

**LA CONVERGENCE DE CERTAINES METHODES
ITERATIVES POUR RESOUDRE CERTAINES
EQUATIONS OPERATORIELLES**

Ion Păvăloiu

Désignons pour E un espace de Banach et considérons une équation opératorielle

$$(1) \quad x = \lambda D(x) + y, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

où $D : E \rightarrow E$ est une application nonlinéaire.

Dans ce qui suit et pour résoudre l'équation (1), nous considérons le procédé itératif suivant:

$$(2) \quad x_{n+1} = x_n - A(x_n)[x_n - \lambda D(x_n) - y], \quad n = 0, 1, \dots, x_0 \in E$$

où $A(x) : E \rightarrow E$ est une application linéaire pour chaque $x \in E$.

Nous désignerons, pour fixer les idées, par $P : E \rightarrow E$ l'application $P(x) = x - \lambda D(x) - y$.

Si nous supposons que l'application D admet des dérivées jusqu'au second ordre inclusivement sur l'espace E , alors $P'(x) = I - \lambda D'(x)$ et

$P''(x) = -\lambda D''(x)$. Si $r \in \mathbb{R}$ et $r > 0$, nous écrivons $S(x_0, r) = \{x \in E; \|x - x_0\| \leq r\}$.

En ce qui concerne la convergence du procédé (2) nous avons le théorème suivant:

Théorème 1. *Si les applications D et $A(x)$, l'élément initial x_0 et le nombre réel $r > 0$ remplissent les conditions:*

- i. *L'application D admet des dérivées Frechet jusqu'au second ordre inclusivement sur $S(x_0, r)$;*
- ii. *$\|A(x)\| \leq \beta$ pour chaque $x \in S(x_0, r)$, où $\beta \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$;*
- iii. *$\|I - P'(x)A(x)\| \leq \alpha$ pour chaque $x \in S(x_0, r)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$;*
- iv. *$\|D''(x)\| \leq M|\lambda|$, pour chaque $x \in S(x_0, r)$ où $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$;*
- v. *$(\beta\rho_0)/(1 - d_0) \leq r$ où $\rho_0 = \|P(x_0)\|$, $d_0 = \frac{M\beta^2\rho_0}{2}$*
- vi. *$d_0 < 1$,*

alors la suite $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ générée par (2) est convergente et si nous écrivons $\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, alors $P(\bar{x}) = \theta$. Nous avons la délimitation suivante:

$$(3) \quad \|\bar{x} - x_n\| \leq \frac{\beta d_0^n \rho_0}{1 - d_0}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Démonstration. Nous montrerons par induction que les propriétés suivantes ont lieu:

- a) $x_n \in S(x_0, r)$ pour chaque $n = 0, 1, \dots$;
- b) $\|P(x_n)\| \leq d_0^n \cdot \rho_0$, $n = 0, 1, \dots$.

En effet, nous déduisons de (2) pour $n = 0$

$$\|x_1 - x_0\| \leq \|A(x_0)\| \cdot \|P(x_0)\| \leq \beta\rho_0 \leq \beta\rho_0/(1 - d_0) \leq r$$

d'où il s'ensuit que $x_0 \in B(x_1, r)$.

Nous supposons que $x_i \in S(x_0, r)$ pour chaque $i = 0, 1, \dots, k$. Nous avons alors

$$(4) \quad \begin{aligned} \|P(x_i)\| &\leq \|P(x_i) - P(x_{i-1}) - P'(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})\| \\ &\quad + \|P(x_{i-1}) + P'(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})\| \\ &\leq \frac{M\beta^2}{2} \|P(x_{i-1})\|^2 + \alpha \|P(x_{i-1})\|, \quad i = 1, 2, \dots, k \end{aligned}$$

d'où en écrivant $d_{i-1} = \frac{M\beta^2}{2} \|P(x_{i-1})\| + \alpha$, $i = 1, 2, \dots$ et en tenant compte de *vi*. on déduit immédiatement les inégalités suivantes:

$$(5) \quad d_0 \geq d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_k.$$

Il résulte de (4) et (5)

$$(6) \quad \|P(x_i)\| \leq d_0 \|P(x_{i-1})\|, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Il s'ensuit

$$\|P(x_i)\| \leq d_0^i \rho_0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Nous montrerons à présent que $x_{k+1} \in S(x_0, r)$. En effet, nous avons

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x_0\| &\leq \sum_{i=0}^n \|x_{i+1} - x_i\| \leq \beta \sum_{i=0}^k \|P(x_i)\| \\ &\leq \beta \rho_0 \sum_{i=0}^k d_0^i \leq \frac{\beta \rho_0}{1-d_0} \leq r. \end{aligned}$$

