"BABES-BOLYAI" UNIVERSITY
Faculty of Mathematics and Physics
Research Seminars
Seminar on Functional Analysis and Numerical Methods
Preprint Nr.1, 1989, pp. 105 - 110.

SUR UNE MÉTHODE DE TYPE STEFFENSEN UTILISÉE POUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS OPÉRATIONNELLES NON-LINÉAIRES

par

Ion Păvăloiu

Soit X un espace de Banach et Y un espace linéaire normé. Pour la résolution de l'équation

(1) $$P(x) = \theta ,$$

où $P: X \to Y$ est un opérateur, et θ est l'élément nul de l'espace Y, nous considérons les méthodes itératives suivantes :

(2) $$x_{n+1} = Q_1(x_n) - [Q_1(x_n), Q_2(x_n) ; P]^{-1} P(Q_1(x_n))$$

ou

(3) $$x_{n+1} = Q_2(x_n) - [Q_1(x_n), Q_2(x_n) ; P]^{-1} P(Q_2(x_n))$$

Dans les relations (2) et (3) Q_1 et Q_2 sont deux opérateurs itératifs attachés à l'équation (1) et par $[x,y ; P]$ nous avons désigné la différence divisée de l'opérateur P sur les noeuds $x,y \in X$, [2], [3].

Pour préciser nous imposerons aux opérateurs Q_1 et Q_2 les conditions suivantes :

a) Si $\bar{x}$ est une solution de l'équation (1) alors on a $\bar{x} = Q_1(\bar{x})$ et $\bar{x} = Q_2(\bar{x})$ et réciproquement, si $\bar{x}$ est un point fixe pour les opérateurs Q_1 et Q_2 alors $\bar{x}$ est une solution de l'équation (1) ;

b) il existe les nombres $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$ tels que pour chaque $x \in X$ on a les inégalités suivantes :

$$\|Q_1(x) - x\| \leq \beta_1 \|P(x)\| \quad , \quad \|Q_2(x) - x\| \leq \beta_2 \|P(x)\| \;;$$

c) il existe les nombres réels et positifs α_1 , α_2 et aussi les nombres naturels k_1 , k_2 tels que pour chaque $x \in X$ on a les inégalités suivantes :

$$\|P(Q_1(x))\| \leq \alpha_1 \|P(x)\|^{k_1} \quad , \quad \|P(Q_2(x))\| \leq \alpha_2 \|P(x)\|^{k_2}$$

On constate facilement que dans le cas où l'on part du même élément initial $x_0 \in X$, les méthodes itératives (2) et (3) fournissent la même suite d'approximations de la solution de l'équation (1) .

Par la suite nous étudierons la convergence de la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ obtenue à l'aide de la méthode (2) ou (3) .

THÉORÈME 1. Soit $x_0 \in X$, $\delta > 0$ et $S = \{x \in X \;:\; \|x - x_0\| \leq \delta\}$

Si on peut choisir l'élément initial x_0 , le nombre réel δ et les applications Q_1 et Q_2 tels que :

i) les applications Q_1 et Q_2 remplissent la condition a) ;

ii) $Q_1(S) \subseteq S$, $Q_2(S) \subseteq S$;

iii) les applications Q_1 , Q_2 et P remplissent les conditions b) et c) pour chaque $x \in S$;

iv) pour chaque $x, y \in S$ il existe $[x,y\,;P]^{-1}$ et il existe le nombre $B > 0$, tel que pour chaque $x,y \in S$ on ait $\|[x,y;P]^{-1}\| \leq B$;

v) il existe le nombre $M > 0$, tel que pour chaque $x,y,z \in S$ on a $\|[x,y,z\,;P]\| \leq M$;

vi) $\varepsilon_0 = (MB^2\alpha_1\alpha_2)^{1/(q-1)} \cdot \|P(x_0)\| < 1$ où $q = k_1 + k_2$;

vii) $$\rho^{\frac{1}{q-1}} \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_0^{q^{i-1}} \left(B\alpha_1 \rho^{\frac{k_1-1}{1-q}} \varepsilon_0^{q^{i-1}(k_1-1)} + \beta_1 \right) \leq \delta$$

où $\rho = M B^2 \alpha_1 \cdot \alpha_2$;

alors on a les propriétés suivantes :

j) la suite $(x_n)_{n \in N}$ obtenue à l'aide de la méthode (2) ou à l'aide de la méthode (3) est convergente et si nous désignons par $\bar{x}$ la limite de la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, alors on a $P(\bar{x}) = \Theta$;

jj) si nous désignons par ε_n l'expression $\rho^{\frac{1}{q-1}} \|P(x_n)\|$, alors on a $\varepsilon_n \leq \varepsilon_0^{q^n}$ pour chaque $n = 0,1,\ldots$;

jjj) on a l'inégalité suivante :

$$\|\bar{x} - x_n\| \leq B \cdot \varepsilon_0^{q^n} \cdot \rho^{1/(1-q)} ,$$

pour chaque $n = 0,1,2,\ldots$.

Démonstration. Prouvons d'abord que dans les hypothèses du théorème les éléments de la suite $(x_n)_{n \in N}$ appartiennent à l'ensemble S .

En effet , de (2) nous déduisons :

$$\|x_1 - x_0\| \leq \|x_1 - Q_1(x_0)\| + \|Q_1(x_0) - x_0\| \leq$$

$$\beta_1 \|P(x_0)\| + B \cdot \|P(Q_1(x_0))\| \leq \left(\beta_1 + B\alpha_1 \|P(x_0)\|^{k_1 - 1} \right) \|P(x_0)\| =$$

$$\varepsilon_0 \rho^{1/(1-q)} \left(\beta_1 + B\alpha_1 \varepsilon_0^{k_1-1} \cdot \rho^{\frac{k_1-1}{1-q}} \right) \leq \delta$$

d'où il résulte que $x_1 \in S$.

