

LA RÉOLUTION DES ÉQUATIONS PAR INTERPOLATION

par
ION PĂVĂLOIU

1. LA NOTATION DE DIFFÉRENCE DIVISÉE.

Soient X et Y deux espaces linéaires normés et $G : X \rightarrow Y$ une application. Nous considérons $n + 1$ éléments distincts de l'espace X

$$(1) \quad x_1, x_2, \dots, x_{n+1}.$$

Nous désignons par $L(X, Y)$ l'ensemble des applications linéaires et continues définies sur X et à valeurs en Y et nous définissons par récurrence les ensembles suivants:

$$L_i(X, Y) = L(X, L_{i-1}(X, Y)), \quad i = 2, 3, \dots$$

où

$$L_1(X, Y) = L(X, Y).$$

Autrement dit les ensembles $L_i(X, Y)$ sont les espaces des applications i -linéaires et continues définies sur X et à valeurs en Y .

DÉFINITION 1. L'application $[\cdot, \cdot; G] : X^2 \rightarrow L(X, Y)$ s'appelle *différence divisée d'ordre un de l'approximation G sur les points x_i, x_j du système (1)* si

1)

$$[x_i, x_j; G](x_j - x_i) = G(x_j) - G(x_i)$$

2) *s'il existe la dérivée au sens de Fréchet de l'application G sur le point x_i , alors $[x_i, x_i; G] = G'(x_i)$.*

Nous avons défini ci-dessus la différence divisée d'ordre un de l'application G sur deux éléments arbitraires du système (1).

En considérant maintenant des points consécutifs du système (1) nous pouvons considérer les différences divisées suivantes:

$$[x_1, x_2; G], [x_2, x_3; G], \dots, [x_n, x_{n+1}; G].$$

A l'aide des différences divisées définies ci-dessus nous définissons la notion de différence divisée d'ordre n ($n > 1$) de l'application G .

Nous supposons que nous avons défini l'application $[\cdot, \cdot, \dots, \cdot; G] : X^{i+1} \rightarrow L_i(X, Y)$ à l'aide de laquelle nous pouvons définir les différences divisées d'ordre i de l'application G sur $i + 1$ éléments quelconques du système (1).

Soient $[x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+i+1}; G]$ et $[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+i}; G]$ deux différences divisées d'ordre i sur les points $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+i+1}$ respectivement $x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+i}$ du système (1).

DÉFINITION 2. L'application $[\cdot, \cdot, \dots, \cdot; G] : X^{i+2} \rightarrow L_{i+1}(X, Y)$ s'appelle différence divisée d'ordre $i + 1$ de l'application G sur les points $x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+i+1}$, si

1)

$$\begin{aligned} [x_k, \dots, x_{k+i+1}; G](x_{k+i+1} - x_k) = \\ = [x_{k+1}, \dots, x_{k+i+1}; G] - [x_k, \dots, x_{k+i}; G] \end{aligned}$$

2) s'il existe la dérivée au sens de Fréchet d'ordre $i + 1$ de l'application G sur le point x_i , alors:

$$[x_s, x_s, \dots, x_s; G] = \frac{1}{(i+1)!} G^{(i+1)}(x_s).$$

Pour pouvoir utiliser ces différences divisées à la construction des polynômes d'interpolation il est nécessaire d'introduire la notion de différence divisée symétrique par rapport aux points considérés.

DÉFINITION 3. La différence divisée $[x_1, x_2, \dots, x_k; G]$ où x_1, x_2, \dots, x_k sont des points du système (1) est dite symétrique par rapport à les points, si on a:

$$(2) \quad [x_1, x_2, \dots, x_k; G] = [x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}; G]$$

pour chaque permutation (i_1, i_2, \dots, i_k) des nombres $(1, 2, 3, \dots, k)$.

Si $X = Y = \mathbb{R}$ alors, l'égalité (2) est toujours vérifiée. Alors les différences divisées des fonctions réelles d'une variable réelle sont symétrique par rapport aux points considérés.

