Asupra Convergenței metodelor de iteratie cu unul sau mai mulți pasi

de

Ion Păvăloiu

33371
Cod.

1 Introducere

Este bine cunoscut că cele mai uzuale metode de aproximare a soluțiilor ecuațiilor neliniare, (metoda lui Newton, metoda lui Cebîșev, metoda coardei, metoda lui Steffensen, metoda lui Aitken și diverse generalizări ale acestora), se pot obține într-o manieră unitară prin interpolare inversă de tip Lagrange-Hermite.

În această lucrare vom considera clase de metode iterative generale, obținute prin interpolare inversă, din care vom determina, ~~pe cele~~ pe ~~metoda~~ acelea cu ordin de convergență optimal precum și pe cele cu indice de eficiență optimal.

În secțiunea 2 prezentăm ~~în cele ce urmează~~ noțiunile de bază ce vor fi folosite în cadrul acestui articol relative la ordinul de convergență și indicele de eficiență, precum și câteva proprietăți ale acestora. De asemenea prezentăm câteva proprietăți ale rădăcinilor unor ecuații algebrice speciale, care se folosesc ~~rădăcini ...~~ la determinarea ordinului de convergență.

În secțiunea 3 vom prezenta principalele metode de iterație obținute prin interpolare inversă de tip Lagrange-Hermite și cu polinoame de tip Taylor. Folosind aceste metode și controlând nodurile de interpolare în diverse moduri vom prezenta metode generale de tip Aitken-Steffensen.

În secțiunea 4, din clasele de metode descrise în secțiunea 3 vom genera algoritmi care să conducă la metode de iterație cu ordin de convergență optimal.

În ultima secțiune vom pune în evidență acele metode cu eficiență optimală.

2. Noțiuni ~~introductive~~ de bază.

Fie $I=[a,b]$, $a<b$, $a,b\in\mathbb{R}$, un interval al axei reale și $f: I\to\mathbb{R}$, o funcție.

Considerăm ecuația:

(2.1) $f(x)=0$.

Fără a restrânge generalitatea presupunem că ecuația (2.1) are o singură soluție ~~$\bar{x}\in[a,b]$~~ $\bar{x}\in I$.

Fie $g: I\to I$ o funcție pentru care $\bar{x}$ este unicul ei punct fix.

Pentru aproximarea rădăcinii $\bar{x}$ considerăm șirul de iterate $(x_p)_{p\geq 0}$, generat de relațiile

(2.2) $x_{s+1}=g(x_s)$, $s=0,1,\ldots$, $x_0\in I$.

Metoda de iterație dată de (2.2) o vom numi metoda cu un singur pas.

Mai general dacă $G: I^k\to I$ este o funcție de k variabile a cărei restricție la diagonala mulțimii I^k coincide cu g, adică

$$G(x,x,\ldots,x)=g(x), \text{ pentru orice } x\in I,$$

atunci pentru a aproxima pe $\bar{x}$ putem considera șirul $(x_p)_{p\geq 0}$ generat de metoda multipas dată de relațiile

(2.3) $x_{s+k}=G(x_s,x_{s+1},\ldots,x_{s+k-1})$, $x_0,x_1,\ldots,x_{k-1}\in I$, $s=0,1,\ldots$

După cum vom constata pe mai departe, ordinul de convergență al metodelor (2.2) sau (2.3) depinde, în mare măsură, de anumite proprietăți ale funcțiilor f, g respectiv G.

Timpul necesar unui calculator pentru a obține o aproximație convenabilă a lui $\bar{x}$ depinde de ordinul de convergență al metodei folosite dar ~~în mare măsură~~ și de numărul și felul operațiilor elementare folosite de calculator pentru a trece de la un pas de iterație la următorul.

Deși ordinul de convergență al unei metode de iterație poate fi stabilit, în general, cu precizie, numărul de operații specificate mai sus este greu sau chiar imposibil de stabilit.

