"Babeş-Bolyai" University
Faculty of Mathematics and Physics
Research Seminars
Seminar on Mathematical Analysis
Preprint Nr.7, 1988, pp.167-178

DÉLIMITATIONS DES ERREURS DANS LA RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS

Ion Păvăloiu

Désignons par (X_i, ρ_i), $i = 1, 2$ deux espaces métriques complets et par $X = X_1 \times X_2$ le produit cartésien de ces espaces. Nous désignerons par $F_1 : X \to X_1$ et $F_2 : X \to X_2$ deux applications de l'espace X en X_1, respectivement en X_2 et nous considérons le système d'équations suivant:

$$\begin{aligned} &x_1 = F_1(x_1, x_2) \\ &x_2 = F_2(x_1, x_2), \qquad (x_1, x_2) \in X. \end{aligned} \tag{1}$$

Pour résoudre le système (1) nous adopterons le procédé itératif de type Gauss-Seidel suivant:

$$\begin{aligned} &x_1^{(n+1)} = F_1\left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}\right) \\ &x_2^{(n+1)} = F_2\left(x_1^{(n+1)}, x_2^{(n)}\right), \qquad n = 0, 1, \ldots; \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right) \in X \end{aligned} \tag{2}$$

Dans les travaux [1], [2] nous avons étudié la convergence de la méthode (2) dans l'hypothèse que les applications F_1 et F_2 remplissent des conditions de type Lipschitz dans tout l'espace X.

Dans la travail [3] nous avons obtenu des délimitations des erreurs dans la résolutions numérique du système (1) à l'aide d'une méthode de type (2), dans laquelle les applications F_1 et F_2 sont remplacées par deux autres applications F_1^* et F_2^*, qui remplissent certaines conditions de rapprochement de F_2 et F_1 dans tout l'espace X.

Dans les applications de cette théorie à la résolution d'une classe d'équations concrètes, les conditions imposées aux applications F_1, F_2, F_1^* et F_2^* dans tout l'espace X sont genantes, à cause du fait que l'espace X peut ne pas être borné.

Dans ce qui suit nous étudierons ce problème dans l'hypothèse où F_1 et F_2 remplissent des conditions de type Lipschitz et des conditions de rapprochement de F_1^* et F_2^* dans cerains sous-ensembles bornés $D_1 \subset X_1$ et $D_2 \subset X_2$.

Désignons par conséquent par D_1 et D_2 deux ensembles bornés des espaces X_1 respectivement X_2 et par $D = D_1 \times D_2$ leur produit cartésian. Considérons deux suites $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ et $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ dont les éléments remplissent les conditions:

$$\begin{aligned} f_n &\leq \alpha\ f_{n-1} + \beta\ g_{n-1} \\ g_n &\leq a\ f_n + b\ g_{n-1}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{3}$$

où $\alpha, \beta,\ a$ et b sont des nombres réels non-négatifs et $f_n \geq 0,\ g_n \geq 0$ pour tout $n = 0, 1, \ldots$.

Nous associerons au système (3) le système d'équations suivant en les inconnues h et k:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta h &= h\ k \\ a\ k + b &= n\ k \end{aligned} \tag{4}$$

Dans les travaux [1], [2] et [3] nous avons montré que si les nombres $\alpha, \beta,\ a$ et b vérifient les relations

$$\begin{aligned} \alpha + b + a\beta &< 2 \\ (1-\alpha)(1-b) - a\beta &> 0 \\ b > 0,\ \alpha &> 0 \end{aligned} \tag{5}$$

alors le système (4) admet les solutions réelles (h_i, k_i), $i = 1, 2$ pour lesquelles $0 < h_i k_i < 1$ et que l'une des solutions vérifie les conditions $h_1 > 0,\ k_1 > 0$. De plus, les éléments des suites $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ vérifient les relations

$$f_n \leq C\ h_1^{n-1}\ k_1^{n-1} \tag{6}$$
$$g_n \leq C\ h_1^{n}\ k_1^{n-1}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

où $C = \max\{\alpha f_0 + \beta g_0, \frac{af_1+bg_0}{h_1}\}$.

