"BABES-BOLYAI" UNIVERSITY, Faculty of Mathematics
Research Seminars
Seminar on Functional Analysis and Numerical Methods
Preprint Nr. 1, 1986, pp. 127 - 132.

LA CONVERGENCE DE CERTAINES MÉTHODES ITÉRATIVES POUR RESOUDRE CERTAINES ÉQUATIONS OPÉRATORIELLES

Ion Păvăloiu

Désignons par E un espace de Banach et considérons une équation opératorielle

$$x = \lambda D(x) + y \tag{1}$$

où $D : E \to E$ est une application nonlinéaire.

Dans ce qui suit et pour resoudre l'équation (1), nous considérons le procédé itératif suivant:

$$x_{n+1} = x_n - A(x_n)\left[x_n - \lambda D(x_n) - y\right],\ n = 0,1, \dots,\ x_0 \in E \tag{2}$$

où $A(x) : E \to E$ est une application lineaire pour chaque $x \in E$.

Nous désignerons, pour fixer les idées, par $P : E \to E$ l'application $P(x) = x - \lambda D(x) - y$.

Si nous supposons que l'application D admet des dérivées jusqu'au second ordre inclusivement sur l'espace E, alors $P'(x) = I - \lambda D'(x)$ et $P''(x) = - \lambda D''(x)$. Si $r \in \mathbb{R}$ et $r > 0$, nous écrirons $S(x_0, r) = \{ x \in E;\ \|x - x_0\| \le r \}$.

En ce qui concerne la convergence du procédé (2) nous avons le théorème suivant :

THEORÈME 1. Si les applications D et $A(x)$, l'élément initial x_0 et le nombre réel $r > 0$ remplissent les conditions :

i. L'application D admet des dérivées Frechet jusqu'au second ordre inclusivement sur $S(x_0, r)$;

ii. $\|A(x)\| \le \beta$ pour chaque $x \in S(x_0, r)$, où $\beta \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$;

iii. $\|I - P'(x)\, A(x)\| \le \alpha$ pour chaque $x \in S(x_0, r)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$;

iv. $\|D''(x)\| \le M/|\lambda|$, pour chaque $x \in S(x_0, r)$ où $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$;

v. $(\beta \rho_0) / (1 - d_0) \le r$ où $\rho_0 = \|P(x_0)\|$, $d_0 = \dfrac{M\beta^2 \rho_0}{2}$

vi. $d_0 < 1$,

alors la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ générée par (2) est convergente et si nous écrivons $\bar{x} = \lim_{n\to\infty} x_n$, alors $P(\bar{x}) = \Theta$. Nous avons la délimitation suivante :

$$\|\bar{x} - x_n\| \le \frac{\beta d_0^n \rho_0}{1 - d_0}, \quad n = 0, 1, \dots \tag{3}$$

Démonstration. Nous montrerons par induction que les propriétés suivantes ont lieu :

a) $x_n \in S(x_0, r)$ pour chaque $n = 0, 1, \dots$;

b) $\|P(x_n)\| \le d_0^n \cdot \rho_0$, $n = 0, 1, \dots$.

En effet, nous déduisons de (2) pour $n = 0$

$$\|x_1 - x_0\| \le \|A(x_0)\| \cdot \|P(x_0)\| \le \beta\rho_0 \le \beta\rho_0/(1-d_0) \le r$$

d'où il s'ensuit que $x_1 \in S(x_0, r)$.

Nous supposerons que $x_i \in S(x_0, r)$ pour chaque $i = 0, 1, \dots, k$. Nous avons alors

$$\|P(x_i)\| \le \|P(x_i) - P(x_{i-1}) - P'(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})\| + \|P(x_{i-1}) + P'(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})\| \le \frac{M\beta^2}{2}\|P(x_{i-1})\|^2 + \alpha\|P(x_{i-1})\|, \quad i = 1, 2, \dots, k \tag{4}$$

d'où en écrivant $d_{i-1} = \dfrac{M\beta^2}{2}\|P(x_{i-1})\| + \alpha$, $i = 1, 2, \dots$ et en tenant compte de vi. on déduit immédiatement les inégalités suivantes:

$$d_0 \ge d_1 \ge d_2 \ge \dots \ge d_k. \tag{5}$$

Il résulte de (4) et (5)

$$\|P(x_i)\| \le d_0 \|P(x_{i-1})\|, \quad i = 1, 2, \dots, k. \tag{6}$$

Il s'ensuit

$$\|P(x_i)\| \le d_0^i \rho_0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Nous montrerons à présent que $x_{k+1} \in S(x_0, r)$. En effet, nous avons

$$\|x_{k+1} - x_0\| \le \sum_{i=0}^{n} \|x_{i+1} - x_i\| \le \beta \sum_{i=0}^{k} \|P(x_i)\| \le \beta\rho_0 \sum_{i=0}^{k} d_0^i \le \frac{\beta\rho_0}{1 - d_0} \le r.$$