Pentru ca, cel puțin teoretic, problema să devină mai simplă s-a considerat (vezi [ ] [ ]) noțiunea de indice de eficiență, (vezi [ ] [ ]) al unei metode de iterație, care are în vedere numai numărul de valori de funcții ce trebuie calculate la fiecare pas de iterație.

Pentru scopul acestui articol, privind determinarea metodelor cu indicele de eficiență optimal, din clase de metode date, numărul de valori ale funcții depinde de funcția f care rămâne invariantă pentru studiul clasei de metode considerate.

Pentru ordinul de convergență al șirului $(x_p)_{p\geq 0}$ generat de oricare din metodele (2.2) sau (2.3) vom folosi următoarea definiție, [ ] [ ] [ ]. Fie $(x_p)_{p\geq 0}$, $x_p \in I$, $p=0,1,\ldots$, și $\lim x_p = \bar{x}$.

__Definiția 2.1.__ __Spunem că șirul__ $(x_p)_{p\geq 0}$ __are ordinul de convergență__ $\omega \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$ __dacă există__ și este finită limita

$$(2.4)\quad l = \lim_{p\to\infty} \frac{\ln|x_{p+1} - \bar{x}|}{\ln|x_p - \bar{x}|}$$

și $l = \omega$.

Este ușor de văzut că dacă limita (2.4) există și este finită, atunci are loc relația

$$(2,5)\qquad l = \lim_{p\to\infty} \frac{\ln[|x_{p+1}-\bar{x}|/|x_p-\bar{x}|]}{\ln[|x_p-\bar{x}|/|x_{p-1}-\bar{x}|]}.$$

Pentru aproximarea numerică a ordinului de convergență ar putea fi folosită relația (2.5) dacă cunoaștem soluția $\bar{x}$, ceea ce în cele mai multe cazuri este imposibil. Din acest motive în lucrările [ ] [ ] se propune o altă relație a cărei motivare o vom da mai jos.

Presupunem că sunt îndeplinite următoarele ipoteze.

i) $x_p \in I$, pentru orice $p = 0, 1, \ldots$;

ii) $\lim x_p = \bar{x}$, unde $f(\bar{x}) = 0$;

iii) f este derivabilă în punctul $\bar{x}$;

iv) pentru orice $x, y \in I$ are loc relația $m \le [x, y; f] \le M$, unde $m, M \in \mathbb{R}$, $m > 0$, $M > 0$, ~~m<M~~.

~~Are~~ loc următoarea Lemă

Lema 2.1 Dacă șirul $(x_p)_{p\ge 0}$ are ordinul de convergență ω și dacă în plus $(x_p)_{p\ge0}$ și f verifică ipotezele i. – iv., atunci are loc relația

$$(2.6)\qquad \omega = \lim \frac{\ln|f(x_{p+1})|}{\ln|f(x_p)|}.$$

Demonstrație

~~Din~~ iii) rezultă că f este ~~continuă~~ continuă în $\bar{x}$ și deci $\lim_{p\to\infty} f(x_p) = 0$. În continuare avem:

$$\omega = \lim_{p\to\infty} \frac{\ln|x_{p+1}-\bar{x}|}{\ln|x_p-\bar{x}|} = \lim_{p\to\infty} \frac{\ln|f(x_{p+1})| - \ln|[\bar{x}, x_{p+1}; f]|}{\ln|f(x_p)| - \ln|[\bar{x}, x_p; f]|} =$$

$$= \lim_{p\to\infty} \frac{\ln|f(x_{p+1})|}{\ln|f(x_p)|}\cdot\frac{1 - \frac{\ln|[\bar{x}, x_{p+1}; f]|}{\ln|f(x_{p+1})|}}{1 - \frac{\ln|[\bar{x}, x_p; f]|}{\ln|f(x_p)|}} = \lim \frac{\ln|f(x_{p+1})|}{\ln|f(x_p)|}.$$

Observația 2.1 Dacă are loc relația (2.6), atunci are loc și relația (2.4), adică în ipotezele Lemei 2.1, echivalența celor 2 relații este evidentă.