Si nous écrivons $p_1 = h_1, k_1$ alors on constate aisément à l'aide de (4) que p_1 vérifie l'équation

$$p^2 - (b + \beta a + \alpha)\, p + b\alpha = 0. \tag{7}$$

Désignons par $d_1 > 0$ un nombre tel que $S_1 \subseteq D_1$, $S_2 \subseteq D_2$, où

$$S_1 = \left\{ x \in X_1 : \rho_1\big(x, x_1^{(0)}\big) \leq \tfrac{d_1}{1-p_1} \right\} \tag{8}$$
$$S_2 = \left\{ x \in X_2 : \rho_2\big(x, x_2^{(0)}\big) \leq \tfrac{d_1 h_1}{1-p_1} \right\}$$

En ce qui concerne la convergence des suites $\big(x_1^{(n)}\big)_{n=0}^{\infty}$, $\big(x_2^{(n)}\big)_{n=0}^{\infty}$ on a le théorème suivant:

Théorème 1. *Si les applications F_1, F_2 vérifient les conditions*

i.
$$\rho_1\left(F_1\left(x_1, y_1\right), F_1\left(x_2, y_2\right)\right) \leq \alpha \rho_1\left(x_1, x_2\right) + \beta \rho_2\left(x_2, y_2\right)$$
$$\rho_2\left(F_2\left(x_1, y_1\right), F_2\left(x_2, y_2\right)\right) \leq a \rho_1\left(x_1, x_2\right) + b \rho_2\left(x_2, y_2\right)$$

pour toutes les (x_1, x_2), $(y_1, y_2) \in D$;

ii. *Les nombres α, β, a et b vérifient les relations (5);*

iii. *Les éléments $x_1^{(1)}$ et $x_2^{(1)}$ des suites $\big(x_1^{(n)}\big)_{n=0}^{\infty}, \big(x_2^{(n)}\big)_{n=0}^{\infty}$ vérifient les conditions $\rho_1\big(x_1^{(0)}, x_1^{(1)}\big) < d_1$ et $\rho_2\big(x_2^{(0)}, x_2^{(1)}\big) \leq d_1 h_1$.*

Alors sont vraies les propriétés suivantes:

j. *Ces suites $\big(x_1^{(n)}\big)_{n=0}^{\infty}, \big(x_2^{(n)}\big)_{n=0}^{\infty}$ construites à l'aide du procédé (2) sont convergentes;*

jj. *Si l'on écrit $\bar{x}_1 = \lim_{n\to\infty} x_1^{(n)}$ et $\bar{x}_2 = \lim_{n\to\infty} x_2^{(n)}$ alors $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in S$ où $S = S_1 \times S_2$ et $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ est la seul solution du système (1) dans l'ensemble S;*

jjj. *Les relations suivantes ont lieu*

$$\rho_1\left(\bar{x}_1, x_1^{(n)}\right) \leq \tfrac{d_1 p_1^n}{1-p_1}$$
$$\rho_2\left(\bar{x}_2, x_2^{(n)}\right) \leq \tfrac{d_1 h_1 p_1^n}{1-p_1}$$

Démonstation. De i. et de (2) nous déduisons les inéqualités suivantes

$$\begin{aligned}\rho_1\left(x_1^{(2)}, x_1^{(1)}\right) &\leq \alpha\rho_1\left(x_1^{(1)}, x_1^{(0)}\right) + \beta\rho_2\left(x_1^{(1)}, x_2^{(0)}\right)\\ &\leq \alpha d_1 + \beta d_1 h_1 \leq d_1 p_1\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\rho_2\left(x_2^{(2)}, x_2^{(1)}\right) &\leq a\rho_1\left(x_1^{(2)}, x_1^{(1)}\right) + b\rho_2\left(x_2^{(1)}, x_2^{(0)}\right)\\ &\leq a d_1 p_1 + b d_1 h_1 \leq d_1 h_1 p_1.\end{aligned}$$

