

**ESTIMATION DES ERREURS DANS LA RESOLUTION
NUMÉRIQUE DES SYSTEMES D'EQUATIONS DANS
DES ESPACES METRIQUES*)**

ION PĂVĂLOIU

Désignons par (X_i, ρ_i) , $i = 1, 2$ deux espaces métriques complets et par $X = X_1 \times X_2$ le produit cartésien de ces espaces.

Nous désignons par $F_1 : X \rightarrow X_1$ et $F_2 : X \rightarrow X_2$ deux applications et nous considérons le système d'équations suivant:

$$(1) \quad \begin{aligned} x_1 &= F_1(x_1, x_2) \\ x_2 &= F_2(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in X. \end{aligned}$$

Pour la résolution du système d'équations (1) nous considérons le procédé itératif suivant, du type Gauss-Seidel:

$$(2) \quad \begin{aligned} x_1^{(n+1)} &= F_1(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) \\ x_2^{(n+1)} &= F_2(x_1^{(n+1)}, x_2^{(n)}), \quad n = 0, 1, \dots, (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \in X. \end{aligned}$$

En ce qui concerne la convergence des suites nous avons le Théorème suivant [1]:

THÉORÈME 1. *Si les applications F_1 et F_2 vérifient les conditions*

$$\begin{aligned} \rho_1(F_1(x_1, y_1), F_1(x_2, y_2)) &\leq \alpha \rho_1(x_1, x_2) + \beta \rho_2(y_1, y_2), \\ \rho_2(F_2(x_1, y_1), F_2(x_2, y_2)) &\leq a \rho_1(x_1, x_2) + b \rho_2(y_1, y_2) \end{aligned}$$

*) This paper is in a final form and no version of it will be submitted for publication elsewhere.

pour tous les $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X$, ou α, β, a et b sont des nombres réels nonnégatifs;

Si les nombres α, β, a et b vérifient les relations

$$\begin{aligned} \alpha + b + a\beta &< 2 \\ (1 - \alpha)(1 - b) &> a\beta, \quad b > 0, \quad \alpha > 0 \end{aligned}$$

alors le système (1) admet une seule solution $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in X$ et les suites $(x_1^{(n)})_{n=0}^{\infty}, (x_2^{(n)})_{n=0}^{\infty}$ sont convergentes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_1^{(n)} = \bar{x}_1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_2^{(n)} = \bar{x}_2.$$

Démonstration. Nous désignons par $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ et $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ deux suites de nombres non-négatifs dont les éléments vérifient les relations

$$(3) \quad \begin{aligned} f_n &\leq \alpha f_{n-1} + \beta g_{n-1} \\ g_n &\leq a f_n + b g_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Nous associons aux relations (3) le système d'équations en les inconnues h et k suivant

$$(4) \quad \begin{aligned} \alpha + \beta h &= hk \\ ak + b &= nk \end{aligned}$$

Nous montrerons par la suite que le système (4) admet une solution réelle (h_i, k_i) pour laquelle $0 \leq h_i k_i < 1$ si et seulement si les nombres a, b, α et β remplissent les conditions du Théorème 1.

Nous supposons que le système (4) admet les solutions $(h_i, k_i), i = 1, 2$ pour lesquelles les conditions $0 < h_i k_i < 1$ sont remplies. On vérifie immédiatement que du système (4) résultent les équations suivantes:

$$(5) \quad \begin{aligned} \beta h^2 - (b + \beta a - \alpha) h - \alpha a &= 0 \\ ak^2 - (\alpha + \beta a - b) k - \beta b &= 0 \end{aligned}$$

et

$$(6) \quad p^2 - (b + \beta a + \alpha) p - b\alpha = 0$$

où l'on a désigné par p le produit hk . Les équations (5) nous montrent que les solutions (h_i, k_i) , $i = 1, 2$ du système (4) sont réelles et de l'équation (6) et des conditions $0 < p_i < 1$, $i = 1, 2$ il résulte $f(0) > 0$, $f(1) > 0$ et $b + \beta a + \alpha < 2$, où $f(p) = p^2 - (b + \beta a + \alpha)p + b\alpha$. Il est évident que la condition $f(0) > 0$ est remplie parce que $\alpha > 0, b > 0$, $f(1) > 0$ et $b + a\beta + \alpha < 2$ représentent les relations de l'hypothèse du Théorème 1.