Din Lema 2.1. rezultă, pentru aproximarea ordinului de convergență, o relație analoagă cu (2.5) adică

$$(2.7)\quad \omega = \lim_{p\to\infty} \frac{\ln|f(x_{p+1})|/|f(x_p)|}{\ln|f(x_p)|/|f(x_{p-1})|}$$

În ceea ce privește ordinul de convergență al metodelor multipas are loc următoarea lemă

Lema 2.2. Fie $(u_p)_{p\geq 0}$ un șir de numere reale pozitive care verifică condițiile.

i_2. Șirul $(u_p)_{p\geq 0}$ este convergent și $\lim_{p\to\infty} u_p = 0$;

~~ii_2 există un șir de numere reale nenegative $(\alpha_j)_{j\geq 1}$~~

ii_2 există $n+1$ numere reale nenegative $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$ și un șir $(c_p)_{p\geq 0}$, $c_p > 0$; $p = 0, 1, \ldots$, astfel încât împreună cu șirul $(u_p)_{p\geq 0}$ verifică relațiile.

$$(2.8)\quad u_{s+n+1} = c_s u_s^{\alpha_1} u_{s+1}^{\alpha_2} \cdots u_{s+n}^{\alpha_{n+1}}, \quad s = 0, 1, \ldots ;$$

iii_2. există $\lim \frac{\ln u_{p+1}}{\ln u_p} = \omega > 0$,

Atunci ω este rădăcina reală și pozitivă a ecuației

$$(2.9)\ P(t) = t^{n+1} - \alpha_{n+1} t^n - \alpha_n t^{n-1} - \cdots - \alpha_2 t - \alpha_1 = 0$$

Demonstrație. Din (2.8) obținem:

$$(2.10)\quad \lim_{s\to\infty} \frac{\ln u_{n+s+1}}{\ln u_{s+n}} = \lim \frac{\ln c_s}{\ln u_{n+s}} + \sum_{i=0}^{n} \alpha_{i+1} \lim \frac{\ln|u_{s+i}|}{\ln|u_{n+s}|}$$

dar

$$\lim \frac{\ln c_s}{\ln|u_{n+s}|} = 0$$

și

$$\lim \frac{\ln|u_{s+i}|}{\ln|u_{n+s}|} = \frac{1}{\omega^{n-i}}.$$

Din (2.10), ţinând cont de relaţiile de mai sus, obţinem:

$$\omega = \sum_{i=0}^{n} a_{i+1} \frac{1}{\omega^{n-i}}$$

adică

$$\omega^{n+1} - \sum_{i=0}^{n} a_{i+1} \omega^{i} = 0$$

ceeace trebuia demonstrat.

~~Pentru~~ Aşa cum ~~vom constata în~~ este bine cunoscut, rădăcina pozitivă a ecuaţiei (2.9) joacă un rol fundamental în stabilirea ordinului de convergenţă al metodelor cu mai multi paşi. Din acest motiv vom ~~trece~~ da, în cele ce urmează câteva proprietăţi ale rădăcinilor acestei ecuaţii:

~~Teorema~~ Lema 2.3 Dacă coeficienţii a_k, $k=\overline{1,n+1}$, ai ecuaţiei (2.9) sunt nenegativi şi cel puţin un coeficient este pozitiv, atunci ecuaţia (2.9) are o singură rădăcină reală şi pozitivă.

Demonstraţie. Fie $a_k \neq 0$ şi $a_1 = a_2 = \dots = a_{k-1} = 0$. Considerăm ecuaţia $Q(t)=0$ unde Q este dată de relaţia.

$$(2.11)\quad Q(t) = \frac{P(t)}{t^{k-1}} = t^{n-k+2} - a_{n+1} t^{n-k+1} - \dots - a_{k+1} t - a_k$$

Din egalităţile $Q(0) = a_k$ şi $\lim_{t\to\infty} Q(t) = +\infty$ rezultă că ecuaţia (2.9) are cel puţin o rădăcină pozitivă.