Nous montrons à présent que $x_1^{(2)} \in S_1$ et $x_2^{(2)} \in S_2$. Nous avons en effet

$$\rho_1\left(x_1^{(2)}, x_1^{(0)}\right) \leq \rho_1\left(x_1^{(2)}, x_1^{(1)}\right) + \rho_1\left(x_1^{(1)}, x_1^{(0)}\right)$$
$$d_1 + d_1\ p_1 < \tfrac{d_1}{1-p_1},$$

et

$$\begin{aligned}\rho_2\left(x_2^{(2)}, x_2^{(0)}\right) &\leq \rho_2\left(x_2^{(2)}, x_2^{(1)}\right) + \rho_2\left(x_2^{(1)}, x_2^{(0)}\right)\\ &\leq d_1 h_1 + d_1\ p_1 h_1 \leq \tfrac{h_1 d_1}{1-p_1}\end{aligned}$$

d'où il résulte que $x_1^{(2)} \in S_1, x_2^{(2)} \in S_2$.

Nous supposerons à présent que les inègalités suivantes ont lieu

$$\rho_1\left(x_1^{(i)}, x_1^{(i-1)}\right) \leq d_1 p_1^{i-1} \tag{9}$$
$$\rho_2\left(x_2^{(i)}, x_2^{(i-1)}\right) \leq d_1 h_1 p_1^{i-1}$$

pour $i = 1, 2, \ldots, k$ et

$$x_1^{(k)} \in S_1,\ x_2^{(k)} \in S_2. \tag{10}$$

En tenant compte de ii., nous déduisons des hypothèses (9) et (10) et de i.

$$\begin{aligned}\rho_1\left(x_1^{(k+1)}, x_1^{(k)}\right) &= \rho_1\left(F_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}), F_1(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)})\right)\\ &\leq \alpha\rho_1\left(x_1^{(k)}, x_1^{(k-1)}\right) + \beta\rho_2\left(x_2^{(k)}, x_2^{(k-1)}\right)\\ &\leq d_1 p_1^{k-1}\left(\alpha+\beta h_1\right) = d_1 p_1^k\end{aligned}$$

et en tenant compte de l'inégalité ci-dessus nous déduisons de manière analogue

$$\rho_2\left(x_2^{(k+1)}, x_2^{(k)}\right) \leq d_1 \cdot h_1 \cdot p_1^k$$

d'où il résulte que les relations (9) ont également lieu pour $i = k+1$. Nous montrerons maintenant que $x_1^{(k+1)} \in S_1$ et $x_2^{(k+1)} \in S_2$. Il résulte des inégalités ci-dessus

$$\begin{aligned}\rho_1\left(x_1^{(k+1)}, x_1^{(0)}\right) &\leq \rho_1\left(x_1^{(k+1)}, x_1^{(k)}\right) + \rho_1\left(x_1^{(k)}, x_1^{(k-1)}\right) + \ldots \rho_1\left(x_1^{(1)}, x_1^{(0)}\right)\\ &\leq d_1 + d_1p_1 + d_1p_1^2 + \ldots + d_1p_1^k < \tfrac{d_1}{1-p_1}\end{aligned}$$

et de manière analogue

$$\rho_2\left(x_2^{(k+1)}, x_2^{(0)}\right) < \tfrac{d_1 h_1}{1-p_1}.$$

Du fait que les inégalités (9) ont lieu pour tout $i = 1, 2, \ldots$, il resulte que les suites $\left(x_1^{(n)}\right)_{n=0}^{\infty}$ et $\left(x_2^{(n)}\right)_{n=0}^{\infty}$ sont fondamentales et que les inégalités suivantes sont vraies

$$\begin{aligned}\rho_1\left(x_1^{(n+s)}, x_1^{(n)}\right) &\leq \tfrac{d_1 p_1^n}{1-p_1}\\ \rho_2\left(x_2^{(n+s)}, x_2^{(n)}\right) &\leq \tfrac{d_1 h_1 p_1^n}{1-p_1}\end{aligned} \tag{11}$$

pour tout $n = 0, 1, \ldots; s = 1, 2, \ldots$.

