

SUR DES MÉTHODES ITÉRATIVES OPTIMALES

par
ION PĂVĂLOIU et IOAN ŞERB

Dans ce travail nous étudions des méthodes itératives pour la résolution de l'équation:

$$(1) \quad x = \varphi(x),$$

où $\varphi : I \rightarrow X$ est une application donnée et (X, ρ) est un espace métrique complet.

A l'application φ nous attacherons une application $F : X^k \rightarrow X$, qui a la propriété suivante:

$$(2) \quad F(x, x, \dots, x) = \varphi(x), \quad x \in X.$$

Pour résoudre l'équation (1) nous considérons la méthode itérative à plusieurs pas, de la forme:

$$(3) \quad x_{n+1} = F(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k+1}), \quad n = k-1, k, k+1, \dots$$

Si i_0, i_1, \dots, i_{k-1} est une permutation des nombres $0, 1, \dots, k-1$, alors $i_0 + n - k + 1, i_1 + n - k + 1, \dots, i_{k-1} + n - k + 1$ sera une permutation qui correspond aux nombres $n - k + 1, n - k + 2, \dots, n$.

Pour une telle permutation on obtient une nouvelle méthode itérative à plusieurs pas:

$$(4) \quad x_{n+1} = F(x_{i_0+n-k+1}, x_{i_1+n-k+1}, \dots, x_{i_{k-1}+n-k+1}),$$

où $n = k-1, k, \dots$

De cette manière, à partir de l'application donnée F , on obtient $k!$ méthodes itératives, qui sont en général distinctes.

Si dans certaines conditions imposées à l'application F , toutes ces $k!$ méthodes itératives convergent vers une solution de l'équation (1),

le problème se pose de choisir la méthode pour laquelle on obtient la meilleure délimitation de l'erreur.

Dans ce qui suit nous supposons que F vérifie la relation suivante:

$$(5) \quad \rho(F(u_1, u_2, \dots, u_k), F(v_1, v_2, \dots, v_k)) \leq \left(\sum_{i=1}^k a_i \rho(u_i, v_i)^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}},$$

quele que soient les éléments $u_1, u_2, \dots, u_k, v_1, v_2, \dots, v_k \in X$, où $a_i \geq 0$ et $\beta > 0$ sont données et $0 < \sum_{i=1}^k a_i < 1$.

On remarque que si F vérifie les conditions (2) et (5) alors φ vérifie la condition:

$$\begin{aligned} \rho(\varphi(x), \varphi(y)) &= \rho(F(x, x, \dots, x), F(y, y, \dots, y)) \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^k a_i \rho(x, y)^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} = \left(\sum_{i=1}^k a_i \right)^{\frac{1}{\beta}} \rho(x, y), \end{aligned}$$

et du fait que $0 < \sum_{i=1}^k a_i < 1$, il résulte que φ est une contraction, c'est-à-dire que l'équation (1) a une seule solution.

D'autre part, si nous désignons par $\mathcal{F}_\beta(a_1, a_2, \dots, a_k)$ l'ensemble des fonctions F vérifiant les conditions (2) et (5), alors si $\beta < \beta'$ il résulte $\mathcal{F}_\beta(a_1, a_2, \dots, a_k) \subset \mathcal{F}_{\beta'}(a_1, a_2, \dots, a_k)$.

Pour $\beta < \beta'$ on déduit de l'inégalité de Hölder:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^k a_i \rho(u_i, v_i)^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} &= \left[\sum_{i=1}^k \left(a_i^{\frac{\beta}{\beta'}} \rho(u_i, v_i)^\beta \right) a_i^{1-\frac{\beta}{\beta'}} \right]^{\frac{1}{\beta}} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^k a_i \rho(u_i, v_i)^{\beta'} \right)^{\frac{1}{\beta'}} \left[\sum_{i=1}^k \left(a_i^{1-\frac{\beta}{\beta'}} \right)^{\frac{\beta'}{\beta'-\beta}} \right]^{\frac{\beta'-\beta}{\beta\beta'}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^k a_i \rho(u_i, v_i)^{\beta'} \right)^{\frac{1}{\beta'}} \left(\sum_{i=1}^k a_i \right)^{\frac{\beta'-\beta}{\beta\beta'}} \\ &< \left(\sum_{i=1}^k a_i \rho(u_i, v_i)^{\beta'} \right)^{\frac{1}{\beta'}} \end{aligned}$$

donc $\mathcal{F}_\beta(a_1, a_2, \dots, a_k) \subset \mathcal{F}_{\beta'}(a_1, a_2, \dots, a_k)$.