Pentru a dovedi unicitatea rădăcinii pozitive, în (2.11) facem schimbarea de variabilă $t = \frac{1}{u}$ și obținem

$$H(u) = Q\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{1}{u^{n-k+2}} R(u)$$

unde R este dat de relația

$$R(u) = a_{k,}u^{n-k+2} + a_{k+1}u^{n-k+1} + \dots + a_{n+1}u - 1 .$$

Se observă ușor că pentru $u > 0$ $R'(u) > 0$ și deci ecuația $R(u) = 0$ are o singură rădăcină pozitivă adică ecuația $P(t) = 0$ are o singură rădăcină pozitivă.

O margine inferioară a rădăcinii pozitive a ecuației (2.9) este dată de următoarea lemă.

Lema 2.4 În condițiile lemei (2.3) dacă $\bar{t}$ este rădăcina ecuației (2.9) atunci are loc relația

$$(2.12) \qquad \bar{t} \geq \tau = \left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right)^{p}$$

unde

$$\cancel{p = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} a_i}{\sum_{i=1}^{n+1}(i-1)a_i}}. \quad p = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} a_i}{(n+1)\sum_{i=1}^{n+1} a_i - \sum_{i=1}^{n+1}(i-1)a_i}$$

Demonstrație Să ținem cont de lema 2.3 atunci este suficient să ~~arătăm~~ dovedim relația $P(\tau) \leq 0$. Pentru aceasta vom folosi inegalitatea mediilor, adică

$$(2.13) \qquad \frac{\sum_{i=1}^{n+1} p_i \alpha_i}{\sum_{i=1}^{n+1} p_i} \geq \left(\prod_{i=1}^{n+1} (\alpha_i)^{p_i}\right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} p_i}}, \quad p_i \geq 0 \quad \alpha_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n+1} .$$

Aplicând relația (2.13) deducem

$$(2.14)\quad P(\tau)=\tau^{n+1}-\sum_{i=1}^{n+1} a_i \tau^{i-1} = \tau^{n+1}-\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right)\frac{\sum_{i=1}^{n+1} a_i \tau^{i-1}}{\sum_{i=1}^{n+1} a_i},$$

dar conform inegalității (2.13) avem pentru $\alpha_i=\tau^{i-1}$ și $p_i=a_i$ $i=\overline{1,n+1}$ avem:

$$(2.15)\quad \frac{\sum_{i=1}^{n+1} a_i \tau^{i-1}}{\sum_{i=1}^{n+1} a_i} \geq \left(\prod_{i=1}^{n+1} \tau^{(i-1)a_i}\right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n+1} a_i}}.$$

Din (2.14) și (2.15) rezultă

$$P(\tau) \leq \tau^{n+1}-\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right)\left(\prod_{i=1}^{n+1} \tau^{(i-1)a_i}\right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n+1} a_i}} =$$

$$= \tau^{n+1}-\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right)\tau^{\frac{\sum_{i=1}^{n+1} a_i(i-1)}{\sum_{i=1}^{n+1} a_i}} = 0$$

dacă $\tau=\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right)^{p}$ unde $p=\dfrac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{(n+1)\sum_{i=1}^{n+1} a_i-\sum_{i=1}^{n} a_i(i-1)}$.