De l'hypothèse que les espace X_1 et X_2 sont des espaces completes il résulte que les suites $\left(x_n^{(n)}\right)_{n=0}^{\infty}$ et $\left(x_2^{(n)}\right)_{n=0}^{\infty}$ sont convergentes.

En pasant à la limite pour $s \to \infty$ nous déduisons de (11)

$$\rho_1\left(\bar{x}_1, x_1^{(n)}\right) \leq \frac{d_1 p_1^n}{1-p_1} \tag{12}$$
$$\rho_2\left(\bar{x}_2, x_2^{(n)}\right) \leq \frac{d_1 h_1 p_1^n}{1-p_1}$$

Il en résulte, pour $n = 0$, que $\bar{x}_1 \in S_1$ et $\bar{x}_2 \in S_2$. Nous montrerons que $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ est la seul solution du sytème (1) à la propríeté que $\bar{x}_1 \in S_1$ et $\bar{x}_2 \in S_2$.

Supposons par l'absurde que le sustème (1) a une autre solution $(\bar{y}_1, \bar{y}_2)$ à la propriété $\bar{y}_1 \in S_1$, $\bar{y}_2 \in S_2$. En tenant compte de i., il en résulte les inégalités

$$\rho_1\left(\bar{x}_1, \bar{y}_1\right) \leq \frac{\beta a}{(1-\alpha)(1-b)} \cdot \rho_1\left(\bar{x}_1, \bar{y}_1\right)$$
$$\rho_2\left(\bar{x}_2, \bar{y}_2\right) \leq \frac{\beta a}{(1-\alpha)(1-b)} \cdot \rho_2\left(x_2, y_2\right)$$

et de (5) il résulte que $\frac{\beta a}{(1-\alpha)(1-b)} < 1$. Par conséquent les inégalités ci-dessus ont lieu si et seulement si $\bar{x}_1 = \bar{y}_1$ et $\bar{x}_2 = \bar{y}_2$. $\square$

Nous considérons à présent deux applications $F_1^* : D \to X_1$ et $F_2^* : D \to X_2$, où $D = D_1 \times D_2$.

Nous supposerons que F_1^*, F_2^*, F_1 et F_2 vérifient les relations

$$\rho_1\left(F_1^*(u,v), F_1(u,v)\right) \leq \delta_1 \tag{13}$$
$$\rho_2\left(F_2^*(u,v), F_2(u,v)\right) \leq \delta_2$$

pour tout $(u,v) \in D$, où $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ sont des nombres donnés. En vu de résoudre le système (1) nous consideŕrons à présent à la place du procédé (2) la procédé itératif suivant:

$$\xi_1^{(n+1)} = F_1\left(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}\right) \tag{14}$$
$$\xi_2^{(n+1)} = F_2\left(\xi_1^{(n+1)}, \xi_2^{(n)}\right), \quad n = 0, 1, \ldots \xi_1^{(0)} = x_1^{(0)}, \xi_2^{(0)} = x_2^{(0)},$$

Dans ce qui suit nous procéderons à la délimitation des erreurs au cas où pour la résolution du système (1) nous utilisons à la place du procédé

(2) le procédé (14). Nous écrivons

$$\theta_1 = \tfrac{\beta\delta_2+(1-b)\delta_1}{(1-\alpha)(1-b)-a\beta} \tag{15}$$
$$\theta_2 = \tfrac{(1-\alpha)\delta_2+a\delta_1}{(1-\alpha)(1-b)-a\beta}$$

et désignons par S_1^*, S_2^* les ensembles suivants:

$$S_1^* = \left\{x \in X_1 : \rho_1\left(x, x_1^{(0)}\right) \le d_1 + \tfrac{d_1}{1-p_1} + \theta_1\right\} \tag{16}$$
$$S_2^* = \left\{x \in X_2 : \rho_2\left(x, x_2^{(0)}\right) \le d_1 h_1 + \tfrac{d_1 h_1}{1-p_1} + \theta_2\right\}.$$