Considérons les nombres $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, k$, qui vérifient les relations:

$$(6) \quad \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_{k-1} \geq \alpha_k \geq 0,$$

et

$$(6') \quad 0 < \sum_{i=1}^k \alpha_i < 1.$$

Nous considérons à présent les équations

$$(7) \quad P(u) = u^k - \alpha_1 u^{k-1} - \dots - \alpha_{k-1} u - \alpha_k = 0,$$

$$(8) \quad Q(u) = u^k - \alpha_k u^{k-1} - \dots - \alpha_2 u - \alpha_1 = 0,$$

et

$$(9) \quad R(u) = u^k - \alpha_{i_1} u^{k-1} - \dots - \alpha_{i_{k-1}} u - \alpha_{i_k} = 0,$$

où i_1, i_2, \dots, i_k est une permutation quelconque des nombres $1, 2, \dots, k$.

LEMME. *Si $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ vérifient les conditions (6) et (6') alors chaque équation de la forme (9) a une seule racine positive. Si nous désignons par a la racine positive de l'équation (7) et par b la racine positive de l'équation (8), alors la racine positive c de l'équation (9) vérifie les inégalités suivantes:*

$$(10) \quad 0 < a \leq c \leq b < 1.$$

Démonstration. Soit i_1, i_2, \dots, i_k une permutation des nombres $1, 2, \dots, k$ et soit s le plus grand indice pour lequel $\alpha_{i_s} \neq 0$.

Nous avons évidemment $\alpha_{i_{s+1}} = \alpha_{i_{s+2}} = \dots = \alpha_{i_k} = 0$ et $\alpha_{i_s} \neq 0$.

Considérons la fonction $\psi(u) = R(u)/u^{k-s}$. Alors $\psi(0) = -\alpha_{i_s} < 0$ et $\psi(1) = R(1) = 1 - \alpha_{i_1} - \dots - \alpha_{i_{k-1}} - \alpha_{i_k} = 1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_k > 0$.

Donc $\psi(u)$ a une racine positive dans l'intervalle $(0, 1)$. Il résulte que $R(u) = u^{k-s}\psi(u)$ a une racine dans l'intervalle $(0, 1)$.

L'unicité de cette racine résulte immédiatement en considérant l'équation $f(v) = -v^k R(1/v) = 0$, pour laquelle $f'(v) > 0$ si $v > 0$ et $f(0) = -1$.

Pour prouver l'inégalité (10) il suffit de montrer que $R(a) \leq R(c) = 0$ et $R(b) \geq R(c) = 0$. En effet, on a:

$$\begin{aligned} R(a) &= a^k - \alpha_{i_1} a^{k-1} - \dots - \alpha_{i_{k-1}} a - \alpha_{i_k} \\ &= (\alpha_1 - \alpha_{i_1}) a^{k-1} + (\alpha_2 - \alpha_{i_2}) a^{k-2} + \dots + \alpha_k - \alpha_{i_k} \\ &= (a-1)(\alpha_1 - \alpha_{i_1}) a^{k-2} + (\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_{i_1} - \alpha_{i_2}) a^{k-3} + \dots + \\ &\quad + (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{k-2} - \alpha_{i_1} - \alpha_{i_2} - \dots - \alpha_{i_{k-2}}) a + \\ &\quad + (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{k-1} - \alpha_{i_1} - \alpha_{i_2} - \dots - \alpha_{i_{k-1}}) \leq 0, \end{aligned}$$

parce que $0 < a < 1$ et de (6) il résulte que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s - \alpha_{i_1} - \alpha_{i_2} - \dots - \alpha_{i_s} \geq 0;$$

pour chaque $s = 1, 2, \dots, k-1$.