Dacă folosim valorile polinomului P și al derivatei sale pentru $t=1$ atunci τ este dat de următoarea relație.

$$(2.16)\quad \tau = \left[1-P(1)\right]^{\frac{P(1)-1}{(n+1)P(1)-P'(1)}}$$

Dacă în ecuația (2.9) punem $a_1=a_2=\dots=a_{n+1}=q$ atunci obținem ecuația

$$(2.17)\quad Q(t)=t^{n+1}-qt^{n}-qt^{n-1}-\dots-qt^{2}-qt-q=0.$$

O margine inferioară a rădăcinii pozitive a ecuației (2.17) se deduce din (2.16.) și este dată de relația.

$$r_1 = \left[(n+1)q\right]^{\frac{2}{n+2}}.$$

Notăm cu $r_{n+1}(q)$ rădăcina pozitivă a ecuației (2.17), dacă $q \geq 1$, atunci
Este ușor de văzut că au loc următoarele relații

α) $r_n(q) < r_{n+1}(q)$, $n = 2, 3, \ldots$ $q \geq 1$,

β) $\max\left\{q, \frac{n+1}{n+2}(q+1)\right\} \leq r_{n+1}(q) < q+1$, $q \geq 1$, $n \geq 1$

γ) $\lim r_n(q) = q+1$

<u>Demonstrație</u>

Fie ecuația $Q_n(t) = t^{n} - qt^{n-1} - qt^{n-2} - \ldots - qt - q = 0$ cu rădăcina pozitivă $r_n(q)$ și ecuația $Q_{n+1}(t) = t^{n+1} - qt^{n} - qt^{n-1} - \ldots - qt - q = 0$ cu rădăcina pozitivă $r_{n+1}(q)$. Notăm cu $a = r_n(q)$.
Proprietatea α) revine la a arăta că $Q_{n+1}(a) < 0$ în ipoteza că $Q_n(a) = 0$. Este ușor de văzut că are loc relația

$$Q_{n+1}(a) = a\,Q_n(a) - q = -q < 0,$$

ceeace trebuia demonstrat.

Pentru β) este suficient să dovedim că au loc simultan relațiile $Q_{n+1}(q) < 0$ și $Q_{n+1}\left[\frac{n+1}{n+2}(q+1)\right] < 0$.
Pentru ~~aceasta~~ ~~observăm~~ simplitate vom demonstra relațiile $Q_n(q) < 0$ și $Q_n\left[\frac{n}{n+1}(q+1)\right] < 0$.

Observăm că polinomul $Q_n(t)$ se mai poate exprima cu ajutorul relației

$$Q_n(t) = \frac{t^{n+1} - (1+q)t^{n} + q}{t-1}.$$

Din relația de mai sus, rezultă

$$Q_n(q) = \frac{q^{n+1} - (1+q)q^n + q}{q-1} = \frac{-q^n + q}{q-1} < 0$$

și

$$Q_n\left(\frac{n}{n+1}(q+1)\right) = \frac{\left[\frac{n}{n+1}(q+1)\right]^{n+1} - \left(\frac{n}{n+1}\right)^n (q+1)^{n+1} + q}{\frac{n}{n+1}(q+1) - 1} =$$

$$= \frac{\left[\frac{n}{n+1}\right]^n (q+1)^{n+1} \left[\frac{n}{n+1} - 1\right] + q}{\frac{n}{n+1}(q+1) - 1} =$$

$$= \frac{\left[\frac{n}{n+1}\right]^n \left[-\frac{(q+1)^{n+1}}{n+1} + q\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right]}{\frac{n}{n+1}(q+1) - 1}.$$

Observăm că pentru $n \geq 2$ și $q > 1$ are loc relația

$$\frac{n}{n+1}(q+1) - 1 > 0.$$

Este ușor de dovedit că dacă $q > 1$ și $n \geq 2$ are loc relația

$$\frac{(q+1)^{n+1}}{n+1} > q\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

ceea ce ne arată că $Q_n\left(\frac{n}{n+1}(q+1)\right) < 0$ adică prima relație $\beta)$ este dovedită.

Pentru cea de a doua se observă ușor că

$$Q_n(q+1) = \frac{(q+1)^{n+1} - (q+1)^{n+1} + q}{q} = 1,$$

adică $Q_n(q+1) > 0$, adică $q+1 > \delta_n(q)$.

