"Babeş-Bolyai" University
Faculty of Mathematics and Physics
Research Seminars
Seminar on Functional Analysis and Numerical Methods
Preprint Nr.1, 1989, pp.105-110

SUR UNE MÉTHODE DE TYPE STEFFENSEN UTILISÉE POUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS OPÉRATIONNELLES NON-LINÉAIRES

par
ION PĂVĂLOIU

Soit X un espace de Banach et Y un espace linéaire normé. Pour la résolution de l'équation

$$P(x) = \theta \tag{1}$$

où $P : X \to Y$ est un opérateur, et θ est l'élément nul de l'espace Y, nous considérons les méthodes itératives suivantes:

$$x_{n+1} = Q_1(x_n) - [Q_1(x_n), Q_2(x_n); P]^{-1} P(Q_1(x_n)) \tag{2}$$

ou

$$x_{n+1} = Q_2(x_n) - [Q_1(x_n), Q_2(x_n); P]^{-1} P(Q_2(x_n)) \tag{3}$$

Dans les relations (2) et (3) Q_1 et Q_2 sont deux opérateurs itératifs attachés à l'équation (1) et par $[x, y : P]$ nous avons désigné la différence divisée de l'opérateur P sur les noeuds $x, y \in X$, [2], [3].

Pour préciser nous imposerons aux opérateurs Q_1 et Q_2 les conditions suivantes:

a) Si $\bar{x}$ est une solution de l'équation (1) alors on a $\bar{x} = Q_1(\bar{x})$ et $\bar{x} = Q_2(\bar{x})$ et réciproquement, si $\bar{x}$ est un point fixe pour les opérateurs Q_1 et Q_2 alors $\bar{x}$ est une solution de l'équation (1);

b) il existe les nombres $\beta_1 > 0,\ \beta_2 > 0$ tels que pour chaque $x \in X$ on a les inéqualités suivantes:

$$\|Q_1(x) - x\| \leq \beta_1 \|P(x)\|, \quad \|Q_2(x) - x\| \leq \beta_2 \|P(x)\|;$$

c) il existe les nombres réels et positifs $\alpha_1 < \alpha_2$ et aussi les nombres naturels $k_1,\ k_2$ tels que pour chaque $x \in X$ on a les inégalités suivantes:

$$\|P(Q_1(x))\| \leq \alpha_1 \|P(x)\|^{k_1}, \quad \|P(Q_2(x))\| \leq \alpha_2 \|P(x)\|^{k_2}.$$

On constate facilement que dans le cas où l'on part du même élément initial $x_0 \in X$, les méthodes itératives (2) et (3) fournissent la même suite d'approximations de la solution de l'équation (1).

Par la suite nous étudierons la convergence de la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ obtenu à l'aide de la méthode (2) ou (3).

Théorème 1. *Soit $x_0 \in X,\ \delta > 0$ et $S = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq \delta\}$*

Si on peut choisir l'élément initial x_0, le nombre réel δ et les applications Q_1 et Q_2 tels que:

i) *les applications Q_1 et Q_2 remplissent la condition* a);
ii) $Q_1(S) \subseteq S,\ Q_2(S) \subseteq S$;
iii) *les applications $Q_1,\ Q_2$ et P remplissent les conditions* b) *et* c) *pour chaque $x \in S$;*
iv) *pour chaque $x, y \in S$ il existe $[x, y; P]^{-1}$ et il existe le nombre $B > 0$, tel que pour chaque $x, y \in S$ on ait $\left\| [x, y; P]^{-1} \right\| \leq B$;*
v) *il existe le nombre $M > 0$, tel que pour chaque $x, y, z \in S$ on a $\|[x, y, z; P]\| \leq M$;*
vi) $\varepsilon_0 = \left(MB^2\alpha_1\alpha_2\right)^{1/(q-1)} \cdot \|P(x_0)\| < 1$ *où* $q = k_1 + k_2$;
vii) $\rho^{\frac{1}{q-1}} \sum\limits_{i=1}^{\infty} \varepsilon_0^{q^{i-1}} \left(B\alpha_1\rho^{\frac{k_1-1}{1-q}} \varepsilon_0^{q^{i-1}(k_1-1)} + \beta_1\right) \leq \delta$ *où* $\rho = MB^2\alpha_1 \cdot \alpha_2$,

alors on a les propriétés suivantes:

j) *la suite* $(x_n)_{n\in N}$ *obtenue à l'aide de la méthode* (2) *ou a l'aide de la méthode* (3) *est convergente et si nous désignons par* $\bar{x}$ *la limite de la suite* $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, *alors on a* $P(\bar{x}) = \theta$;

jj) *si nous désignons par* ε_n*-l'expression* $\rho^{\frac{1}{q-1}} \|P(x_n)\|$, *alors on a* $\varepsilon_n \leq \varepsilon_0^{q^n}$ *pour chaque* $n = 0, 1, \ldots$;

jjj) *on a l'inégalité suivante:*

$$\|\bar{x} - x_n\| \leq B \cdot \varepsilon_0^{q^n} \cdot \rho^{\frac{1}{1-q}},$$

pour chaque $n = 0, 1, 2, \ldots$

Démonstration. Prouvons d'abord que dans les hypothèses du théorème les éléments de la suite $(x_n)_{n\in N}$ appartiennent à l'ensemble S.

En effet, de (2) nous déduisons:

$$\begin{aligned}
\|x_1 - x_0\| &\leq \|x_1 - Q_1(x_0)\| + \|Q_1(x_0) - x_0\| \\
&\leq \beta_1 \|P(x_0)\| + B \|P(Q_1(x_0))\| \\
&\leq \left(\beta_1 + B\alpha_1 \|P(x_0)\|^{k_1-1}\right) \|P(x_0)\| \\
&= \varepsilon_0 \rho^{\frac{1}{1-q}} \left(\beta_1 + B\alpha_1 \varepsilon_0^{k_1-1} \cdot \rho^{\frac{k_1-1}{1-q}}\right) \leq \delta
\end{aligned}$$

d'où il résulte que $x_1 \in S$.