Si nous supposons à présent que les relations de l'hypothèse du Théorème 1 sont vérifiées, alors il est évident que $f(1) > 0$, $f(0) > 0$ et $b + a\beta + \alpha < 2$, ce qui nous montre que l'équation (6) a ses deux racines positives et moindres que l'unité. En tenant compte des équations (5), nous constatons facilement que le système (4) admet une solution (h_1, k_1) pour laquelle $h_1 > 0$, $k_1 > 0$.

Nous montrons à présent que si les éléments des suites $(f_n)_{n=0}^\infty$ et $(g_n)_{n=0}^\infty$ vérifient les relations (3) où les nombres α, β, a et b vérifient l'hypothèse du théorème 1, alors il existe une constante $C > 0$, indépendante de n telle que pour chaque $n = 1, 2, \dots$ ont lieu les relations

$$(7) \quad \begin{aligned} f_n &\leq C h_1^{n-1} k_1^{n-1} \\ g_n &\leq C h_1^n k_1^{n-1} \end{aligned}$$

et les séries $\sum_{i=0}^\infty f_i$ et $\sum_{i=0}^\infty g_i$ sont convergentes.

Désignons par C un nombre réel qui vérifie l'inégalité

$$(8) \quad C \geq \max \left\{ \alpha f_0 + \beta g_0, \frac{a f_1 + b g_0}{h_1} \right\}$$

où (h_1, k_1) est la solution positive du système (4).

De (8) et (3) nous déduisons pour $n = 1$

$$f_1 \leq C \quad \text{and} \quad g_1 \leq C h_1$$

donc les relations (7) sont vérifiées pour $n = 1$.

Nous supposons que les inégalités suivantes ont lieu:

$$f_{k-1} \leq C h_1^{k-2} \cdot k_1^{k-2}, \quad g_{k-1} \leq C h_1^{k-1} \cdot k_1^{k-2}, \quad k = 2, \dots, n$$

De (3) et (4) nous déduisons

$$\begin{aligned} f_n &\leq \alpha f_{n-1} + \beta g_{n-1} \leq C h_1^{n-2} k_1^{n-2} (\alpha + \beta h_1) = C h_1^{n-1} k_1^{n-1} \\ g_n &\leq a f_n + b g_{n-1} \leq C h_1^{n-1} k_1^{n-2} (a k_1 + b) = C h_1^n k_1^{n-1} \end{aligned}$$

ce qui nous montre que les relations (7) ont lieu pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Il est évident que les séries $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$ et $\sum_{i=0}^{\infty} g_i$ sont convergentes, parce que de (7) il s'ensuit qu'elles sont majorées par deux séries géométriques à raison moindre que l'unité.

De (2) et de l'hypothèse du Théorème 1 nous déduisons les relations:

$$(9) \quad \begin{aligned} \rho_1 \left(x_1^{(n+1)}, x_1^{(n)} \right) &\leq \alpha \rho_1 \left(x_1^{(n)}, x_1^{(n-1)} \right) + \beta \rho_2 \left(x_2^{(n)}, x_2^{(n-1)} \right) \\ \rho_2 \left(x_2^{(n+1)}, x_2^{(n)} \right) &\leq a \rho_1 \left(x_1^{(n+1)}, x_1^{(n)} \right) + b \rho_2 \left(x_2^{(n)}, x_2^{(n-1)} \right), \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Nous posons à présent en (9) $f_i = \rho_1 \left(x_1^{(i+1)}, x_1^{(i)} \right)$, $g_i = \rho_2 \left(x_2^{(i+1)}, x_2^{(i)} \right)$, $i = 0, 1, 2, \dots$ et nous obtenons les relations (3). En tenant compte des hypothèses du Théorème 1 nous en déduisons les relations

$$(10) \quad \begin{aligned} \rho_1 \left(x_1^{(i+1)}, x_1^{(i)} \right) &\leq C h_1^{i-1} \cdot k_1^{i-1} \\ \rho_2 \left(x_2^{(i+1)}, x_2^{(i)} \right) &\leq C h_1^i \cdot k_1^{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Nous montrerons à présent que suites $\left(x_1^{(n)} \right)_{n=0}^{\infty}$ et $\left(x_2^{(n)} \right)_{n=0}^{\infty}$ sont convergentes.