Proprietatea $\gamma)$ rezultă din faptul că pentru $n \to \infty$ $\frac{n+1}{n+2}(q+1) > q$ și din relațiile date de $\beta)$.

Pentru $q=1$ relațiile α), β) și γ) au forma.

α') $\gamma_n(1) \leqq \gamma_{n+1}(1)$, $n=2,3,\dots$

β) $\frac{2n}{n+1} \leqq \gamma_n(1) \leqq 2.$

γ) $\lim \gamma_n(1) = 2$;

Fie $a_1, a_2, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$, $a_i \geqq 0$, $i=\overline{1,n+1}$. Pentru fixarea ideilor presupunem că numerele a_i, $i=\overline{1,n+1}$ verifică relațiile

(2.18) $$a_{n+1} \geqq a_n \geqq a_{n-1} \geqq \dots \geqq a_2 \geqq a_1 \geqq 0$$

și

(2.19). $$a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1} > 1.$$

Considerăm următoarele 3 ecuații

(2.20) $P(t) = t^{n+1} - a_{n+1}t^n - a_n t^{n-1} - \dots - a_2 t - a_1 = 0$;

(2.21) $Q(t) = t^{n+1} - a_1 t^n - a_2 t^{n-1} - \dots - a_n t - a_{n+1} = 0$

și

(2.22) $R(t) = t^{n+1} - a_{i_1} t^n - a_{i_2} t^{n-1} - \dots - a_{i_n} t - a_{i_{n+1}} = 0$

unde $(i_1, i_2, \dots, i_{n+1})$ este o permutare oarecare a numerelor $(1, 2, \dots, n+1)$. Notăm cu a rădăcina pozitivă a ecuației (2.20) și cu b și c rădăcinile pozitive ale ecuațiilor (2.21) respectiv (2.22). Are loc următoarea lemă.

Lema 2.5 Dacă a_i, $i=\overline{1,n+1}$, verifică relațiile (2.18) și (2.19) ~~atunci~~ atunci rădăcinile a, b, c ale ecuațiilor (2.20)–(2.22) verifică relațiile.

$$1 \leq b \leq c \leq a.$$

Observația ...

Lema de mai sus ne arată că dintre toate ecuațiile de forma (2.22) ecuația (2.20) are cea mai mare rădăcină pozitivă iar ecuația (2.21) are cea mai mică rădăcină pozitivă.

Demonstrație. Considerăm toatecele $(n+1)!$ ecuații de forma (2.22). ~~Notăm cu a_{i_s} primul ultimul coeficient diferit de zero din șirul a_{i_j}, $j=\overline{1,n+1}$, adică au loc relațiile $a_{i_{s+1}} = a_{i_{s+2}} = \dots = a_{i_{n+1}} = 0$ și~~ Este suficient să arătăm că au loc relațiile $R(b) \le 0$ și $R(a) \ge 0$ pentru orice permutare $(i_1, i_2, \dots, i_{n+1})$ a numerelor $(1, 2, \dots, n+1)$. Pentru $R(b)$ avem:

$$R(b) = R(b) - Q(b) = (a_1 - a_{i_1})b^n + (a_2 - a_{i_2})b^{n-1} + \dots + (a_n - a_{i_n})b + a_{n+1} - a_{i_{n+1}} =$$

$$= (b-1)\left[(a_1 - a_{i_1})b^{n-1} + (a_1 + a_2 - a_{i_1} - a_{i_2})b^{n-2} + \dots + (a_1 + a_2 + \dots + a_n - a_{i_1} - a_{i_2} - \dots - a_{i_n})\right] \le 0$$

$$+ \cancel{a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1}} -$$

deoarece $R(1) - Q(1) = 0$ și pentru orice $s = \overline{1,n}$, din (2.18) rezultă $a_1 + a_2 + \dots + a_s - a_{i_1} - a_{i_2} - \dots - a_{i_s} \le 0$, ~~având în vedere relațiile (2.18)~~).