Supposons que n, p N, nous avons alors

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq \sum_{i=1}^{p} \|x_{n+i} - x_{n+i-1}\| \leq \beta \sum_{i=1}^{p} \|P(x_{n+i-1})\| \leq$$

$$\leq \beta \rho_0 \sum_{i=1}^{p} d_0^{n+i-1} \leq \frac{\beta \rho_0 d_0^n}{1 - d_0} ,$$

d'où il s'ensuit que la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ générée par (2) est convergente. Si nous écrivons $\bar{x} = \lim_{n \to \infty} x_n$ et passons à la limite dans l'inégalité (7) quand $p \to \infty$, alors nous avons

$$(8) \qquad \|\bar{x} - x_n\| \leq \frac{\beta \rho_0 d_0^n}{1 - d_0} .$$

On déduit immédiatement de (8) pour $n = 0$ que $\bar{x} \in S(x_0, r)$. Si nous tenons compte que P est une application continue, il résulte de b)

$$\lim_{n \to \infty} P(x_n) = P(\bar{x}) = \Theta ,$$

c'est-à-dire que $\bar{x}$ est une solution de l'équation (1).

Nous traitons à présent le cas où l'application $A(x)$ est donnée par l'égalité

$$A(x) = I + \lambda D'(x) .$$

Nous avons alors

$$I - P'(x)\, A(x) = I - (I - \lambda D'(x))\,(I + \lambda D'(x)) = \lambda^2 (D'(x))^2 .$$

Si nous supposons que

$$\|D'(x)\| \leq b ,$$

il s'ensuit alors

$$\|I - P'(x)\, A(x)\| \leq \lambda^2 . b^2 \quad , \quad \text{pour chaque} \quad x \in S(x_0, r).$$

Nous avons

$$\|A(x)\| \leq 1 + |\lambda| . b ,$$

pour chaque $x \in S(x_0, r)$. En ce cas la condition VI du théorème 1 devient pour $\alpha = \lambda^2 . b^2$ et $\beta = 1 + |\lambda| . b$

$$M (1 + |\lambda| b)^2 . \rho_0 + 2 \lambda^2 . b^2 - 2 < 0$$

ce qui, en supposant $2 - M \rho_0 > 0$, conduit à l'inégalité

$$|\lambda| < \frac{b(2 - M \rho_0)}{2 + M \rho_0} .$$

En tenant compte de ce qui précède, il résulte du théorème 1 le théorème suivant :

THÉORÈME 2. <u>Si l'application</u> D, <u>l'élément initial</u> x_0 <u>et le nombre réel</u> $r > 0$ <u>remplissent les conditions suivantes:</u>

i. <u>L'application</u> D <u>admet des dérivées Fréchet jusqu'au second ordre inclusivement pour chaque</u> $x \in S(x_0, r)$;

ii. $\|D'(x)\| \leq b$ <u>pour chaque</u> $x \in S(x_0, r)$;

iii. $\|D''(x)\| \leq M/|\lambda|$ <u>pour chaque</u> $x \in S(x_0, r)$;

iv. $2 - M \rho_0 > 0$ <u>où</u> $\rho_0 = \|x_0 - \lambda D(x_0) - y\|$;

v. $$\frac{\rho_0 (1 + |\lambda| b)}{1 - d_0} \leq r \quad \underline{\text{où}} \quad d_0 = M[(1 + |\lambda| b)^2 / 2]\, \rho_0 + \lambda^2 . b^2 ;$$

vi. $|\lambda| \leq b\,(2 - M \rho_0) / (2 + M \rho_0)$, alors la suite générée par

$$x_{n+1} = x_n - [I - \lambda D'(x_n)] [x_n - \lambda D(x_n) - y],$$

$n = 0, 1, \ldots$ converge vers la solution $\bar{x}$ de l'équation (1) et l'on a la délimitation :

$$\| \bar{x} - x_n \| \leqq \frac{(1 + |\lambda| b)\, d_0^n\, \rho_0}{1 - d_0}, \quad n = 0, 1, \ldots .$$

B I B L I O G R A P H I E

[1]. Kantorovici L. V. , O metodí Niutona Trudí Mat. Inst. V.A. Steklova 28, 104-144 (1949).

[2] Diaconu A., Păvăloiu I., Sur quelque méthodes itératives pour la resolution des équations opérationnelles, Revue d'Analyse Numérâque et de la Theorie de l'Approximation, Tome 1, 45-61 (1972).

[3]. Păvăloiu I., Sur les procédés itératifs à un ordre élévé de convergence, Mathematica, Cluj, 12 (35) 1, 149-158 (1970).