obtenu ainsi une classe de méthodes itératives à plusieurs pas.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Balàzs M. şi Bîrsan F., *Asupra unor metode iterative cu diferenţe divizate de ordinul doi şi rapiditatea de convergenţă de ordinul trei pentru rezolvarea ecuaţiilor operaţionale nelineare.* Studii şi cercetări matematice **21**, 7, 975-984 (1969).

[2] Balàsz M. şi Goldner G., *Diferenţe divizate în spaţii Banach şi unele aplicaţii ale lor.* Studii şi cercetări matematice, **21**, 7, 985-995 (1969).

[3] Janko B., *Sur l'analogue de la méthode de Tchébycheff et de la méthode des hyperboles tangentes.* Mathematica, **2 (25)**, 2, 269-275 (1960).

[4] Moldovan E., *Interpolarea în spaţii abstracte.* Studii şi cercetări de matematică (Cluj) **X**, 2, 239-335 (1959). ← clickable

[5] Ostrowski A. M., *Reşenie uravnenii i sistem uravnenii* M. Izd-vo in lit (1963).

[6] Popoviciu T., *Sur la délimitation de l'erreur dans l'approximation des racines d'une équation par interpolation linéaire ou quadratique.* Revue Roumaine de mathématiques pures et appliquées **13**, 1, 75–78 (1968).

[7] Schmidt J. W., *Konvergenzgeschwindigkeit der Regula falsi und des Steffensen-Verfahrens im Banachraum* Z.A.M.M. **46**, 2 146–148 (1966).

[8] Schmidt J. W. and Schwetlick H., *Ableitungsfreie Verfahren mit höhever Konvergenzgeschwindigkeit.* Computing **3**, 215–226 (1968).

[9] Sergeev A.S., *O metode hord.* Sibirski mat. jurnal **1**, 2, 282–289 (1961).

[10] S. Ul'm, *Ob obobşcennîh razdelennîh raznostiah* I Izv. Akad. Nauk. Estonskoi S.S.R. 16, 1, 13–26 (1967).

[11] Ul'm S., *Ob obobşcennîh razdelennîh raznostiah* II Izv. Akad. Nauk Estonskoi S.S.R., **16**, 2, 146–155 (1967).

Reçu le 25.XI.1969