En tenant compte de l'identité

$$P(x_1) = P(Q_1(x_0)) + [Q_1(x_0), Q_2(x_0)\,;P](x_1 - Q_1(x_0)) +$$

$$[Q_1(x_0), Q_2(x_0), x\,;P](x_1 - Q_1(x_0))(x_1 - Q_2(x_0))$$

et de (2) , il résulte :

$$\|P(x_1)\| \le M\|x_1 - Q_1(x_0)\|\cdot\|x_1 - Q_2(x_0)\| \le$$

$$M B^2 \alpha_1 \alpha_2 \|P(x_0)\|^q \le \rho\cdot\rho^{q/(1-q)}\cdot\varepsilon_0^q =$$

$$\rho^{1/(1-q)}\,\varepsilon_0^q$$

d'où il résulte :

$$\rho^{1/(q-1)}\cdot\|P(x_1)\| \le \varepsilon_0^q$$

c'est-à-dire

$$\varepsilon_1 \le \varepsilon_0^q .$$

Supposons que les éléments $x_1, x_2, \dots, x_n \in S$,

$$\varepsilon_i \le \varepsilon_0^{q^i}$$

et démontrons que $x_{n+1} \in S$ et $\varepsilon_{n+1} \le \varepsilon_0^{q^{n+1}}$.

En effet on a :

$$\|x_{n+1} - x_0\| \le \sum_{i=1}^{n+1}\|x_i - x_{i-1}\| .$$

Mais

$$\|x_i - x_{i-1}\| \le \|x_i - Q_1(x_{i-1})\| + \|Q_1(x_{i-1}) - x_{i-1}\| \le$$

$$B\alpha_1\|P(x_{i-1})\|^{k_1} + \beta_1\|P(x_{i-1})\| \le$$

$$\varepsilon_{i-1}\cdot\rho^{1/(1-q)}\left(\beta_1 + B\alpha_1\,\varepsilon_{i-1}^{k_1-1}\cdot\rho^{\frac{k_1-1}{1-q}}\right) \le$$

$$\varepsilon_0^{q^{i-1}}\cdot\rho^{1/(1-q)}\left(\beta_1 + B\alpha_1\cdot\varepsilon_0^{q^{i-1}(k_1-1)}\cdot\rho^{\frac{k_1-1}{1-q}}\right)$$

d'où nous déduisons que

$$\|x_{n+1} - x_0\| \le \delta$$

c'est-à-dire que $x_{n+1} \in S$.

Par suite on a :

$$\|P(x_{n+1})\| \le M B^2 \alpha_1 \alpha_2 \|P(x_n)\|^q \le \rho\cdot\rho^{q/(1-q)}\cdot\varepsilon_n^q$$

d'où il résulte l'inégalité

$$\varepsilon_{n+1} \le \varepsilon_n^q$$

c'est-à-dire

$$\varepsilon_{n+1} \le \varepsilon_0^{q^{n+1}}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Nous démontrerons maintenant que la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ fournie par la relation (2) est fondamentale .

En effet pour chaque $k \in N$ on a :

$$\|x_{n+k} - x_n\| \le \sum_{i=n+1}^{n+k}\|x_i - x_{i-1}\| \le$$

$$\varepsilon_0^{q^n}\cdot\rho^{1/(1-q)}\sum_{i=n+1}^{n+k}\varepsilon_0^{q^{i-1}-q^n}\left(B\alpha_1\rho^{\frac{k_1-1}{1-q}}\cdot\varepsilon_0^{q^{i-1}(k_1-1)} + \beta_1\right)$$

ce qui exprime que la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ est fondamental .

Soit $\bar{x} = \lim_{n\to\infty} x_n$; alors de l'inégalité ci-dessus où nous posons $n = o$ et faisons $k \to \infty$, il résulte que

$$\|\bar{x} - x_0\| \le \delta$$

c'est-à-dire $\bar{x} \in S$.

De l'inégalité

$$\varepsilon_n \le \varepsilon_0^{q^n}$$

il résulte

$$\lim_{n\to\infty} \| P(x_n) \| = 0$$

c'est-à-dire

$$P(\bar{x}) = \theta ,$$

égalité qui exprime le fait que $\bar{x}$ est une solution de l'équation (1).

De l'identité

$$P(\bar{x}) - P(x_n) = [\bar{x}, x_n ; P] (\bar{x} - x_n)$$

il résulte que

$$\| \bar{x} - x_n \| \leq B \, \| P(x_n) \| \leq B \cdot \rho^{1/(1-q)} \, \varepsilon_0^{q^n} .$$

Le théorème est donc démontré.

B I B L I O G R A P H I E

1 PAVALOIU, I , Asupra operatorilor iterativi, Studii şi Cercetări Matematice , 23 (1971) 10, 1537 - 1544.

2 PAVALOIU, I,. Introducere în teoria aproximării soluţiilor ecuaţiilor , Ed. Dacia, 1976 .

3 UL'M, S., Ob oboboscennyh razdelennîh raznostiak I , Izv. Akad. Nauk Estonskoi SSR 16 (1967) 1 , 13 - 36 .

Institutul de Calcul
Oficiul Poştal 1
C. P. 68
3400 Cluj-Napoca
Romania

This paper is in final form and no version of it is or will be submitted for publication elsewhere.