Nous avons en effet

$$(11) \quad \begin{aligned} \rho_1 \left(x_1^{(n+s)}, x_1^{(n)} \right) &\leq f_{n+s-1} + f_{n+s-2} + \dots + f_n \\ &\leq p_1^{n-1} C \left(1 + p_1 + p_1^2 + \dots + p_1^{s-1} \right) \leq \frac{C p_1^{n-1}}{1-p_1} \end{aligned}$$

où $p_1 = h_1 k_1$.

Nous déduisons de la même façon

$$(12) \quad \rho_2 \left(x_2^{(n+s)}, x_2^{(n)} \right) \leq g_{n+s-1} + g_{n+s-2} + \dots + g_n \leq \frac{C h_1 p_1^{n-1}}{1-p_1}.$$

En tenant compte que $0 < p_1 < 1$ et du fait que les espaces X_1 et X_2 sont complets, il résulte que les suites $\left(x_1^{(n)} \right)_{n=0}^{\infty}$ et $\left(x_2^{(n)} \right)_{n=0}^{\infty}$ sont convergentes.

Si nous posons $\bar{x}_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_1^{(n)}$ and $\bar{x}_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_2^{(n)}$ alors en tenant compte de la continuité des applications F_1 et F_2 et en passant à la limite dans les égalités (2) lorsque $n \rightarrow \infty$ il résulte que (\bar{x}_1, \bar{x}_2) représente une solution du système (1).

En ce qui concerne l'unicité de la solution, nous supposerons par l'absurde que le système (1) n'a pas une solution unique.

Désignons par (\bar{x}_1, \bar{x}_2) et (\bar{y}_1, \bar{y}_2) deux solutions du système (1). Il résulte de la première condition du théorème 1:

$$\begin{aligned}\rho_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1) &\leq \alpha \rho_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1) + \beta \rho_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2) \\ \rho_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2) &\leq a \rho_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1) + b \rho_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2)\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}(1 - \alpha) \rho_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1) &\leq \beta \rho_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2) \\ (1 - b) \rho_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2) &\leq a \rho_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1).\end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$\rho_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1) \leq \frac{\beta a}{(1-\alpha)(1-b)} \rho_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$$

et

$$\rho_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2) \leq \frac{\beta a}{(1-\alpha)(1-b)} \rho_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2),$$

mais $\frac{\beta a}{(1-\alpha)(1-b)} < 1$ par conséquent les dernière inégalités ont lieu si et seulement si $\bar{x}_1 = \bar{y}_1$ et $\bar{x}_2 = \bar{y}_2$.

Il résulte de (11) et (12) pour $s \rightarrow \infty$

$$\rho_1(\bar{x}_1, x_1^{(n)}) \leq \frac{C p_1^{n-1}}{1-p_1} \quad \text{et} \quad \rho_2(\bar{x}_2, x_2^{(n)}) \leq \frac{C h_1 p_1^n}{1-p_1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

□

Désignons à présent par $F_1^* : X \rightarrow X_1$, $F_2^* : X \rightarrow X_2$ deux autres applications qui vérifient auprès de F_1 et F_2 les conditions

$$(13) \quad \begin{aligned}\rho_1(F_1^*(u, v), F_1(u, v)) &\leq \delta_1 \\ \rho_2(F_2^*(u, v), F_2(u, v)) &\leq \delta_2\end{aligned}$$

pour tout $(u, v) \in X$, où $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ sont deux nombres réels donnés.