Dans ces notations nous démontrerons le théoreme suivant:

Théorème 2. *Si les hypothèses du Théorème* 1 *sont satisfaites et si de plus les conditions suivantes sont remplies:*

i$_1$. *Les aplications* F_1, F_2, F_1^* *et* F_2^* *remplissent les conditions* (13);
i$_2$. $S_1^* \subseteq D_1,\ S_2^* \subseteq D_2,$

alors quels que soient les nombres réels ε_1, ε_2 *qui vérifient les relations* $\varepsilon_1 > 2\theta_1,\ \varepsilon_2 > 2\theta_2$, *il existe un* $n' \in \mathbb{N}$ *tel que* $\rho_1\left(\xi_1^{(n+1)}, \xi_1^{(n)}\right) \le \varepsilon_1$, *et* $\rho_2\left(\xi_2^{(n+1)}, \xi_2^{(n)}\right) \le \varepsilon_2$ *pour tout* $n > n'$ *et, de plus, les propriétés suivantes sont vraies:*

j$_1$. $\xi_1^{(n)} \in S_1$, $\xi_2^{(n)} \in S_2$ *pour tout* $n = 1, 2, \ldots$;
j$_2$. *Les inégalités suivantes sont vraies:*

$$\rho_1\left(\bar{x}_1, \xi_1^{(n+1)}\right) \le \tfrac{\beta(a\varepsilon_1+b\varepsilon_2)+\alpha\varepsilon_1(1-b)}{(1-\alpha)(1-b)-a\beta} + \tfrac{\varepsilon_1}{2}$$
$$\rho_2\left(\bar{x}_2, \xi_2^{(n+1)}\right) \le \tfrac{a(\alpha\varepsilon_1+\beta\varepsilon_2)+b\varepsilon_2(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1-b)-a\beta} + \tfrac{\varepsilon_2}{2}$$

pour tout $n > n'$, *où* $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ *est le solution du système* (1).

Démonstration. Nous montrerons d'abord que les propriétés j$_1$ sont vraies. Du fait que nous avons supposé que $\xi_1^{(0)} = x_1^{(0)}, \xi_2^{(0)} = x_2^{(0)}$, il résulte de (14) et de i.

$$\rho_1\left(x_1^{(1)},\xi_1^{(1)}\right)=\rho_1\left(F_1\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)}\right),F_1^*\left(\xi_1^{(0)},\xi_2^{(0)}\right)\right)$$
$$\leq\delta_1+\alpha\rho_1\left(\xi_1^{(0)}x_1^{(0)}\right)+\beta\rho_2\left(\xi_2^{(0)}x_2^{(0)}\right)=\delta_1$$

En tenant compte de iii., nous en déduisons

$$\rho_1\left(\xi_1^{(1)},x_1^{(0)}\right)\leq\rho_1\left(\xi_1^{(1)},x_1^{(1)}\right)+\rho_1\left(x_1^{(1)},x_1^{(0)}\right)$$
$$\leq\delta_1+d_1\leq d_1+\tfrac{d_1}{1-p_1}+\theta_1$$

vu qu'évidemment $\delta_1\leq\theta_1$, d'où il résulte $\xi_1^{(1)}\in S_1^*$.

Nous avons de manière analogue

$$\rho_2\left(x_2^{(1)},\xi_2^{(1)}\right)=\rho_2\left(F_2\left(x_1^{(1)},x_2^{(0)}\right),F_2^*\left(\xi_1^{(1)},\xi_2^{(0)}\right)\right)$$
$$\leq\delta_2+a\rho_1\left(\xi_1^{(1)},x_1^{(1)}\right)+b\rho_2\left(\xi_2^{(0)},x_2^{(0)}\right)\leq\delta_2+a\delta_1$$