En tenant compte de l'identité

$$\begin{aligned}
P(x_1) =& P(Q_1(x_0)) + [Q_1(x_0), Q_2(x_0); P](x_1 - Q_1(x_0)) \\
&+ [Q_1(x_0), Q_2(x_0), x; P](x_1 - Q_1(x_0))(x_1 - Q_2(x_0))
\end{aligned}$$

et de (2), il résulte:

$$\begin{aligned}\|P(x_1)\| &\leq M\|x_1 - Q_1(x_0)\| \cdot \|x_1 - Q_2(x_0)\| \\ &\leq MB^2\alpha_1\alpha_2 \cdot \|P(x_0)\|^q \leq \rho \cdot \rho^{\frac{q}{1-q}} \cdot \varepsilon_0^q \\ &= \rho^{\frac{1}{1-q}} \cdot \varepsilon_0^q\end{aligned}$$

d'où il résulte:

$$\rho^{\frac{1}{1-q}}\|P(x_1)\| \leq \varepsilon_0^q$$

c'est-à-dire

$$\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0^q.$$

Supposons que les éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S$,

$$\varepsilon_i \leq \varepsilon_0^{q^i}$$

et démontrons que $x_{n+1} \in S$ et $\varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon_0^{q^{n+1}}$.

En effet on a:

$$\|x_{n+1} - x_0\| \leq \sum_{i=1}^{n+1} \|x_i - x_{i-1}\|.$$

Mais

$$\begin{aligned}\|x_i - x_{i-1}\| &\leq \|x_i - Q_1(x_{i-1})\| + \|Q_1(x_{i-1}) - x_{i-1}\| \\ &\leq B\alpha_1\|P(x_{i-1})\|^{k_1} + \beta_1\|P(x_{i-1})\| \\ &\leq \varepsilon_{i-1} \cdot \rho^{\frac{1}{1-q}}\left(\beta_1 + B\alpha_1\varepsilon_{i-1}^{k_1-1} \cdot \rho^{\frac{k_1-1}{1-q}}\right) \\ &\leq \varepsilon_0^{q^{i-1}} \cdot \rho^{\frac{1}{1-q}}\left(\beta_1 + B\alpha_1 \cdot \varepsilon_0^{q^{i-1}(k_1-1)}\rho^{\frac{k_1-1}{1-q}}\right)\end{aligned}$$

d'où nous déduisons que

$$\|x_{n+1} - x_0\| \leq \delta$$

c'est-à-dire que $x_{n+1} \in S$.

Par suite on a:

$$\|P(x_{n+1})\| \le MB^2\alpha_1\alpha_2 \|P(x_n)\|^q \le \rho \cdot \rho^{\frac{q}{1-q}} \cdot \varepsilon_n^q$$

d'où il résulte l'inégalité

$$\varepsilon_{n+1} \le \varepsilon_n^q$$

c'est-à-dire

$$\varepsilon_{n+1} \le \varepsilon_0^{q^{n+1}}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Nous démontrerons maintenant que la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ fournie par la relation (2) est fondamentale.

En effet pour chaque $k \in \mathbb{N}$ on a:

$$\begin{aligned} \|x_{n+k} - x_n\| &\le \sum_{i=n+1}^{n+k} \|x_i - x_{i-1}\| \\ &\le \varepsilon_0^{q^n} \cdot \rho^{\frac{1}{1-q}} \sum_{i=n+1}^{n+k} \varepsilon_0^{q^{i-1}-q^n} \left(B\alpha_1\rho^{\frac{k_1-1}{1-q}} \cdot \varepsilon_0^{q^{i-1}(k_1-1)} + \beta_1\right) \end{aligned}$$

ce qui exprime que la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ est fondamental.

Soit $\bar{x} = \lim_{n\to\infty} x_n$; alors de l'inégalité ci-dessus où nous posons $n = 0$ et faisons $k \to \infty$, il résulte que

$$\|\bar{x} - x_0\| \le \delta$$

c'est-à-dire $\bar{x} \in S$.

De l'inégalité

$$\varepsilon_n \le \varepsilon_0^{q^n}$$

il résulte

$$\lim_{n\to\infty}\|P(x_n)\|=0$$

c'est-à-dire $P(\bar{x})=\theta$, égalité qui exprime le fait que $\bar{x}$ est une solution de l'équation (1).

De l'identité

$$P(\bar{x})-P(x_n)=[\bar{x},x_n;P](\bar{x}-x_n)$$

il résulte que

$$\|\bar{x}-x_n\|\leq B\|P(x_n)\|\leq B\cdot\rho^{\frac{1}{1-q}}\varepsilon_0^{q^n}.$$

Le théorème est donc démontré. □ □

Bibliographie

clickable → [1] Păvăloiu, I., *Asupra operatorilor iterativi*, Studii şi Cercetări Matematice, 23 (1971), 10, 1537–1544.

clickable → [2] Păvăloiu, I., *Introducere în teoria aproximării soluţiilor ecuaţiilor*, Ed. Dacia, 1976.

[3] Ul'm, S., *Ob oboboscennyh rezdelennîh reznostiak I*, Izv. Akad. Nauk Estonskoi SSR 16 (1867), 1, 13–36.

Institutul de Calcul
Oficiul Poştal 1
C.P. 68
3400 Cluj-Napoca
Romania

This paper is in final form and no version of it is or will be submitted for publication elsewhere.