

## UN ALGORYTHME DE CALCUL DANS LA RÉOLUTION DES ÉQUATIONS PAR INTERPOLATION

Ion Păvăloiu

Désignons par  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction où  $I$  est un intervalle de l'axe réel. Nous considérons l'équation

$$(1) \quad f(x) = \theta,$$

et nous supposons que cette équation admet une seule solution  $\bar{x} \in I$ . Nous désignons par  $F = f(I)$  l'ensemble des valeurs de la fonction  $f$  pour  $x \in I$ . Nous supposons que la fonction  $f$  admet une fonction inverse  $f^{-1} : F \rightarrow I$ .

Nous désignons par  $x_i \in I$ ,  $i = 1, 2, \dots, n+1$ ,  $x_i \neq x_j$  pour  $i \neq j$ ,  $n+1$  approximations différentes de la solution  $\bar{x}$  de l'équation (1) et nous écrivons  $y_i = f(x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n+1$ .

Le polynome

$$(2) \quad L_n(y_1, y_2, \dots, y_{n+1}; f^{-1}|y) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i \frac{\omega(y)}{(y-y_i)\omega'(y_i)}$$

où

$$(3) \quad \omega(y) = \prod_{i=1}^{n+1} (y - y_i)$$

vérifie les conditions

$$(4) \quad L_n(y_1, y_2, \dots, y_{n+1}; f^{-1}|y_i) = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n+1.$$

Si  $\bar{x} \in I$ , alors  $0 \in F$  et  $f^{-1}(0) = \bar{x}$ . En ce cas, en faisant  $y = 0$  an (2) nous obtenons une approximation pour  $\bar{x}$ , c'est-à-dire

$$(5) \quad \bar{x} \simeq L_n(y_1, y_2, \dots, y_{n+1}; f^{-1}|0).$$

En tenant compte de l'égalité

$$(6) \quad \begin{aligned} f^{-1}(0) - L_n(y_1, y_2, \dots, y_{n+1}; f^{-1}|0) &= \\ &= (-1)^{n+1} [y_1, y_2, \dots, y_{n+1}, 0; f^{-1}|0] y_1 y_2 \dots y_{n+1} \end{aligned}$$

et en écrivant  $x_{n+2} = L_n(y_1, y_2, \dots, y_{n+1}; f^{-1}|0)$ , nous obtenons

$$(7) \quad \bar{x} - x_{n+2} = (-1)^{n+1} [y_1, y_2, \dots, y_{n+1}, 0; f^{-1}] y_1 y_2 \dots y_{n+1}.$$

Nous en déduisons qu'abstraction faite du facteur

$$(-1)^{n+1} [y_1, y_2, \dots, y_{n+1}, 0; f^{-1}]$$

$x_{n+2}$  sera une approximation pour  $\bar{x}$ , d'autant meilleure que les nombres  $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$  sont plus proches de 0.

De'signons à présent par  $x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+n+1} \in I$ ,  $n+1$  approximations de la solution  $\bar{x}$ , alors les nombres

$$(8) \quad x_{i+n+2} = L_n(y_{i+1}, y_{i+2}, \dots, y_{i+n+1}; f^{-1}|0)$$

peuvent eux aussi considérés comme des approximations pour  $\bar{x}$ .

Nous supposons à présent que pour tous les  $u_1, \dots, u_{n+1} \in F$ ,

$$|[u_1, u_2, \dots, u_{n+1}, 0; f^{-1}]| \leq M < +\infty.$$

Nous avons alors

$$(9) \quad |\bar{x} - x_{i+n+2}| \leq M \cdot |y_{i+1}| \cdot |y_{i+2}| \cdots |y_{i+n+1}|, \quad i = 0, 1, \dots,$$

Si la différences divisée du premier ordre de la fonction  $f$  est bornée, c'est-à-dire  $|[x, y; f]| \leq \beta$  pour tous les  $x, y \in I$ , alors nous obtenons de (9)

$$(10) \quad |\bar{x} - x_{i+n+2}| \leq M\beta^{n+1} |\bar{x} - x_{i+1}| |\bar{x} - x_{i+2}| \dots |\bar{x} - x_{i+n+1}|, \quad i = 1, 2, \dots$$

