"BABES-BOLYAI" UNIVERSITY, Faculty of Mathematics
Research Seminars
Seminar on Functional Analysis and Numerical Methods
Preprint Nr. 1, 1986, pp. 133 - 136.

SUR L'ESTIMATION DES ERREURS EN CONVERGENCE NUMÉRIQUE DE CERTAINES MÉTHODES D'ITÉRATION

par

Ion Păvăloiu

Soit E un espace de Banach et

$$x = \lambda D(x) + y \ , \ D(\theta) = \theta \ , \tag{1}$$

une équation opératorielle, où $\lambda \in \mathbb{R}$, $D : E \to E$, $x, y \in E$ et θ est l'élément neutre de l'espace E.

En vue de la résolution de l'équation (1) nous considérons le procédé itératif suivant :

$$x_{n+1} = \lambda D(x_n) + y \ , \quad n = 0, 1, \dots , \quad x_0 = y. \tag{2}$$

Nous désignons par $S = \{x \in E \ ; \ \|x\| \leq \rho\}$ la sphère de rayon ρ et centre θ de l'espace E.

Concernant la convergence du procédé d'itération (2) nous nous servirons du théorème suivant [1]

THÉORÈME 1. <u>Si l'application</u> D <u>et l'élément</u> y <u>de l'équation</u> (1) <u>vérifient les conditions</u> :

i. $\|D(x_1) - D(x_2)\| \leq C(\rho)\|x_1 - x_2\|$ <u>pour tous les</u> $x_1, x_2 \in S(\theta, \ )$ <u>où</u> $C : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ <u>est une fonction-nélle</u> ;

ii. $\gamma = |\lambda| \, C(\rho) < 1$;

iii. $\|y\| \leq (1-\gamma)\rho$,

alors l'équation (1) admet une seule solution $\bar{x} \in S(0,\rho)$.

Cette solution s'obtient comme limite de la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ générée par la méthode (2) et on a l'estimation

(3) $\|\bar{x} - x_n\| \leq \dfrac{\gamma^{n+1}}{1-\gamma}\|y\|$; $n = 0, 1, \dots$.

Soit à présent $D_\varepsilon : E \to E$ une application qui vérifie les conditions:

i_1. $\|D(x) - D_\varepsilon(x)\| \leq \eta_1(\varepsilon,\rho)$ pour tout $x \in S(0,\rho)$ où

$\eta_1 : [0,+\infty) \times [0,+\infty)$ et $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \eta_1(\varepsilon,\rho) = 0$, $\forall \rho > 0$

ii_1. $\|D_\varepsilon(x_1) - D_\varepsilon(x_2)\| \leq C_\varepsilon(\rho)\|x_1 - x_2\|$, pour tout

$x_1, x_2 \in S(0,\rho)$ où $C_\varepsilon : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$;

iii_1. $|C(\rho) - C_\varepsilon(\rho)| < \eta_2(\varepsilon)$ où $\eta_2 : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ et

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \eta_2(\varepsilon) = 0$;

iv_1. Nous considérons un élément pour lequel

$\|y - y_\varepsilon\| \leq \eta_3(\varepsilon)$ où $\eta_3 : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ et

$\lim \eta_3(\varepsilon) = 0$.

En vue de la résolution de l'équation (1) nous considérerons, à la place du procédé itératif (2) le procédé itératif suivant:

(4) $\xi_{n+1} = \lambda D_\varepsilon(\xi_n) + y_\varepsilon$, $n = 0, 1, \dots$, $\xi_0 = y_\varepsilon$.

Concernant la convergence du procédé (4) on a le théoreme suivant:

THÉORÈME 2. Si les conditions du théorème 1 sont remplies, l'opérateur D_ε et l'élément y_ε vérifient les conditions $i_1 - iv_1$

et si

(5) $\delta = (1-\gamma)\rho - \|y\| > 0$,

alors il existe un $\bar{\varepsilon} > 0$, tel que pour tout $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$ on a

(6) $\gamma_\varepsilon = |\lambda| C_\varepsilon(\rho) \leq \gamma + |\lambda|\eta_2(\varepsilon) < 1$;

et

(7) $\|y_\varepsilon\| \leq (1 - \gamma_\varepsilon)\rho$

Démonstration. En effet, du fait que $\gamma = |\lambda| C(\rho) < 1$ et $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \eta_2(\varepsilon) = 0$ il s'ensuit qu'il existe un nombre $\bar{\varepsilon}_1 > 0$ tel que pour $\varepsilon < \bar{\varepsilon}_1$ on ait

$$\gamma_\varepsilon = |\lambda| C_\varepsilon(\rho) \leq |\lambda| C(\rho) + |\lambda|\eta_2(\varepsilon) < 1$$

et

$$\|y_\varepsilon\| \leq \|y\| + \eta_3(\varepsilon) \leq (1-\gamma)\rho - \delta + \eta_3(\varepsilon) \leq$$
$$(1-\gamma_\varepsilon)\rho + |\lambda|\eta_2(\varepsilon)\rho + \eta_3(\varepsilon) - \delta \leq (1-\gamma_\varepsilon)\rho$$

pour $\varepsilon < \bar{\varepsilon}_2$ parce que $\eta_3(\varepsilon) \to 0$ pour $\varepsilon \to 0$ et $\eta_2(\varepsilon) \to 0$ pour $\varepsilon \to 0$.

Si l'on prend maintenant

$$\bar{\varepsilon} = \min\{\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2\}$$

alors le théorème est démontré. Les relations (6) et (7) assurent la convergence de la suite $(\xi_n)_{n=0}^{\infty}$ déterminée à l'aide du procédé (4).

Nous montrons à présent que dans les conditions du théorème 2 on a l'estimation suivante :

(8) $\|\bar{x} - \xi_n\| \leq \dfrac{|\lambda| C(\rho)\|\xi_n - \xi_{n-1}\| + |\lambda|\eta_1(\varepsilon,\rho) + \eta_3(\varepsilon)}{1-\gamma}$

En effet, nous avons

$$\|\bar{x} - \xi_n\| \leq |\lambda| \| D(\bar{x}) - D_\varepsilon(\xi_{n-1})\| + \|y - y_\varepsilon\| \leq$$

$$|\lambda| \alpha(\rho) \|\bar{x} - \xi_n\| + |\lambda| \alpha(\rho) \|\xi_n - \xi_{n-1}\| + |\lambda| \eta_1(\varepsilon,\rho) + \eta_3(\varepsilon)$$

et l'inégalité (8) en résulte. Il résulte de (8) pour $n \to \infty$

$$\|\bar{x} - \bar{\xi}\| \leq \frac{|\lambda| \eta_1(\varepsilon,\rho) + \eta_3(\varepsilon)}{1 - \tau}$$

où $\bar{\xi} = \lim_{n\to\infty} \xi_n$.

B I B L I O G R A P H I E

[1]. Babici, D.M. , Ivanov, V.N., Oţenca polnoi progresnosti pri reshenia nelineinyh operatornyh uravnenii metodov prostoi iteraţii. Jurnal vycislitelnoi matematiki i matematiceskoi fiziki 7, 5, 988-1000 (1967).

[2]. Păvăloiu, I., Introducere în teoria aproximării soluţiilor ecuaţiilor. Editura DACIA Cluj-Napoca 1976.

[3]. Urabe, M., Error Estimation in Numerical Solution of Equations by Iteration Process , J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I, 26, 77-91 (1962).