A côté du procédé itératif (2) nous considérons le procédé itératif suivant:

$$(14) \quad \begin{aligned}\xi_1^{(n+1)} &= F_1^*(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}) \\ \xi_2^{(n+1)} &= F_2^*(\xi_1^{(n+1)}, \xi_2^{(n)}), \quad n = 0, 1, \dots, (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}) \in X.\end{aligned}$$

En ce qui suit nous procéderons à la délimitation des erreurs au cas où la racine (\bar{x}_1, \bar{x}_2) du système (1) est approchée par des éléments

des suites $\left(\xi_1^{(n)}\right)_{n=0}^{\infty}$ $\left(\xi_2^{(n)}\right)_{n=0}^{\infty}$ générées à l'aide du procédé (14). Nous n'avons évidemment aucune information concernant les applications F_1^* et F_2^* si non qu'elles vérifient les relations (13), c'est pourquoi nous ne pouvons rien affirmer relativement à la convergence des suites $\left(\xi_1^{(n)}\right)_{n=0}^{\infty}$ et $\left(\xi_2^{(n)}\right)_{n=0}^{\infty}$.

Nous montrerons par la suite que le processus du calcul des éléments des suites $\left(\xi_1^{(n)}\right)_{n=0}^{\infty}$ et $\left(\xi_2^{(n)}\right)_{n=0}^{\infty}$ peut être certainement arrêté quand $\rho_1\left(\xi_1^{(n+1)}, \xi_1^{(n)}\right) < \varepsilon_1$ et $\rho_2\left(\xi_2^{(n+1)}, \xi_2^{(n)}\right) < \varepsilon_2$, si ε_1 et ε_2 sont convenablement choisis par rapport aux nombres $\delta_1, \delta_2, a, b, \alpha$ et β .

Nous avons en effet

$$\begin{aligned} \rho_1\left(\xi_1^{(n+1)}, \xi_1^{(n)}\right) &= \rho_1\left(F_1^*\left(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}\right), F_1^*\left(\xi_1^{(n-1)}, \xi_2^{(n-1)}\right)\right) \\ &\leq \rho_1\left(F_1^*\left(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}\right), F_1\left(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}\right)\right) \\ &\quad + \rho_1\left(F_1\left(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}\right), F_1\left(\xi_1^{(n-1)}, \xi_2^{(n-1)}\right)\right) \\ &\quad + \rho_1\left(F_1\left(\xi_1^{(n-1)}, \xi_2^{(n-1)}\right), F_1^*\left(\xi_1^{(n-1)}, \xi_2^{(n-1)}\right)\right) \\ &\leq \alpha\rho_1\left(\xi_1^{(n)}, \xi_1^{(n-1)}\right) + \beta\rho_2\left(\xi_2^{(n)}, \xi_2^{(n-1)}\right) + 2\delta_1. \end{aligned}$$

Pour $\rho_2\left(\xi_2^{(n+1)}, \xi_2^{(n)}\right)$ nous avons de la même manière

$$\rho_2\left(\xi_2^{(n+1)}, \xi_2^{(n)}\right) \leq a\rho_1\left(\xi_1^{(n+1)}, \xi_1^{(n)}\right) + b\rho_2\left(\xi_2^{(n)}, \xi_2^{(n-1)}\right) + 2\delta_2.$$

Si nous écrivons maintenant $f_n^* = \rho_1\left(\xi_1^{(n+1)}, \xi_1^{(n)}\right)$, $g_n^* = \rho_2\left(\xi_2^{(n+1)}, \xi_2^{(n)}\right)$, $n = 0, 1, \dots$ alors les inégalités ci-dessus s'écrivent

$$(15) \quad \begin{aligned} f_n^* &\leq \alpha f_{n-1}^* + \beta g_{n-1}^* + 2\delta_1 \\ g_n^* &\leq a f_n^* + b g_{n-1}^* + 2\delta_2. \end{aligned}$$

Si nous nous plaçons dans les hypothèses du Théorème 1, alors il existe une constante C_1 indépendante de n , telle que nous avons les relations

suivantes:

$$(16) \quad \begin{aligned} f_n^* &\leq C_1 h_1^{n-1} k_1^{n-1} + \frac{2[\beta\delta_2 + (1-b)\delta_1]}{(1-\alpha)(1-b)-a\beta} \\ g_n^* &\leq C_1 h_1^n k_1^{n-1} + \frac{2[(1-\alpha)\delta_2 + a\delta_1]}{(1-\alpha)(1-b)-a\beta}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

où (h_1, k_1) est la solution du système (4) qui vérifie les conditions: $0 < h_1 k_1 < 1$, $h_1 > 0$, $k_1 > 0$.