Si nous supposons maintenant par exemple $X = \mathbb{R}^2$ et $Y = \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et si nous désignons par (u', v') , (u'', v'') deux points de \mathbb{R}^2 , nous avons

$$(3) \quad [x', x''; f] = \left[\frac{f(u', v') - f(u'', v')}{u' - u''}, \frac{f(u'', v') - f(u', v'')}{v' - v''} \right]$$

où

$$x' = (u', v') \text{ et } x'' = (u'', v'').$$

On montre que la différence divisée (3) vérifie les conditions (1) et (2) de la définition 1, mais qu'elle n'est pas symétrique par rapport aux points x' et x'' .

Mais nous pouvons construire une différence divisée sur ces points qui est symétrique. Par exemple si nous considérons la différence divisée définie par:

$$[x', x''; f] = \frac{1}{2} \left[\frac{f(u', v') - f(u'', v')}{u' - u''} + \frac{f(u'', v') - f(u', v'')}{v'' - v'} \right. \\ \left. \frac{f(u'', v') - f(u', v'')}{v' - v''} + \frac{f(u', v'') - f(u', v')}{v'' - v'} \right]$$

alors on a évidemment

$$[x', x''; f] = [x'', x'; f]$$

Soit maintenant $X = Y = C[0, 1]$ où par $C[0, 1]$ nous désignons l'ensemble des fonctions définies et continues sur l'intervalle $[0, 1]$. Considérons maintenant l'application $F : C[0, 1] \times C[0, 1]$ donnée par l'égalité suivante:

$$F(x)(s) = \int_0^1 K(s, t, x(t)) dt$$

où $K : [0, 1] \times [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur tout son domaine de définition.

Soit maintenant $n + 1$ -fonctions

$$(4) \quad x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$$

de l'espace $C[0, 1]$ qui ont la propriété que $x_j(t) \neq x_i(t)$ pour $i \neq j$ et pour chaque $t \in [0, 1]$.

La différence divisée de l'application F sur les fonctions x_i, x_j du système (4) peut se définir à l'aide de l'égalité suivante:

$$[x_1, x_2; F] h(s) = \int_0^1 \frac{K(s, t, x_2(t)) - K(s, t, x_1(t))}{x_2(t) - x_1(t)} h(t) dt$$

où

$$h \in C[0, 1].$$

On montre immédiatement que l'application linéaire définie ci-dessus possède les propriétés (1) et (2) de la définition 1.

Si nous désignons par $[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+s}; K]$ la différence divisée d'ordre s de la fonction K , alors la différence divisée d'ordre s de l'application F se définit par l'égalité suivante:

$$[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+s}; F] h_1 h_2 \dots h_s = \\ = \int_0^1 [x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+s}; K] h_1(t) h_2(t) \dots h_s(t) dt$$

où

$$h_1, h_2, \dots, h_s \in C[0, 1].$$

2. INTERPOLATION

Dans tout ce qui suit nous supposons que les différences divisées sont symétriques par rapport aux points considérées.

Nous désignons maintenant, par $L_n : X \rightarrow Y$ une application définie par l'égalité:

$$(5) \quad L_n(x) = G(x_1) + [x_1, x_2; G](x - x_1) + \dots \\ + [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; G](x - x_n) \dots (x - x_1)$$

Allors nous avons le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *L'application L_n définie par (5) possède les propriétés suivantes*

- 1) $L_n(x_i) = G(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n + 1$
- 2) $G(x) - L_n(x) = [x, x_1, \dots, x_{n+1}; G](x - x_{n+1}) \dots (x - x_1)$ pour $x \in X$, $x \neq x_i$, $i = 1, 2, \dots, n + 1$.

Démonstration. Nous démontrons l'égalité 2) par induction. Pour $n = 0$ l'égalité 2) est évidente parce que $G(x) - G(x_1) = [x, x_1; G](x - x_1)$ qui n'est autre que l'égalité 1) de la définition 1. Nous supposons que l'égalité 2) est vraie par $n = k$ et nous montrerons qu'elle est vraie aussi pour $n = k + 1$.

