

P. 558

SOCIETATEA ROMÂNĂ DE ȘTIINȚE, SECȚIA MATEMATICĂ

BULLETIN MATHÉMATIQUE

DE LA SOCIÉTÉ ROUMAINE DES SCIENCES

33-34 1932

SOMMAIRE:

T. POPOVICIU	<i>Asupra polinoamelor cari formează un șir Appel</i>	11
T. POPOVICIU	<i>Asupra polinoamelor cari formează un șir Appel</i>	22
G. CALUGAREANU	<i>Asupra unei aplicații a teoremei lui Landau</i>	28
N. GEORGESCU	<i>Sur la meilleure valeur a posteriori d'une variable aléatoire</i>	32
N. CIORANESCU	<i>Sur la définition fonctionnelle des polynômes et quelques formules a deux et trois niveaux</i>	39
N. CIORANESCU	<i>Une équation fonctionnelle rencontrée dans l'intégration de l'équation $s=f(x,y)$ avec certaines conditions initiales</i>	48
AL. PANTAZI	<i>Sur les couples de congruences stratifiables</i>	51
O. ONICESCU	<i>Sur le déplacement affine</i>	63
G. MIHOC	<i>Les applications de la loi normale dans le cas des variables interdépendantes</i>	90
PROCESE-VERBALE		103

J. P. 656

INSTITUTUL DE ARTE GRAFICE «BUCOVINA», I. E. TOROUTIL
BUCUREȘTI III.—STR. GRIGORE ALEXANDRESCU 4.—TEL. AUT. 210

BCU Cluj-Napoca



PMATE 2014 00773



ASUPRA POLINOAMELOR CARE FORMEAZĂ UN ȘIR APPELL

de TIBERIU POPOVICIU

1. Se zice că un șir de polinoame în x :

$$(1) \quad P_0, P_1, \dots, P_n, \dots,$$

unde pentru simplificare se poate presupune:

$$P_0 = 1,$$

fără a restrânge generalitatea, formează un șir *Appell*, dacă

$$(2) \quad \frac{dP_n}{dx} = nP_{n-1}.$$

E ușor de văzut că P_n este de forma

$$P_n = x^n + na_1x^{n-1} + n(n-1)a_2x^{n-2} + \dots + n!a_n,$$

unde $a_1, a_2, \dots$ nu depind de n . Șirul (1) depinde deci de succesiunea de numere

$$a_1, a_2, \dots, a_m, \dots \quad ^1)$$

Polinoamele considerate intervin în multe chestiuni importante de analiză. Polinoamele lui *Bernoulli* și *Euler* formează fiecare un șir *Appell*. Ele intervin în calculul diferențelor finite. Polinoamele $R_v(x, k)$ studiate de *Dr. R. Racliș* ²⁾ verifică și ele condiția (2). Polinoamele lui *Hermite*, puțin transformate,

$$2^n H_n = e^{-x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{x^2},$$

1) Pentru legătura ce există între acești coeficienți și șirul (1) se poate vedea „*A. supra unor polinoame remarcabile*” de T. Popoviciu (Arad 1927).

2) Vezi *Revista Universitară Matematică* 1 (1), pag. 1—15.

cari se întâlnesc în teoria ecuațiilor cu derivate parțiale și în multe alte chestiuni, formează și ele un șir *Appell*.

2. În lucrarea de față ne propunem a găsi toate șirurile (1) cari satisfac condiția (2), astfel ca între trei polinoame consecutive P_n , P_{n-1} , P_{n-2} să avem o relație identică de forma:

$$(3) \quad A_n P_n + B_n P_{n-1} + C_n P_{n-2} = 0,$$

unde A_n , B_n , C_n sunt polinoame în x de grade 0, 1, 2, și egalitatea are loc oricare ar fi n . De exemplu polinoamele sus-amintite a lui *Hermite* satisfac o astfel de condiție.