Analog se dovedește relația $R(a) \ge 0$.

Din (2.19) rezultă că rădăcinile pozitive ale ecuațiilor (2.20)-(2.22) sunt supraunitare adică $b > 1$.

Pentru ~~metod~~ determinarea metodelor optimale de tip Steffensen ne va fi utilă următoarea lemă

Lema 2.6 Fie $p_1, p_2, \dots, p_{n+1}$ și $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ unde $p_i \ge 1$, $\alpha_i \ge 1$, $i = \overline{1, n+1}$, două mulțimi de numere reale, care verifică relațiile.

(2.23) $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_{n+1}$, $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_{n+1}$.

Dintre toate numerele de forma

(2.24) $\alpha = \alpha_{j_1} p_{k_1} + \alpha_{j_2} p_{k_1} p_{k_2} + \dots + \alpha_{j_{n+1}} p_{k_1} p_{k_2} \dots p_{k_{n+1}}$,

unde $(j_1, j_2 \dots j_{n+1})$ și $(k_1, k_2, \dots, k_{n+1})$ sunt permutări ale numerelor $(1, 2, \dots, n+1)$ cel mai mare este dat de relația

(2.25) $\alpha_{max} = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_1 p_2 + \dots + \alpha_{n+1} p_1 p_2 \dots p_{n+1}$.

Demonstrație. Din relațiile ~~(2.23)~~ primele relații (2.23) rezultă inegalitatea

$$\alpha_{j_1} p_{k_1} + \alpha_{j_2} p_{k_1} p_{k_2} + \dots + \alpha_{j_{n+1}} p_{k_1} p_{k_2} \dots p_{k_{n+1}} \leq$$
$$\alpha_{j_1} p_1 + \alpha_{j_2} p_1 p_2 + \dots + \alpha_{j_{n+1}} p_1 p_2 \dots p_{n+1}$$

pentru oricare două permutări $(j_1, j_2, \dots, j_{n+1})$ și $(k_1, k_2, \dots, k_{n+1})$

~~...~~ Dacă notăm cu $b_i = p_1 p_2 \dots p_i$, atunci este suficient ca pentru orice permutare $(j_1, j_2, \dots, j_{n+1})$ să dovedim inegalitatea.

(2.26). $\alpha_{j_1} b_1 + \alpha_{j_2} b_2 + \dots + \alpha_{j_{n+1}} b_{n+1} \leq \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_{n+1} b_{n+1}$.

Ne propunem să dovedim inegalitatea (2.26) prin inducție. Pentru $n = 1$ inegalitatea (2.26) devine egalitate. Presupunem că au loc relațiile

(2.27) $\alpha_{j_1} \beta_1 + \alpha_{j_2} \beta_2 + \dots + \alpha_{j_n} \beta_n \leq \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_n \beta_n$.

oricare ar fi numerele α_i, β_i $i = \overline{1,n}$ astfel încât $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n$, $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \beta_n$, adică presupunem că relațiile (2.26) au loc pentru perechi de câte n numere,

$(a_{1}, a_2, \ldots, a_n)$ și $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$. Este evident că au loc relațiile: $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \ldots \leq \alpha_n \leq \alpha_{n+1}$ și $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n \leq b_{n+1}$. Pentru fixarea ideilor să presupunem că în relația (2.26) $j_1 = i$, $1 \leq i \leq n$. Dacă în relația (2.27) punem: $\beta_i = b_{i+1} - b_1$, $i = \overline{1,n}$ și $a_k = \alpha_{k}$ $k = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n+1$ ~~(i=1,n)~~ și ținem cont că permutarea $(j_2, j_3, \ldots, j_{n+1})$ ~~se obține din~~ este o permutare a numerelor $(1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n+1)$ atunci (din 2.27) obținem:

$$(b_2-b_1)\alpha_{j_2} + (b_3-b_1)\alpha_{j_3} + \ldots + (b_{n+1}-b_1)\alpha_{j_{n+1}} \leq$$

$$(b_2-b_1)\alpha_1 + (b_3-b_1)\alpha_2 + \ldots + (b_{i}-b_1)\alpha_{i-1} +$$

(2.28) $$(b_{i+1}-b_1)\alpha_{i+1} + \ldots + (b_{n+1}-b_1)\alpha_{n+1} \leq$$

$$(b_2-b_1)a_1 + (b_3-b_1)a_2 + \ldots + (b_{i-1}-b_1)a_{i-1} + \cancel{(b_i-b_1)a_i} + (b_{i+1}-b_1)a_{i+1}$$

$$+ \ldots + (b_{n+1}-b_1)\alpha_{n+1}.$$

Din (2.28) și din relația.

$$\alpha_{j_1} b_1 + \alpha_{j_2} b_2 + \ldots + \alpha_{j_{n+1}} b_{n+1} =$$

$$b_1(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n+1}) + (b_2-b_1)\alpha_{j_2} + (b_3-b_1)\alpha_{j_3} + \ldots + (b_i-b_1)\alpha_{j_i} + (b_{i+1}-b_1)\alpha_{j_{i+1}} + \ldots$$

3. Interpolare inversă de tip Lagrange și Hermite

Una dintre cele mai importante aplicații ale interpolării inverse, așa cum este bine cunoscut, este aceea ce privește aproximarea ~~rădăcinilor~~ soluțiilor ecuațiilor neliniare.

Dacă considerăm ecuația (2.1) și presupunem că $f: I \to D$, unde D este mulțimea valorilor lui f când $x \in I$, este bijectivă, atunci există $f^{-1}: D \to I$. Evident că dacă ecuația (2.1) are o soluție $\bar{x} \in I$ atunci $0 \in D$ și ~~o soluție~~ $\bar{x} = f^{-1}(0)$. Este deci clar că pentru a aproxima soluția $\bar{x}$ este suficient să găsim o aproximație a valorii funcției f^{-1} pentru $y = 0$. Una din cele mai importante metode de aproximare a unei funcții este metoda interpolării. Aceasta presupune, pe lângă anumite proprietăți ale funcției f^{-1} să cunoaștem valorile sale și eventual ale derivatelor sale pe anumite puncte ale mulțimea D.

Dacă notăm cu

(3.1) $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in I$, relative la f

$n+1$ noduri de interpolare, atunci

(3.2) $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{1, n+1}$

sunt $n+1$ noduri de interpolare relative la f^{-1}

Dacă presupunem că f este derivabilă pe I până la ordinul n+1, inclusiv atunci și f^{-1} este derivabilă pe D până la ordinul n+1, inclusiv și ~~părți~~ și între ~~...~~ derivatele celor două funcții au loc relațiile [ ] [ ] [ ]. factorial!

$$(3.3)\quad \left\{f^{-1}(y)\right\}^{(k)} = \sum \frac{(2k-i_1-2)!\,(-1)^{k+i_1-1}}{i_2!\, i_3! \cdots i_k!\,[f'(x)]^{2k-1}} \cdot \left[\frac{f'(x)}{1!}\right]^{i_1} \cdot \left[\frac{f''(x)}{2!}\right]^{i_2} \cdots \left(\frac{f^{(k)}(x)}{k!}\right)^{i_k},$$

unde $y=f(x)$ și suma de mai sus se extinde asupra tuturor soluțiilor în numere întregi și nenegative ale sistemului

$$(3.4)\quad \begin{aligned} i_2+2i_3+\dots+(k-1)i_k &= k-1 \\ i_1+i_2+\dots+i_k &= k-1, \quad k=1,2,\dots,n+1 \end{aligned}$$