En effet si l'égalité suivante a lieu

$$(6) \quad G(x) = G(x_1) + [x_1, x_2; G](x - x_1) + \dots \\ + [x_1, x_2, \dots, x_{k+1}; G](x - x_k) \dots (x - x_1) \\ + [x, x_1, \dots, x_{k+1}; G](x - x_{k+1}) \dots (x - x_1),$$

alors, en tenant compte de l'égalité

$[x, x_1, \dots, x_{k+1}; G] = [x, x_1, \dots, x_{k+2}; G](x - x_{k+2}) + [x_1, x_2, \dots, x_{k+2}; G]$ qui résulte de la définition de la différence divisée d'ordre $k + 2$. Il résulte l'égalité suivante:

$$G(x) = G(x_1) + [x_1, x_2; G](x - x_1) + \dots \\ + [x_1, x_2, \dots, x_{k+2}; G](x - x_{k+1}) \dots (x - x_1) \\ + [x, x_1, \dots, x_{k+2}; G](x - x_{k+2}) \dots (x - x_1)$$

ce qui montre que l'égalité 2) a lieu pour $n = k + 1$.

Il reste à démontrer les égalités 1). De la définition de l'application L_n il résulte:

$$(7) \quad L_n(x_i) = G(x_1) + [x_1, x_2; G](x_i - x_1) + \dots \\ + [x_1, x_2, \dots, x_i; G](x_i - x_{i-1}) \dots (x_i - x_1).$$

Si nous considérons maintenant le dernier terme à droite de l'égalité (7) et tenons compte de l'égalité:

$$\begin{aligned} & [x_1, x_2, \dots, x_i; G](x_i - x_{i-1}) = \\ & = [x_{i-1}, x_1, \dots, x_{i-2}, x_i; G](x_i - x_{i-1}) \\ & = [x_1, x_2, \dots, x_{i-2}, x_i; G] - [x_{i-1}, x_1, \dots, x_{i-2}; G] \\ & = [x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i; G] - [x_1, x_2, \dots, x_{i-2}, x_{i-1}; G] \end{aligned}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} L_n(x_i) = & G(x_1) + [x_1, x_2; G](x_i - x_1) + \dots \\ & + [x_1, x_2, \dots, x_{i-2}, x_i; G](x_i - x_{i-2}) \dots (x_i - x_1). \end{aligned}$$

En procédant de la même manière après un nombre fini des pas nous parvenons à l'égalité suivante:

$$L_n(x_i) = G(x_1) + [x_1, x_2; G](x_i - x_1) = G(x_1) + G(x_i) - G(x_1) = G(x_i).$$

L'application L_n est dite polynôme d'interpolation de Lagrange de l'application G sur les noeuds $x_i, i = 1, 2, \dots, n+1$ du système (1) \square

3. LA RÉOLUTION DES ÉQUATIONS PAR INTERPOLATION

On considère l'équation

$$(8) \quad G(x) = \theta$$

θ est l'élément nul de l'espace Y et $G : X \rightarrow Y$ est un opérateur non linéaire.

Pour la résolution de l'équation (8) nous pouvons procéder de la manière suivante.

En supposant que les points du système (1) sont dans un voisinage de la solution \bar{x} de l'équation (8), de l'égalité 2) (théorème 1) il résulte l'égalité suivante:

$$G(\bar{x}) = L_n(\bar{x}) + [\bar{x}, x_1, \dots, x_{n+1}; G](\bar{x} - x_{n+1}) \dots (\bar{x} - x_1) = \theta$$

d'où il résulte

$$\|L_n(\bar{x})\| \leq \|[\bar{x}, x_1, \dots, x_{n+1}; G]\| \|x - x_1\| \dots \|x - x_{n+1}\|.$$

Si nous supposons maintenant que nous avons les inégalités $\|\bar{x} - x_i\| \leq \varepsilon, i = \overline{1, n+1}$ où ε est un nombre réel et positif, alors on a:

$$\|L_n(\bar{x})\| \leq \|[\bar{x}, x_1, \dots, x_{n+1}; G]\| \varepsilon^{n+1}$$

d'où il résulte que pour trouver une approximation de la solution \bar{x} il suffit de résoudre l'équation suivante:

$$(9) \quad L_n(x) = \theta.$$

La méthode exposée si-dessus présente quelques inconvénients, notamment:

Tout d'abord, la résolution d'une équation sous la forme (9) même dans le cas $n = 1$ est un problème de mathématiques difficile et la difficulté du problème croit considérablement si $n > 1$. Même dans le cas $X = Y = \mathbb{R}$, c'est-à-dire, quand L_n est un polynôme algébrique à coefficients réels, le problème peut être très difficile à cause du fait qu'une équation algébrique de degré n a n racines, et alors il est nécessaire de choisir la racine de l'équation (9) qui approche la racine \bar{x} de l'équation (8).

En second lieu, il est bien connue que la position des racines d'une équation algébrique dans le plan et la nature de ces racines peuvent se modifier considérablement quand les coefficients de l'équation sont affectés par des erreurs non essentielles.

Dans ce qui suit nous exposerons une autre méthode avec laquelle une partie des difficultés exposées ci-dessus, s'élimine.

Nous supposons que les opérateurs linéaires

$$[x_i, x_j; G] \in L(X, Y), \quad i \neq j; j = 1, 2, \dots, n+1$$

sont inversables.

Il en résulte que $G(x_i) \neq G(x_j)$, $i \neq j$. Soit maintenant D un ensemble quelconque d'éléments de l'espace X . Nous désignons par $\bar{G} = G|_D$ la restriction de l'application G à l'ensemble D .

Nous supposons que l'application \bar{G} est un homéomorphisme des ensembles D et $G(D)$. Où par $G(D)$ nous avons désigné l'image de l'ensemble D par G .

Nous avons le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Si l'opérateur linéaire $[x_i, x_j; G]$, ou $x_i, x_j \in D$ est inversable, alors a lieu l'égalité:*

$$[y_i, y_j, \bar{G}^{-1}] = [x_i, x_j; G]^{-1}$$

où

$$y_i = G(x_i) \quad \text{et} \quad y_j = G(x_j).$$

Démonstration. De la définition de différence divisée d'ordre 1 il résulte que

$$G(x_j) - G(x_i) = [x_i, x_j; G](x_j - x_i)$$

où

$$[x_i, x_j; G]^{-1}(y_j - y_i) = x_j - x_i$$

C'est à dire

$$\bar{G}^{-1}(y_j) - \bar{G}^{-1}(y_i) = [x_i, x_j; G]^{-1}(y_j - y_i)$$

d'où il résulte l'égalité de l'énoncé du théorème.

Soient maintenant x_1, x_2, \dots, x_{n+1} , $n + 1$ - éléments de l'ensemble D .

Nous désignons par y_1, y_2, \dots, y_{n+1} les valeurs de l'application G sur ces points, c'est-à-dire $y_i = G(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n + 1$. Nous considérons l'application $L_n : Y \rightarrow X$ donnée par

$$(10) \quad L_n(y) = x_1 + [y_1, y_2; \bar{G}^{-1}](y - y_1) + \dots \\ + [y_1, \dots, y_{n+1}; \bar{G}^{-1}](y - y_n)(y - y_{n+1}) \dots (y - y_1)$$

qui vérifie les égalités

$$(11) \quad \bar{G}^{-1}(y) = L_n(y) + [y, y_1, \dots, y_{n+1}; \bar{G}^{-1}](y - y_{n+1}) \dots (y - y_1)$$

et

$$(12) \quad \bar{G}^{-1}(y_i) = L_n(y_i) = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n + 1.$$

Si nous supposons maintenant que la solution \bar{x} de l'équation (8) appartient à l'ensemble D , alors évidemment $\bar{x} = \bar{G}^{-1}(\theta)$ et de (11) nous déduisons:

$$(13) \quad \bar{x} = \bar{G}^{-1}(\theta) = L_n(\theta) + (-1)^{n+1} [\theta, y_1, \dots, y_{n+1}; \bar{G}^{-1}] y_{n+1} \dots y_1.$$