3. Să presupunem întâi că A_n e nul oricare ar fi n . Relația (3) devine

$$(4) \quad B_n P_{n-1} + C_n P_{n-2} = 0,$$

Această relație ne arată că P_{n-1} , P_{n-2} , au cel puțin $n-3$ zerori comune și cum P_{n-2} diferă numai printr'un factor constant de derivata lui P_{n-1} , urmează că P_{n-1} este de forma:

$$P_{n-1} = (x+a)^{n-2} (x+b_{n-1})$$

Relația fundamentală (2) ne dă imediat

$$\frac{b_n}{n} = \frac{b_{n-1}}{n-1} - \frac{a}{n(n-1)} = \frac{b_{n-1}}{n-1} - a \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right),$$

din care se are

$$b_n = \frac{n(b_{n-1} - a) + 2a}{2}$$

Se poate așa dai scrie

$$(I) \quad \begin{aligned} P_0 &= 1, P_1 = x + \frac{a+b}{2}, P_2 = (x+a)(x+b) \\ P_n &= (x+a)^{n-1} \left(x + \frac{n(b-a) + 2a}{2} \right) \end{aligned}$$

Se vede apoi că

$$B_n = x + \frac{(n-2)(b-a) + 2a}{2}$$

$$C_n = (x+a) \left(x + \frac{n(b-a) + 2a}{2} \right)$$

Se știe că un șir de polinoame *Appel* are o funcție generatoare de forma.

$$F(z) e^{zx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} P_n,$$

$F(z)$ fiind funcție numai de z . Să căutăm funcția generatoare a polinoamelor (I).

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} P_n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} (x+a)^{n-1} \left(x+a + \frac{n(b-a)}{2} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} (x+a)^n + \frac{b-a}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{z^n}{n!} (x+a)^{n-1} \\ &= e^{z(x+a)} + \frac{b-a}{2} z e^{z(x+a)} \\ &= \left(1 + \frac{b-a}{2} z \right) e^{za} e^{zx}, \end{aligned}$$

deci

$$F(z) = \left(1 + \frac{b-a}{2} z \right) e^{za}$$

4. Să presupunem acum că A_n este diferit de zero oricare ar fi $n=2, 3, \dots$. În acest caz din cauza omogenității formulei (3) putem presupune

$$(5) \quad A_n = 1, \quad n=2, 3, \dots$$

Punem acum

$$B_n = \alpha_n x + \beta_n$$

$$C_n = \lambda_n x^2 + \mu_n x + \nu_n$$

$\alpha_n, \beta_n, \lambda_n, \mu_n, \nu_n$ depinzând numai de n

Derivând relația (3), avem

$$(6) \quad (n+B'_n) P_{n-1} + (B_n(n-1) + C_n) P_{n-2} + C_n(n-2) P_{n-3} = 0$$

dar avem și

$$(7) \quad P_{n-1} + B_{n-1} P_{n-2} + C_{n-1} P_{n-3} = 0$$

Dacă relațiile (6), (7) sunt distincte se poate deduce, prin eliminarea lui P_{n-1} o relație de forma (4) și cădem peste cazul studiat mai înainte. Să presupunem deci că relațiile (6), (7) sunt echivalente, trebuie atunci ca:

$$(8) \quad n + B'_n = \frac{B(n-1) + C'_n}{B_{n-1}} = \frac{C_n(n-2)}{C_{n-1}}$$

E clar că ambele relațiuni trebuie să fie satisfăcute, căci dacă ar fi satisfăcută numai una am deduce o relație de forma

$$K \cdot P_n = 0,$$

care nu pot fi identic satisfăcute decât dacă $K \equiv 0$.