Supposons que $n, p \in \mathbb{N}$, nous avons alors

$$(7) \quad \|x_{n+p} - x_n\| \leq \sum_{i=1}^p \|x_{n+i} - x_{n+i-1}\| \leq \beta \sum_{i=1}^p \|P(x_{n+i-1})\| \\ \leq \beta \rho_0 \sum_{i=1}^p d_0^{n+i-1} \leq \frac{\beta \rho_0 d_0^n}{1-d_0},$$

d'où il s'ensuit que la suite $(x_n)_{n=0}^\infty$ générés par (2) est convergente. Si nous écrivons $\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ et passons à la limite dans l'inégalité (7) quand $p \rightarrow \infty$, alors nous avons

$$(8) \quad \|\bar{x} - x_n\| \leq \frac{\beta \rho_0 d_0^n}{1-d_0}.$$

On déduit immédiatement de (8) pour $n = 0$ que $\bar{x} \in S(x_0, r)$. Si nous tenons compte que P est une application continue, il résulte de b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(x_n) = P(\bar{x}) = \theta,$$

c'est-à-dire que \bar{x} est une solution de l'équation (1).

Nous traitons à présent le cas où l'application $A(x)$ est donnée par l'égalité

$$A(x) = I + \lambda D'(x).$$

Nous avons alors

$$I - P'(x) A(x) = I - (I - \lambda D'(x)) (I + \lambda D'(x)) = \lambda^2 (D'(x))^2.$$

Si nous supposons que

$$\|D'(x)\| \leq b,$$

il s'ensuit alors

$$\|I - P'(x)A(x)\| \leq \lambda^2 \cdot b^2, \quad \text{pour chaque } x \in S(x_0, r).$$

Nous avons

$$\|A(x)\| \leq 1 + |\lambda| \cdot b,$$

pour chaque $x \in B(x_0, r)$. En ce cas la condition vi du théorème 1 devient pour $\alpha = \lambda^2 \cdot b^2$ et $\beta = 1 + |\lambda| \cdot b$

$$M(1 + |\lambda|b^2) \cdot \rho_0 + 2\lambda^2 \cdot b^2 - 2 < 0$$

ce qui, en supposant $2 - M\rho_0 > 0$, conduit à l'inégalité

$$|\lambda| < \frac{b(2 - M\rho_0)}{2 + M\rho_0}.$$

□

En tenant compte de ce qui précède, il résulte du théorème 1 le théorème suivant:

Théorème 2. *Si l'application D , l'élément initial x_0 et le nombre réel $r > 0$ remplissent les conditions suivantes:*

- i. *L'application D admet des dérivées Fréchet jusqu'au second ordre inclusivement pour chaque $x \in S(x_0, r)$;*
- ii. *$\|D'(x)\| \leq b$ pour chaque $x \in S(x_0, r)$;*
- iii. *$\|D''(x)\| \leq M|\lambda|$ pour chaque $x \in S(x_0, r)$;*
- iv. *$2 - M\rho_0 > 0$ où $\rho_0 = \|x_0 - \lambda D(x_0) - y\|$;*
- v.

$$\frac{\rho_0(1 + |\lambda|b)}{1 - d_0} \leq r \quad \text{où} \quad d_0 = M \frac{1 + |\lambda|b^2}{2} \rho_0 + \lambda^2 \cdot b^2;$$

- vi. *$|\lambda| \leq b \frac{2 - M\rho_0}{2 + M\rho_0}$,*

alors la suite générée par

$$x_{n+1} = x_n - [1 - \lambda D'(x_n)] [x_n - \lambda D(x_n) - y], \quad n = 0, 1, \dots,$$

converge vers la solution \bar{x} de l'équation (1) et l'on a la délimitation:

$$\|\bar{x} - x_n\| \leq \frac{(1 + |\lambda|b) d_0^n \rho_0}{1 - d_0}, \quad n = 0, 1, \dots$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] L.V. Kantorovici, *O metodî Niutona* Trudi Mat. Inst. V.A. Steklova 28, 104–144 (1949).
- clickable → [2] A. Diaconu, I. Păvăloiu, *Sur quelque méthodes itératives pour la resolution des équations opérationnelles*, Rev. Anal. Numér. Theor. Approx., vol. 1, 45–61 (1972). [🔗](#) (journal link [🔗](#))
- clickable → [3] I. Păvăloiu, *Sur les procédés itératifs à un ordre élevé de convergence*, Matematica (Cluj), 12 (35) 1, 149–158 (1970). [🔗](#)