En tenant compte de iii. nous en déduisons

$$\rho_2\left(\xi_2^{(1)},x_2^{(0)}\right)\leq\rho_2\left(\xi_2^{(1)},x_2^{(1)}\right)+\rho_2\left(x_2^{(1)},x_2^{(0)}\right)\leq\delta_2+a\delta_1+d_1h_1.$$

En tenant compte du fait que $\delta_2+a\delta_1\leq\theta_2$ il en résulte que

$$\rho_2\left(\xi_2^{(1)},x_2^{(0)}\right)\leq h_1d_1+\tfrac{h_1d_1}{1-p_1}+\theta_2$$

et par conséquent $\xi_2^{(1)}\in S_2^*$.

Nous supposerons à présent par induction que $\xi_1^{(n-1)}\in S_1^*$ et $\xi_2^{(n-1)}\in S_2^*$.

Nous avons alors

$$\rho_1\left(\xi_1^{(n)},x_1^{(n)}\right)=\rho_1\left(F_1\left(x_1^{(n-1)},x_2^{(n-1)}\right),F^*\left(\xi_1^{(n-1)},\xi_2^{(n-1)}\right)\right)\tag{17}$$
$$\leq\alpha\rho_1\left(x_1^{(n-1)},\xi_1^{(n-1)}\right)+\beta\rho_2\left(x_2^{(n-1)},\xi_2^{(n-1)}\right)+\delta_1$$

et

$$\rho_2\left(\xi_2^{(n)},x_2^{(n)}\right)=\rho_2\left(F_2\left(x_1^{(n)},x_2^{(n-1)}\right),F_2^*\left(\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n-1)}\right)\right)\tag{18}$$
$$\leq a\rho_1\left(x_1^{(n)},\xi_1^{(n)}\right)+b\rho_2\left(x_2^{(n-1)},\xi_2^{(n-1)}\right)+\delta_2.$$

On montre par induction, à partir des relations ci-dessus, que

$$\rho_1\left(\xi_1^{(n)}, x_1^{(n)}\right) \leq d_1 h_1^{n-1}, k_1^{n-1} + \theta_1 \tag{19}$$
$$\rho_2\left(\xi_2^{(n)}, x_2^{(n)}\right) \leq d_1 h_1^{n}, k_1^{n-1} + \theta_2,$$

d'où nous déduisons:

$$\rho_1\left(\xi_1^{(n)}, x_1^{(0)}\right) \leq \rho_1\left(\xi_1^{(n)}, x_1^{(n)}\right) + \rho_1\left(x_1^{(n)}, x_1^{(0)}\right) \leq d_1 + \tfrac{d_1}{1-p_1} + \theta_1$$

et

$$\rho_2\left(\xi_2^{(n)}, x_2^{(0)}\right) \leq \rho_2\left(\xi_2^{(n)}, x_2^{(n)}\right) + \rho_2\left(x_2^{(n)}, x_2^{(0)}\right) \leq d_1 h_1 + \tfrac{d_1 h_1}{1-p_1} + \theta_2$$

c'est'-à-dire $\xi_1^{(n)} \in S_1^*$, $\xi_2^{(n)} \in S_2^*$.

Des hypothèses du Théorème 2 et du fait que $\xi_1^{(n)} \in S_1^*, \xi_2^{(n)} \in S_2^*$ pour tout $n \in N$, il résulte les relations suivantes:

$$\rho_1\left(\xi_1^{(n+1)}, \xi_1^{(n)}\right) \leq \alpha\rho_1\left(\xi_1^{(n)}, \xi_1^{(n-1)}\right) + \beta\rho_2\left(\xi_2^{(n)}, \xi_2^{(n-1)}\right) + 2\delta_1$$

et

$$\rho_2\left(\xi_2^{(n+1)}, \xi_2^{(n)}\right) \leq a\rho_1\left(\xi_1^{(n+1)}, \xi_1^{(n)}\right) + b\rho_2\left(\xi_2^{(n)}, \xi_2^{(n-1)}\right) + 2\delta_2$$

pour $n = 0, 1, \ldots$.