Nous écrivons  $\alpha = M\beta^{n+1}$  et  $\rho_i = \alpha^{\frac{1}{n}} |\bar{x} - x_i|$ ,  $i = 1, 2, \dots$

Il résulte alors de (10)

$$(11) \quad \rho_{i+n+2} \leq \rho_{i+1} \cdot \rho_{i+2} \cdots \rho_{i+n+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Nous considérons à présent l'équation aux différences

$$(12) \quad \gamma_{i+n+2} = \gamma_{i+1} + \gamma_{i+2} + \dots + \gamma_{i+n+1}, \quad i = 0, 1, \dots$$

et nous supposons qu'il existe un nombre  $d < 1$  tel que  $\rho_s \leq d^{\gamma_s}$  pour  $s = 1, 2, \dots, n+1$ .

Nous associons à l'équation (12) l'équation

$$(13) \quad t^{n+1} = t^n + t^{n-1} + \dots + t + 1.$$

En ce cas, la solution de l'équation (12) peut s'exprimer comme suit:

$$(14) \quad \gamma_{i+k} = C_1 t_1^{i+k} + C_2 t_2^{i+k} + \dots + C_{n+1} t_{n+1}^{i+k}$$

où  $t_1, t_2, \dots, t_{n+1}$  sont les racines de l'équation (13) et  $C_1, C_2, \dots, C_{n+1}$  se déterminent par les conditions initiales  $\gamma_s = \gamma_s^0$ ,  $s = 1, 2, \dots, n+1$ .

On constate facilement que l'équation (13) admet une seule racine réelle  $\omega$ ;  $1 < \omega < 2$ .

Si nous admettons que

$$(15) \quad \rho_s \leq d^{\omega^s}; \quad s = 1, 2, \dots, n+1$$

alors nous déduisons facilement de (11) que les inégalités (15) ont lieu pour tout  $s \in \mathbb{N}$ , ce qui signifie que

$$(16) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0$$

c'est-à-dire que la suite  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  converge vers la solution de l'équation (1).

Nous présenterons par la suite un algorithme de calcul des valeurs des polynomes  $\omega_k(0)$  et  $\omega'_k(y_i)$ ,  $i = k, k+1, \dots, k+n$ , où

$$(17) \quad \omega_k(y) = \prod_{i=k}^{k+n} (y - y_i), \quad k = 1, 2, \dots$$

Les polynomes (17) sont utilisés à la construction de la suite de polynomes d'interpolation inverse de Lagrange, qui conduisent à la suite d'approximations  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ , dont les éléments sont donnés par l'égalité (8).

Il résulte de (17)

$$\omega_{k+1}(y) = \omega_k(y) \cdot \frac{y - y_{n+k+1}}{y - y_k}$$

d'où nous déduisons la relation

$$(18) \quad \omega_{k+1}(0) = \omega_k(0) \cdot \frac{y_{n+k+1}}{y_k}$$

qui nous offre une formule des récurrence pour le calcul des valeurs des polynomes  $\omega_k$  pour  $y = 0$ .

Pour  $\omega'_{k+1}(y)$  nous avons


$$\omega_{k+1}'(y) = \frac{[\omega_k(y)(y - y_{n+k+1}) + \omega_k(y)](y - y_k) - \omega_k(y)(y - y_{n+k+1})}{(y - y_k)^2}.$$

Nous en déduisons les formules de récurrence suivantes:

$$(19) \quad \omega'_{k+1}(y_i) = \begin{cases} \omega'_k(y_i) \frac{y_i - y_{n+k+1}}{y_i - y_k}, & \text{pour } i = \overline{k+1, k+n} \\ \omega_k \frac{y_i}{y_i - y_k}, & \text{pour } i = n+k+1 \end{cases}$$

Les relations de récurrence (18) et (19) nous offrent la possibilité d'obtenir la suite de polynomes d'interpolation inverse de Lagrange, an utilisent à un pas quelconque d'itération certaine éléments qui ont déjà calculés au cours du pas précédent.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] I. Păvăloiu, *Rezolvarea ecuațiilor prin interpolare*, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1981. 

← clickable

Institutul de Matematică  
Oficiul Poștal 1, C.P. 68  
3400 Cluj-Napoca, Romania

This paper is in a final form and no version of it will be submitted for publication elsewhere.