Si nous désignons par

$$(14) \quad \bar{x} = L_n(\theta)$$

nous en déduisons:

$$(15) \quad \|\bar{x} - \bar{x}\| \leq \|[\theta, y_1, \dots, y_{n+1}; \bar{G}^{-1}]\| \cdot \|y_{n+1}\| \dots \|y_1\|.$$

De l'égalité (15) il résulte que si les éléments x_1, x_2, \dots, x_{n+1} sont choisis de telle manière que $\|y_i\| = \|G(x_i)\| < \varepsilon$, $i = 1, 2, \dots, n + 1$ où ε est un nombre réel suffisamment petit, alors \bar{x} est une bonne approximation pour \bar{x} .

Pour plus de clarté nous désignons par $L_n(y_1, y_2, \dots, y_{n+1}; \bar{G}^{-1}|y)$ l'opérateur $L_n(y)$ donné par la relation (10). Soient maintenant x_1, x_2, \dots, x_{n+1} , $n + 1$ -éléments initiaux donnés et soit $(x_n)_{n=1}^\infty$ la suite générée par la relation de récurrence:

$$(16) \quad x_{i+n+1} = L_n(y_i, y_{i+1}, \dots, y_{i+n}; \bar{G}^{-1}|\theta), \quad i = 1, 2, \dots \quad \square$$

Nous présenterons maintenant quelques cas particulières du procédé itératif (16).

A. Soient x_1 et x_2 deux éléments arbitraires de l'espace X . Si nous considérons les premiers deux termes du polynôme d'interpolation inverse (10) tenons compte du théorème 2, nous avons

$$(17) \quad x_{k+1} = x_{k-1} - [x_{k-1}, x_k; G]^{-1} G(x_{k-1}), \quad k = 2, 3, \dots$$

qui n'est autre chose que l'extension de la méthode de la corde.

B. Au cas où nous considérons trois éléments initiaux $x_1, x_2, x_3 \in X$ et nous nous bornons aux trois premiers termes de la relation (10) on a:

$$(18) \quad x_k = x_{k-3} - [x_{k-3}, x_{k-2}; G]^{-1} G(x_{k-3}) \\ - [x_{k-3}, x_{k-2}; G]^{-1} [x_{k-3}, x_{k-1}, x_{k-1}; G] [x_{k-3}, x_{k-1}; G]^{-1} \cdot \\ \cdot G(x_{k-3}) \cdot [x_{k-1}, x_{k-2}; G]^{-1} G(x_{k-2}), \quad k = 4, 5, \dots$$

Cette méthode est une extension à l'espace linéaire X d'une méthode analogue à la méthode de Tchebycheff, bien connue. De (15) et de (16) nous déduisons

$$(19) \quad \|\bar{x} - x_{i+n+1}\| \leq \|[\theta, y_i, \dots, y_{n+1}; \bar{G}^{-1}]\| \cdot \|y_i\| \dots \|y_{n+1}\|,$$

$i = 1, 2, \dots$

A propos de la méthode (16) il se pose les deux questions suivants:

1. Quelles sont les conditions pour la convergence de la méthode (16).
2. Dans le cas de la convergence de la méthode (16), quelle est la vitesse de convergence.

En ce qui concerne la vitesse de convergence d'une méthode itérative de type (16), A. M. Ostrowski [1] a montré que l'ordre de convergence de cette méthode n'excède pas 2, pour chaque nombre de points d'interpolation donnée.

Dans ce qui suit nous montrerons que si à chaque pas d'itération on choisit convenablement les points d'interpolation, alors l'ordre de convergence croit considérablement.

Ainsi qu'il est bien connue pour la résolution d'une équation de la forme (8) par une méthode itérative il est nécessaire de mettre en évidence une application $Q : X \rightarrow X$ qui a la propriété que chaque solution de l'équation (8) est un point fixe pour l'application Q .

Un opérateur Q qui possède la propriété ci-dessus est dit opérateur itératif attaché à l'équation (8).

Pour les opérateurs attachés à l'équation (8) on peut définir la notion d'ordre.