Des inégalités ci-dessus nous déduisons les inégalités suivantes:

$$\rho_1\left(\xi_1^{(n+1)}, \xi_1^{(n)}\right) \leq d_1 h_1^{n-1} \cdot k_1^{n-1} + 2\theta_1 \tag{20}$$
$$\rho_2\left(\xi_2^{(n+1)}, \xi_2^{(n)}\right) \leq d_1 h_1^{n} \cdot k_1^{n-1} + 2\theta_2, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

On déduit immédiatement de (20) que si $\varepsilon_1 > 2\theta_1$, et $\varepsilon_2 > 2\theta_2$, alors il existe $n' \in \mathbb{N}$ tel que pour $n > n'$ $\rho_1\left(\xi_1^{(n+1)}, \xi_1^{(n)}\right) \leq \varepsilon_1$ et $\rho_2\left(\xi_2^{(n+1)}, \xi_2^{(n)}\right) \leq \varepsilon_2$ c'est-à-dire que le procédé itératif (14) peut étre arrété alors que la distance entre deux itérations successives est suffisamment petite.

Nous évaluerons à présent les distances entre les solutions $\bar{x}_1$ et $\bar{x}_2$ du système (1) et les éléments des suites $\left(\xi_1^{(n)}\right)_{s=0}^{\infty}$, respectivement

$\left(\xi_2^{(n)}\right)_{s=0}^{\infty}$. Nous supposerons que le procédé itératif (14) est arrété lorsque $\rho_1\left(\xi_1^{(n+1)}, \xi_1^{(n)}\right) \leq \varepsilon_1$ et $\rho_2\left(\xi_2^{(n+1)}, \xi_2^{(n)}\right) \leq \varepsilon_2$.

En tenant compte de ce qui a été démontre' ci-dessus et des hypothèses du Théorème 2, nous avons:

$$\begin{aligned}
\rho_1\left(\bar{x}_1, \xi_1^{(n+1)}\right) &\leq \alpha\rho_1\left(\bar{x}_1, \xi_1^{(n)}\right) + \beta\rho_2\left(\bar{x}_2, \xi_2^{(n)}\right) + \delta_1 \\
\rho_2\left(\bar{x}_2, \xi_2^{(n+1)}\right) &\leq a\rho_1\left(\bar{x}_1, \xi_1^{(n+1)}\right) + b\rho_2\left(\bar{x}_2, \xi_2^{(n)}\right) + \delta_2
\end{aligned}$$

Il résulte des inégalités ci-dessus

$$\begin{aligned}
(1-\alpha)\,\rho_1\left(\bar{x}_1, \xi_1^{(n+1)}\right) &\leq \alpha\varepsilon_1 + \beta\rho_2\left(\bar{x}_2, \xi_2^{(n)}\right) + \delta_1 \\
(1-b)\,\rho_2\left(\bar{x}_2, \xi_2^{(n+1)}\right) &\leq a\rho_1\left(\bar{x}_1, \xi_1^{(n+1)}\right) + b\varepsilon_2 + \delta_2
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
\rho_1\left(\bar{x}_1, \xi_1^{(n+1)}\right) &\leq \tfrac{\alpha\varepsilon_1}{1-\alpha} + \tfrac{\beta}{1-\alpha}\rho_2\left(\bar{x}_2, \xi_2^{(n)}\right) + \tfrac{\delta_1}{1-\alpha} \\
\rho_2\left(\bar{x}_2, \xi_2^{(n+1)}\right) &\leq \tfrac{a}{1-b}\rho_1\left(\bar{x}_1, \xi_1^{(n+1)}\right) + \tfrac{b\varepsilon_2}{1-b} + \tfrac{\delta_2}{1-b}
\end{aligned} \tag{21}$$

d'où il résulte

$$\rho_2\left(\bar{x}_2, \xi_2^{(n+1)}\right) \leq \tfrac{a(\alpha\varepsilon_1+\beta\varepsilon_2)+b(1-\alpha)\varepsilon_2}{(1-\alpha)(1-b)-a\beta} + \tfrac{\varepsilon_2}{2}. \tag{22}$$