En effet, si nous choisissons C_1 tel que

$$C_1 \geq \max \left\{ \left| \alpha f_0^* + \beta g_0^* + 2\delta_1 - \frac{2[\beta\delta_2 + (1-b)\delta_1]}{(1-\alpha)(1-b)-a\beta} \right|, \right. \\ \left. \frac{1}{h_1} \left| a f_1^* + b g_0^* + 2\delta_2 - \frac{2[(1-\alpha)\delta_2 + a\delta_1]}{(1-\alpha)(1-b)-a\beta} \right| \right\}$$

alors il est évident que

$$\begin{aligned} f_1^* &\leq \alpha f_0^* + \beta g_0^* + 2\delta_1 \leq C_1 + \frac{2[\beta\delta_2 + (1-b)\delta_1]}{(1-\alpha)(1-b)-a\beta} \\ g_1^* &\leq a f_1^* + b g_0^* + 2\delta_2 \leq C_1 h_1 + \frac{2[(1-\alpha)\delta_2 + a\delta_1]}{(1-\alpha)(1-b)-a\beta} \end{aligned}$$

et les inégalités (16) sont vérifiées pour $n = 1$.

Nous supposons que les relations (16) sont vérifiées pour chaque $n = 1, 2, \dots, s$ et nous montrerons qu'elles ont lieu également pour $n = s + 1$. Nous déduisons de (15)

$$\begin{aligned} f_{s+1}^* &\leq \alpha C_1 h_1^{s-1} k_1^{s-1} + \beta C_1 h_1^s k_1^{s-1} + \frac{2\alpha[\beta\delta_2 + (1-b)\delta_1]}{(1-\alpha)(1-b)-a\beta} + \frac{2\beta[(1-\alpha)\delta_2 + a\delta_1]}{(1-\alpha)(1-b)-a\beta} + 2\delta_1 \\ &= C_1 h_1^{s-1} k_1^{s-1} (\alpha + \beta h_1) + \frac{2[\beta\delta_2 + (1-b)\delta_1]}{(1-b)(1-\alpha)-a\beta} \\ &= C_1 h_1^s k_1^s + \frac{2[\beta\delta_2 + (1-b)\delta_1]}{(1-\alpha)(1-b)-a\beta}. \end{aligned}$$

On montre de la même manière que la seconde inégalité (16) a également lieu pour $n = s + 1$.

Si à présent nous supposons que

$$(17) \quad \begin{aligned} \varepsilon_1 &> \frac{2[\beta\delta_2 + (1-b)\delta_1]}{(1-\alpha)(1-b)-a\beta} \\ \varepsilon_2 &> \frac{2[(1-\alpha)\delta_2 + a\delta_1]}{(1-\alpha)(1-b)-a\beta} \end{aligned}$$

alors les relations (16) nous assurent qu'il existe un $n' \in N$ tel que pour tout $n > n'$ nous ayons les inégalités $\rho_1 \left(\xi_1^{(n+1)}, \xi_1^{(n)} \right) < \varepsilon_1$ et $\rho_2 \left(\xi_2^{(n+1)}, \xi_2^{(n)} \right) < \varepsilon_2$. Désignons par ε_1 et ε_2 deux nombres positifs qui vérifient les relations (17) et $n > n' + 1$. Nous proposons d'évaluer dans

ces conditions les distances entre \bar{x}_1 et $\xi_1^{(n+1)}$ et \bar{x}_2 et $\xi_2^{(n+1)}$, c'est -à-dire la délimitation des erreurs au cas de la résolution du système (1) à l'aide d'un procédé d'approximation de la forme (14) où les applications F_1^* et F_2^* dépendent de F_1 et F_2 par les relations (13). En tenant compte des hypothèses dans lesquelles nous nous sommes placés, nous aurons