DÉFINITION 4. Soit $D \subseteq X$ une ensemble d'éléments de l'espace X et $\rho > 0$ un nombre réel.

Nous disons que l'opérateur itératif Q a l'ordre k ($k > 0$ nombre réel) sur l'ensemble D , par rapport à l'équation (8) si pour chaque $x \in D$ on a

$$(20) \quad \|G(Q(x))\| \leq \rho \|G(x)\|^k.$$

Soient maintenant Q_1, Q_2, \dots, Q_n ; n -opérateurs itératif attachés à l'équation (8), respectivement d'ordre k_1, k_2, \dots, k_n .

Nous considérons un élément arbitraire $x_0 \in X$ et désignons par $x_s^0; s = \overline{1, n}$ les expressions suivantes:

$$(21) \quad x_1^0 = Q_1(x_0), \quad x_s^0 = Q_s(x_{s-1}^0), \quad s = 2, 3, \dots, n$$

Si les éléments initiaux dans la méthode itérative (16) sont:

$$(22) \quad x_0, x_1^0, \dots, x_n^0$$

alors si nous écrivons $y_0^0 = G(x_0), y_i^0 = G(x_i^0), i = 1, 2, \dots, n$, on a:

$$(23) \quad x_1 = L_n(y_0^0, y_1^0, \dots, y_n^0; \bar{G}^{-1}|\theta).$$

Nous supposons maintenant que nous avons construit les premiers $i + 1$ éléments de la suite $(x_n)_{n=0}^\infty$ alors l'élément x_{n+1} s'obtient de la manière suivante:

Nous écrivons:

$$(24) \quad x_1^i = Q_1(x_i), \quad x_j^i = Q_j(x_{j-1}^i), \quad j = 2, 3, \dots, n$$

et

$$y_j^i = G(x_j^i), \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Alors l'élément x_{i+1} a la forme suivante:

$$(25) \quad x_{i+1} = L_n(y_0^i, y_1^i, \dots, y_n^i; \bar{G}^{-1}|\theta)$$

De (15) et de (25) on a:

$$(26) \quad \|\bar{x} - x_{i+1}\| \leq \|[\theta, y_0^i, \dots, y_n^i; \bar{G}^{-1}]\| \|y_0^i\| \dots \|y_n^i\|.$$

Mais du fait que nous avons supposé que les opérateurs itératifs $Q_j, j = 1, 2, \dots, n$ ont respectivement les ordres k_j , avec les constantes $\rho_j; j = 1, 2, \dots, n$ il résulte les relations suivantes:

$$(27) \quad \|y_0^i\| = \|G(x_i)\|$$

et

$$(28) \quad \begin{aligned} \|y_s^i\| &\leq \|G(x_s^i)\| = \|G(Q_s(x_{s-1}^i))\| \leq \rho_s \|G(Q_{s-1}(x_{s-2}^i))\|^{k_s} \\ &\leq \rho_s \rho_{s-1}^{k_s} \|G(Q_{s-2}(x_{s-3}^i))\|^{k_s \cdot k_{s-1}} \\ &\leq \rho_s \cdot \rho_{s-1}^{k_s} \cdot \rho_{s-2}^{k_s \cdot k_{s-1}} \dots \rho_1^{k_s k_{s-1} \dots k_2} \cdot \|G(x_i)\|^{k_1 \cdot k_2 \dots k_s} \end{aligned}$$

pour $s = 1, 2, \dots, n$.