Relațiile (8) sunt niște identități în x , trebuie deci ca:

$$(9) \quad \begin{aligned} n + \alpha_n &= \frac{\alpha^n(n-1) + 2\lambda_n}{\alpha_{n-1}} = \frac{\beta_n(n-1) + \mu_n}{\beta_{n-1}} = \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}(n-2) = \\ &= \frac{\mu_n}{\mu_{n-1}}(n-2) = \frac{\nu_n}{\nu_{n-1}}(n-2). \end{aligned}$$

Ori se vede pe relația (3) (unde $A_n = 1$) că :

$$(10) \quad 1 + \alpha_n + \lambda_n = 0$$

ceea ce se obține anulând coeficientul lui x^n . Se deduce imediat egalitatea

$$n - 1 - \lambda_n = \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} (n - 2),$$

sau

$$\frac{n-1}{\lambda_n} = \frac{n-2}{\lambda_{n-1}} + 1,$$

din care

$$(11) \quad \lambda_n = \frac{(n-1)\lambda_2}{1 + \lambda_2(n-2)}$$

apoi se deduce

$$(12) \quad \mu_n = \frac{(n-1)\mu_2}{1 + \lambda_2(n-2)}, \quad \nu_2 = \frac{(n-1)\nu_2}{1 + \lambda_2(n-2)}.$$

Din (10) :

$$(13) \quad \alpha_n = -1 - \frac{(n-1)\lambda_2}{1 + \lambda_2(n-2)} = -\frac{1 + \lambda_2(2n-3)}{1 + \lambda_2(n-2)}.$$

În fine din raportul al treilea și al patrulea al relației (9) se deduce.

$$\beta_n [1 + \lambda_2(n-2)] - \beta_{n-1} [1 + \lambda_2(n-3)] + \mu_2 = 0$$

din care :

$$(14) \quad \beta_n = \frac{\beta_2 - (n-2)\mu_2}{1 + \lambda_2(n-2)}$$

Formulele (11), (12), (13), (14) rezolvă problema și se vede că polinoamele verifică relația :

$$(15) \quad [1 + \lambda(n-2)] P_n + [-x[1 + \lambda(2n-3)] + \beta - (n-2)\mu] P_{n-1} + (n-1)(\lambda x^2 + \mu x + \nu) P_{n-2} = 0$$

și depind de patru constante arbitrare λ, μ, ν, β , unde am suprimat indicii 2 pentru simplificare.

Se poate calcula acum funcția generatoare. Pentru aceasta se înmulțește relația (15) cu $\frac{z^{n-2}}{(n-2)!}$ se face $n=2, 3, \dots$

și se adună. Găsim astfel

$$(16) \quad \frac{d^3 Z}{dz^3} \lambda z + \frac{d^2 Z}{dz^2} [1 - z(2\lambda x + \mu)] + \frac{dZ}{dz} [\beta - x - \lambda x + x(\lambda x^2 + \mu x + \nu)] + Z(\lambda x^2 + \mu x + \nu) = 0,$$

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} P_n$$

dacă facem

$$Z = e^{zx} F(z),$$

$F(z)$ e funcție de z nu și de x ; ecuația devine :

$$\frac{d\Phi}{dz} + x\Phi = 0,$$

unde :

$$(17) \quad \Phi = \lambda z F'' + (1 - \lambda - z\mu) F' + (z\nu + \beta + \mu) F = 0.$$

Funcția F este prin urmare dată de ecuația (17).

5. Să presupunem $\lambda = \mu = 0$, ecuația (17) se scrie

$$F' + (z\nu + \beta) F = 0$$

și avem imediat

$$F(z) = e^{-\frac{\nu}{2} z^2 - \beta z}$$

căci $P_0 = 1$. Polinoamele satisfac relația

$$(15)' \quad P_n - (x - \beta) P_{n-1} + (n-1)\nu P_{n-2} = 0.$$

Aceste polinoame se reduc la polinoamele lui *Hermite*. Într'adevăr funcția generatoare a polinoamelor H_n este

$$e^{\frac{z^2}{4} + zx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} H_n(x),$$

iar funcția generatoare a polinoamelor noastre este :

$$e^{-\frac{\nu}{2} z^2 - \beta z + zx} = e^{\frac{(\sqrt{-2\nu} z)^2}{4}} + 2(x - \beta)$$

deci

$$(15)'' \quad P_n(x) = (\sqrt{-2\nu})^n H_n\left(\frac{x - \beta}{\sqrt{-2\nu}}\right)$$