$$\begin{aligned} \rho_1 \left(\bar{x}_1, \xi_1^{(n+1)} \right) &= \rho_1 \left(F_1 \left(\bar{x}_1, \bar{x}_2 \right), F_1^* \left(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)} \right) \right) \\ &\leq \rho_1 \left(F_1 \left(\bar{x}_1, \bar{x}_2 \right), F_1 \left(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)} \right) \right) \\ &\quad + \rho_1 \left(F_1 \left(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)} \right), F_1^* \left(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)} \right) \right) \\ &\leq \alpha \rho_1 \left(\bar{x}_1, \xi_1^{(n)} \right) + \beta \rho_2 \left(\bar{x}_2, \xi_2^{(n)} \right) + \delta_1. \end{aligned}$$

Nous avons de manière analogue pour $\rho_2 \left(\bar{x}_2, \xi_2^{(n+1)} \right)$:

$$\rho_2 \left(\bar{x}_2, \xi_2^{(n+1)} \right) \leq a \rho_1 \left(\bar{x}_1, \xi_1^{(n+1)} \right) + b \rho_2 \left(\bar{x}_2, \xi_2^{(n)} \right) + \delta_2$$

Nous déduisons des inégalités ci-dessus

$$\begin{aligned} (1 - \alpha) \rho_1 \left(\bar{x}_1, \xi_1^{(n+1)} \right) &\leq \alpha \varepsilon_1 + \beta \rho_2 \left(\bar{x}_2, \xi_2^{(n)} \right) + \delta_1 \\ (1 - b) \rho_2 \left(\bar{x}_2, \xi_2^{(n+1)} \right) &\leq a \rho_1 \left(\bar{x}_1, \xi_1^{(n+1)} \right) + b \varepsilon_2 + \delta_2 \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(18) \quad \begin{aligned} \rho_1 \left(\bar{x}_1, \xi_1^{(n+1)} \right) &\leq \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \varepsilon_1 + \frac{\beta}{1-\alpha} \rho_2 \left(\bar{x}_2, \xi_2^{(n)} \right) + \frac{\delta_1}{1-\alpha} \right) \\ \rho_2 \left(\bar{x}_2, \xi_2^{(n+1)} \right) &\leq \frac{a}{1-b} \rho_1 \left(\bar{x}_1, \xi_1^{(n+1)} \right) + \frac{b}{1-b} \varepsilon_2 + \frac{\delta_2}{1-b} \end{aligned}$$

d'où il résulte

$$(19) \quad \rho_2 \left(\bar{x}_2, \xi_2^{(n+1)} \right) \leq \frac{a(\alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_2) + b(1-\alpha)\varepsilon_2}{(1-\alpha)(1-b) - a\beta} + \frac{\varepsilon_2}{2}$$

Du fait que $n > n' + 1$, il résulte que la seconde inégalité de (18) a lieu aussi au cas où nous mettons n à la place de $n + 1$, c'est-à-dire

$$\rho_2 \left(\bar{x}_2, \xi_2^{(n)} \right) \leq \frac{a}{1-b} \rho_1 \left(\bar{x}_1, \xi_1^{(n)} \right) + \frac{b\varepsilon_2}{1-b} + \frac{\delta_2}{1-b}$$

Cette inégalité et la première inégalité (18) nous donnent

$$(20) \quad \rho_1 \left(\bar{x}_1, \xi_1^{(n+1)} \right) \leq \frac{\beta(a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2) + \alpha\varepsilon_1(1-b)}{(1-\alpha)(1-b) - a\beta} + \frac{\varepsilon_1}{2}$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Păvăloiu, I., *La résolution des systèmes opérationnelles a l'aide des methodes iteratives*, Mathematica, 11(34), 1969, 137–141. [↗](#)
- [2] Urabe, M., *Error estimation in numerical solution of equation by iteration processes*, J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A-I, 26 (1962), 77–91.

← clickable