Du fait que $n > n' + 1$, i s'ensuit que la seconde inégalité de (21) est également vraie si nous remplacons $n+1$ par n, c'est-à-dire que

$$\rho_2\left(\bar{x}_2, \xi_2^{(n)}\right) \leq \tfrac{a}{1-b}\rho_1\left(\bar{x}_1, \xi_1^{(n)}\right) + \tfrac{b\varepsilon_2}{1-b} + \tfrac{\delta_2}{1-b}$$

inégalité qui associée à l'inégalité de (21) nous donne

$$\rho_1\left(\bar{x}_1, \xi_1^{(n+1)}\right) \leq \tfrac{\beta(a\varepsilon_1+b\varepsilon_2)+\alpha(1-b)\varepsilon_1}{(1-\alpha)(1-b)-a\beta} + \tfrac{\varepsilon_1}{2} \tag{23}$$

$\square$

Bibliographie

[1] Păvăloiu, I., *Introducere în teoria aproximării soluţiilor ecuaţiilor*, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1976. ← clickable

[2] Păvăloiu, I., *La resolution des systèmes operationnelles à l'aide des méthodes itératives*, Mathematica, 11(34), (1969), 137–141. ← clickable

[3] Păvăloiu, I., *Estimation des erreurs dans la résolution numérique des systèmes d'equations dans des espaces metriques*, Seminar on Functional Analysis and Numerical Methods, Preprint Nr. 1, (1987), 121–129. ← clickable

[4] Păvăloiu, I., *La convergence de certaines methodes itératives pour resoudre certaines équations operatorielles*, Seminar on Functional analysis and Numerical Methods, Preprint Nr. 1 (1986), 127–132. ← clickable

[5] Traub, J. F., I*terative Methods for the Solution of Equations*, Prentice Hall Series in Automatic Computation, Englewood Cliffs, N. J. (1964).

[6] Urabe, M., *Convergence of numerical iteration in solution of equations,* J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A, 19 (1956), 479–489.

[7] Urabe, M., *Error estimation in numerical solution of equations by iteration process*, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I, 26, (1962), 77–91.

Résumé

Dans ce travail on fournit des délimitations pour les erreurs commises dans la résolution numérique à l'aide de la méthode de Gauss-Seidel -d'un système de deux équations à deux inconnues dans des expaces métriques.

Si (X_i, ρ_i), $i = 1, 2$, sont deux espaces métriques complets et $F_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$ et $F_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$ deux applications, alors on applique en vue de la résolution du système $x_1 = F_1(x_1, x_2)$, $x_2 = F_2(x_1, x_2)$, la méthode de Gauss-Seidel et on donne des conditions suffisantes pour la convergence du procédé utilisé.

On désingne par $D_1 \subset X_1$ et $D_2 \subset X_2$ deux ensembles bornées de X_1 et X_2 et on considère ensuite deux opérateurs $F_1^* : D_1 \times D_2 \to X_1$ $F_2^* : D_1 \times D_2 \to X_2$ qui vérifient par rapport à F_1 et F_2 les conditions: $\rho_1(F_1(x_1, x_2), F_1^*(x_1, x_2)) \le \varepsilon_1$, $\rho_2(F_2(x_1, x_2), F_2^*(x_1, x_2)) \le \varepsilon_2$ pour

chaque $(x_1, x_2) \in D_1 \times D_2$. Dans ces conditions on applique en vue de la résolution du système initial la méthode de Gauss-Seidel au système $x_1 = F_1^*(x_1, x_2)$, $x_2 = F_2^*(x_1, x_2)$. Dans ces conditions on donne des délimitations de la distance entre la solution du système et la solution approximative.

Ion Păvăloiu
Institutul de Matematică
Oficiul Poştal 1
C.P. 68
3400 Cluj-Napoca
Romania

This Note is in final form and no version of it is or will be submitted for publication elsewhere.