Să presupunem acum că λ, μ nu sunt ambele nule și fie w una din rădăcinile ecuației

$$(18) \quad \lambda z^2 - \mu z + \nu = 0$$

Să punem

$$F = e^{wz} F_1$$

ecuația (17) devine

$$(19) \quad \lambda z F_1'' + (2w\lambda z - z\mu + 1 - \lambda) F_1' + [w(1 - \lambda) + \beta + \mu] F_1 = 0$$

și după definiția ce am dat funcției generatoare trebuie să căutăm soluția holomorfă în jurul originii și care pentru $z=0$ este egală cu 1. Ori aceasta este totdeauna posibil în general.

Înainte de a merge mai departe să reamintim câteva rezultate: Ecuațiile

$$(20) \quad \begin{aligned} x y'' + (\gamma - x) y' - \alpha y &= 0 \quad (\text{Ecuația lui Kummer}) \\ x y'' + \gamma y' - y &= 0 \quad (\text{Ecuația lui Bessel}) \end{aligned}$$

admit soluțiunile

$$G(\alpha, \gamma, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)} \frac{x^n}{n!}$$

$$T(\gamma, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)} \frac{x^n}{n!},$$

cari în general sunt niște funcțiuni întregi

Facem acum mai multe ipoteze:

a) $\lambda \neq 0$, ecuația (18) având rădăcinile distincte.

Prin transformarea

$$z = \frac{\lambda t}{\mu - 2\omega\lambda}$$

ecuația (19) devine

$$t \frac{d^2 F_1}{dt^2} + \left(\frac{1-\lambda}{\lambda} - t \right) \frac{dF_1}{dt} - \frac{\omega(1-\lambda) + \beta + \mu}{2\omega\lambda - \mu} F_1 = 0$$

deci

$$F_1 = G\left(\frac{\omega(1-\lambda) + \beta + \mu}{2\omega\lambda - \mu}, \frac{1-\lambda}{\lambda}, \frac{(\mu - 2\omega\lambda)z}{\lambda}\right)$$

b) $\lambda \neq 0$, ecuația (18) având rădăcinile egale, deci

$$\mu = 2\omega\lambda$$

Facem

$$z = -\frac{\lambda t}{\omega(1+\lambda) + \beta}$$

și avem

$$t \frac{d^2 F_1}{dt^2} + \frac{1-\lambda}{\lambda} \frac{dF_1}{dt} - F_1 = 0$$

și deci

$$F_1 = T\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}, -\frac{\omega(1+\lambda) + \beta}{\lambda} z\right)$$

c) $\lambda = 0$, avem

$$\omega = \frac{\nu}{\mu}$$

și ecuația devine

$$(1-\mu z) F_1' + \left(\frac{\nu}{\mu} + \beta + \mu\right) F_1 = 0$$

deci

$$F_1 = (1-\mu z)^{\frac{\nu}{\mu} + \beta + \mu}$$

Funcția generatoare în acest caz este

$$e^{\frac{\nu}{\mu} z + \mu z x} (1 - \mu z)^{-\frac{\nu}{\mu} - \beta - \mu}$$

Cazul studiat în § 3 intră aci. Dacă $\nu = 0$ avem niște polinoame P_n care sunt tocmai polinoamele $Q_n(x, \lambda)$ studiate de noi într-o lucrare anterioară²⁾

Nu mai insist asupra cazurilor particulare ce pot proveni de exemplu din faptul că

$$\frac{1-\lambda}{\lambda}$$

este un număr întreg negativ. Acest caz se deduce din teoria ecuațiilor lui Kummer și Bessel.