De manière analogue on montre que $R(b) \geq 0$, *Q.E.D.*

Maintenant, nous rangeons les coefficients a_i de (5) en ordre décroissant, c'est-à-dire:

$$(11) \quad a_{i_1} \geq a_{i_2} \geq \dots \geq a_{i_k} \geq 0,$$

et nous écrivons

$$(11') \quad \alpha_s = a_{i_s}, \quad s = 1, 2, \dots, k.$$

Nous considérons l'application $G : X^k \rightarrow X$, donnée par la relation

$$(12) \quad G(u_1, u_2, \dots, u_k) = F(u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_k}),$$

où i_1, i_2, \dots, i_k est la permutation des nombres $1, 2, \dots, k$ qui correspond à la relation (11). On obtient alors de (5), pour G , la condition

$$(13) \quad \rho(G(u_1, u_2, \dots, u_k), G(v_1, v_2, \dots, v_k)) \leq \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \rho(u_i, v_i)^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}},$$

quels que soient les éléments $u_1, u_2, \dots, u_k, v_1, v_2, \dots, v_k \in X$, où

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_k \geq 0, \quad \beta > 0, \dots, 0 < \sum_{i=1}^k \alpha_i < 1.$$

Pour résoudre l'équation (1) nous considérons la méthode itérative suivante:

$$(14) \quad x_{n+1} = G(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k+1}), \quad n = k-1, k, \dots,$$

où $x_0, x_1, \dots, x_{k-1} \in X$.

Si nous écrivons $q_i = \rho(x_i, x_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots$, alors de (13) et (14) on obtient

$$(15) \quad q_i = \left(\sum_{s=1}^k \alpha_s q_{i-s}^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}}, \quad i = k, k+1, \dots$$

Si dans l'équation (7) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sont données par (11') et si a est la racine positive de l'équation (7), alors $a^{\frac{1}{\beta}} \in (0, 1)$.

Soit C une constante positive telle que:

$$q_s \leq C a^{s/\beta} \text{ pour } s = 0, 1, \dots, k-1.$$

De (15) on obtient:

$$\begin{aligned} q_i &\leq \left(\sum_{s=1}^k \alpha_s q_{i-s}^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \leq \left(C \sum_{s=1}^k \alpha_s a^{i-s} \right)^{\frac{1}{\beta}} \\ &= C a^{(i-k)/\beta} \left(\sum_{s=1}^k \alpha_s a^{k-s} \right)^{\frac{1}{\beta}} = C a^{(i-k)/\beta} a^{k/\beta} = C a^{i/\beta}, \end{aligned}$$

$i = k, k+1, \dots$. Puisque $a^{1/\beta} \in (0, 1)$ il résulte que la suite $(x_n)_{n=0}^\infty$ est fondamentale. Désignons par \bar{x} sa limite. Il est évident que \bar{x} est l'unique solution de l'équation (1) et

$$(16) \quad \rho(\bar{x}, x_n) \leq \frac{C a^{n/\beta}}{1 - a^{1/\beta}}.$$

□

Alors, en utilisant le lemma on obtient le théorème suivante:

THÉORÈME. *Supposons que $F \in \mathcal{F}_\beta(a_1, a_2, \dots, a_k)$ et que l'on donne les $k!$ méthodes itératives de la forme (4), attachées à F .*

La méthode itérative pour laquelle on obtient la meilleure délimitation de l'erreur est celle donnée par (14), avec G définie par (12) et qui correspond à l'ordre décroissante de la suite des coefficients a_i , $i = 1, 2, \dots, k$, de (5).

Remarques. 1) Parce que, de la $F \in \mathcal{F}_\beta(a_1, a_2, \dots, a_k)$ il résulte que φ est une contraction, avec la constante de Lipschitz $\left(\sum_{i=1}^k a_i \right)^{1/\beta}$, il est

clair que la méthode itérative

$$(17) \quad x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad x_0 \in X, \quad n = 0, 1, \dots$$

converge vers la solution \bar{x} de l'équation (1). De plus, nous avons

$$(18) \quad \rho(\bar{x}, x_n) \leq C_1 \frac{\left(\sum_{i=1}^k a_i\right)^{n/\beta}}{1 - \left(\sum_{i=1}^k a_i\right)^{1/\beta}}.$$

Nous démontrerons que $\sum_{i=1}^k a_i \leq a$, où a est la solution de l'équation (7), avec α_s , $s = 1, 2, \dots, k$ données par la formule (11').

On a:

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^k a_i\right) &= \\ &= \left(\sum_{i=1}^k a_i\right)^k - \alpha_1 \left(\sum_{i=1}^k a_i\right)^{k-1} - \alpha_2 \left(\sum_{i=1}^k a_i\right)^{k-2} - \dots - \alpha_{k-1} \left(\sum_{i=1}^k a_i\right) - \alpha_k \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^k a_i\right)^k - \alpha_1 \left(\sum_{i=1}^k a_i\right)^{k-1} - \alpha_2 \left(\sum_{i=1}^k a_i\right)^{k-1} - \dots - \alpha_{k-1} \left(\sum_{i=1}^k a_i\right)^{k-1} - \alpha_k \left(\sum_{i=1}^k a_i\right)^{k-1} \\ &= \left(\sum_{i=1}^k a_i\right)^k - \left(\sum_{i=1}^k a_i\right)^k = 0, \end{aligned}$$

d'où il résulte que $\sum_{i=1}^k a_i \leq a$.