Si nous écrivons maintenant

$$(29) \quad C_s = \rho_s \rho_{s-1}^{k_s} \cdot \rho_{s-2}^{k_s k_{s-1}} \dots \rho_1^{k_s k_{s-1} \dots k_2}; \quad s = 2, 3, \dots, n,$$

$$(30) \quad K = \prod_{s=2}^n C_s$$

et

$$(31) \quad m = 1 + k_1 + k_1 k_2 + \dots + k_1 \cdot k_2 \dots k_n$$

et si nous supposons que les différences divisées $[\theta, y_0^i, y_1^i, \dots, y_n^i; \bar{G}^{-1}]$ sont fortement bornées par la même constante $M > 0$, alors on déduit de (26);

$$(32) \quad \|\bar{x} - x_{i+1}\| \leq MK \|G(x_i)\|^m, \quad i = 0, 1, \dots$$

Si nous supposons maintenant que les différences divisées d'ordre 1 de l'application G sont fortement bornées par la même constante $B > 0$, on a:

$$(33) \quad \|G(x_i)\| \leq B \|\bar{x} - x_i\| \quad i = 0, 1, \dots$$

En tenant compte des inégalités (33) et (32) on obtient:

$$(34) \quad \|\bar{x} - x_{i+1}\| \leq MKB^m \|\bar{x} - x_i\|, \quad i = 0, 1, \dots$$

En multipliant les inégalités (34) par $(MKB^m)^{\frac{1}{m-1}}$ et en écrivant

$$\delta_k = (MKB^m)^{\frac{1}{m-1}} \|\bar{x} - x_k\|, \quad k = 0, 1, \dots,$$

on obtient de (34)

$$(35) \quad \delta_{i+1} \leq \delta_i^m, \quad i = 0, 1, \dots$$

Nous admettrons maintenant que nous pouvons choisir les constantes M, K, B et le point initial x_0 de telle manière que $\delta_0 < 1$.

Des inégalités (35) on déduit:

$$\delta_{i+1} \leq \delta_0^{m^i}, \quad i = 0, 1, \dots$$

d'où en tenant compte de la condition $\delta_0 < 1$ l'on déduit

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \delta_{i+1} = 0$$

C'est-à-dire

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_{i+1} = \bar{x}.$$

Nous considérons maintenant quelques cas particuliers de la méthode itérative (25).

1. Si nous considérons un seul opérateur itératif Q d'ordre $k = 1$ alors la méthode itérative (25) revient à la méthode bien connue de Aitken-Steffensen. Dans ce cas nous avons: $m = 2$.

2. Si $Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n$, $k_1 = k_2 = \dots = k_n = k$, où $k \neq 1$ alors $C_s = \rho^{\frac{k^{n+1}-1}{k-1}}$ et $m = \frac{k^{n+1}-1}{k-1}$.

3. Si $Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n$ et $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 1$, alors $C_s = \rho^s$ et $m = n$.

REMARQUE. L'ordre de convergence donné par l'égalité (31) de la méthode (25) est le plus grand possible par rapport aux opérateurs itératifs Q_1, Q_2, \dots, Q_n donnés, si l'ordre dans lequel ils sont appliqués pour obtenir les éléments (24), est donnée par l'ordre décroissant des nombres k_1, k_2, \dots, k_n . C'est-à-dire, l'ordre de convergence m est maximal si $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$ et minimal si $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n$. \square

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A.M. Ostrowski, *Reşenie uravnenii i sistem uravnenii*, Izd. inostr. lit. Moskva (1963).
- clickable → [2] I. Păvăloiu, *Interpolation dans les espaces linéaires normés et applications*, *Mathematica*, Cluj, nr.12 (35), 2, (1970), pp. 309–324. [↗](#)
- clickable → [3] I. Păvăloiu, *Introducere în teoria aproximării soluţiilor ecuaţiilor*, Editura Dacia, 1976. [↗](#)
- clickable → [4] T. Popoviciu, *Introduction à la théorie des différences divisées*, *Bulletin mathématique de la société Roumaine de Sciences*, 42, 1, (1940) pp. 65–78. [↗](#) [JSTOR](#) [↗](#)
- [5] A.S. Sergeev, *O metode hord*, *Sibirski mat. Jurnal*, XI, (2), (1961), pp. 282–289.
- [6] J.F. Traub, *Iterative Methods for the Solution of Equations*, Prentice Hall, Series in Automatic Computation, 1964.
- [7] S. Ul'm, *Ob obobsennyh razdelennih raznostiah*, II, *Izv. Nauk Estonskoi SSR*, 16, 2, (1967), 146–155.

Reçu, 8.IV.1980