Soit maintenant $F \in \mathcal{F}_\beta(a_1, a_2, \dots, a_k)$ et $\varphi(x) = F(x, x, \dots, x)$. Les formules (16) et (18) valables pour une métrique quelconque et pour chaque paire (F, φ) , avec les propriétés ci-dessus, nous montrent que pour la méthode itérative (17) on obtient une délimitation de l'erreur meilleure que dans le cas des autres méthodes de la forme (4). Ceci ne signifie pas que pour chaque choix des points initiaux et chaque application F , la méthode (17) converge plus vite que toutes les méthodes itératives de la forme (4).

Soit, par exemple, $X = \mathbb{R}$, $\rho = |\cdot|$, $\varphi(x) = \frac{1}{4} \sin x$, $F(x, y) = \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2}$. On a

$$|F(x_1, y_1) - F(x_2, y_2)| \leq \frac{1}{4} |x_1 - x_2| + \frac{1}{4} |y_1 - y_2|,$$

pour chaque $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$; $F \in \mathcal{F}_1\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ et $F(x, x) = \varphi(x)$.

On considère les méthodes itératives suivantes:

$$(19) \quad x_{n+1} = \frac{1}{4} \sin x_n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad x_0 = \frac{\pi}{2},$$

$$(20) \quad x_{n+2} = \frac{1}{2} \sin \frac{x_{n+1}}{2} \cos \frac{x_n}{2}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}, \quad x_1 = 0,$$

$$(21) \quad x_{n+2} = \frac{1}{2} \cos \frac{x_{n+1}}{2} \sin \frac{x_n}{2}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}, \quad x_1 = 0.$$

Dans ce cas la suite (20) converge plus vite que la suite (19) où la suite (21).

2) Il existe des méthodes itératives de la forme (4) respectivement (17), pour lesquelles les délimitations (16) respectivement (18) ne peuvent pas s'améliorer, c'est-à-dire:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \rho(\bar{x}, x_n)^{1/n} = a^{1/\beta},$$

respectivement

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \rho(\bar{x}, x_n)^{1/n} = \left(\sum_{i=1}^k a_i \right)^{1/\beta}.$$

Exemple. Soit $X = \mathbb{R}$, $\rho = |\cdot|$, $\varphi(x) = \frac{5}{6}x$,

$$F(x, y) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y,$$

$$F(x, x) = \varphi(x),$$

$$|F(x_1, y_1) - F(x_2, y_2)| \leq \frac{1}{2}|x_1 - x_2| + \frac{1}{3}|y_1 - y_2|, \quad \beta = 1.$$

Soit

$$(22) \quad x_{n+1} = \frac{5}{6}x_n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad x_0 = 1.$$

$$(23) \quad x_{n+2} = \frac{1}{2}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = 1.$$

$$(24) \quad x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{1}{2}x_n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = 1.$$

Dans ce cas on obtient respectivement les formules:

$$(22') \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^{\frac{1}{n}} = \frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3},$$

$$(23') \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{1/n} = a,$$

où a est la racine positive de l'équation $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3} = 0$, c'est-à-dire $a = \frac{3+\sqrt{57}}{12}$. De la même manière on obtient

$$(24') \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{1/n} = b,$$

ou b est la racine positive de l'équation caractéristique $x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2} = 0$ c'est-à-dire $b = \frac{1+\sqrt{19}}{6}$. Il est clair que $\frac{5}{6} < \frac{3+\sqrt{57}}{12} < \frac{1+\sqrt{19}}{6}$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] I. Păvăloiu, *Introducere în teoria aproximării soluțiilor ecuațiilor*, Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1976. [☐](#) ← clickable
- [2] I. Păvăloiu, *Rezolvarea ecuațiilor prin interpolare*, Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1981. [☐](#) ← clickable
- [3] Weinschke, J. H., *Über eine Klasse von Iterationsverfahren*, Num. Math., 6 (1964), 395–404.