6. Polinoamele P_n studiate de noi se pot atașa funcției hipergeometrice și a confluentelor ei. Vom da rezultatele fără a insista asupra detaliilor calculelor. Din formulele (2), (15) deducem că polinomul P_n satisface ecuația diferențială lineară.

$$(21) \quad (\lambda x^2 + \mu x + \nu) y'' + [-x(1+\lambda(2n-3)) + \beta - (n-2)\mu] y' + n[1+\lambda(n-2)] y = 0$$

Deosebim cazurile:

a) $\lambda = 0$, $\mu \neq 0$, prin transformarea

$$t = \frac{\mu x + \nu}{\mu^2}$$

ecuația (21) devine

$$t y'' + \left[-t + \frac{\nu}{\mu^2} + \frac{\beta}{\mu} - (n-2)\right] y' + n y = 0, \quad \xi = \frac{\nu}{\mu^2} + \frac{\beta}{\mu}$$

deci

$$P_n = \frac{(-1)^n \mu^n (\xi+1)\xi(\xi-1)\dots(\xi-n+2)}{n!} G\left(-n, \xi-n+2, \frac{\mu x + \nu}{\mu^2}\right)$$

observând că coeficientul lui x^n este 1,

b) $\lambda = 0$, $\mu = 0$. Acesta e cazul polinoamelor lui Hermite.

Să presupunem $\nu = \frac{1}{2}$, $\beta = 0$, ecuația devine

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0.$$

2) T. Popoviciu „Asupra unor polinoame remarcabile“ pag. 14.

Prin transformarea

$$x^2 = t$$

se obține

$$t y'' + \left(\frac{1}{2} - t\right) y' + \frac{n}{2} y = 0,$$

care ne dă pentru n par, soluția

$$H_n(x) = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n-1)}{2^{\frac{n}{2}}} G\left(-\frac{n}{2}, \frac{1}{2}, x^2\right)$$

Pentru n impar luăm întâi ca nouă funcție

$$y = xz$$

și obținem, urmând același procedeu:

$$H_n(x) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots n}{2^{\frac{n-1}{2}}} x G\left(-\frac{n-1}{2}, \frac{3}{2}, x^2\right)$$

Pentru cazul general vom avea deci, după (15)'':

$$P_n(x) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n-1) (\sqrt{-v})^n G\left(-\frac{n}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{(x-\beta)^2}{2v}\right) \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots n (\sqrt{-v})^{n-1} (x-\beta) G\left(-\frac{n-1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{(x-\beta)^2}{2v}\right) \end{cases}$$

după cum n este par sau impar.

c) $\lambda \neq 0$ și ecuația (18) are două rădăcini distincte ω_1, ω_2 .

Făcând transformarea

$$x = (\omega_1 - \omega_2) t - \omega_1$$

avem ecuația în t :

$$t(1-t)y'' + \left[\rho + \frac{1+\lambda(2n-3)}{\lambda} t\right] y' - \frac{n}{\lambda} [1+\lambda(n-2)] y = 0,$$

$$\rho = \frac{\omega_1 [1+\lambda(2n-3)] + \beta - (n-2)\mu}{\lambda(\omega_2 - \omega_1)}$$

care e de forma hipergeometrică:

$$t(1-t)y'' + [z - (\xi + \eta + 1)t] y' - \xi \eta y = 0,$$

cu soluția

$$\Phi(\xi, \eta, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi(\xi+1) \dots (\xi+n-1) \eta(\eta+1) \dots (\eta+n-1)}{z(z+1) \dots (z+n-1)} \frac{t^n}{n!}$$

Polinomul căutat e deci de forma:

$$P_n = \frac{(-1)^n \lambda^n \rho(\rho+1) \dots (\rho+n-1) (\omega_1 - \omega_2)^n}{n! [\lambda(n-2)+1] [\lambda(n-1)+1] \dots [\lambda(2\omega-3)+1]} \\ \Phi\left(-n, -\frac{1+\lambda(n-2)}{\lambda}, \rho, \frac{x_1 + \omega_1}{\omega_1 - \omega_2}\right)$$

d) $\lambda \neq 0$, și ecuația (18) are o rădăcină dublă $\omega = \frac{\mu}{2\lambda}$.

Facem

$$t = -\frac{\lambda(x+\omega)}{\omega(1+\lambda)+\beta}$$

ecuația devine:

$$t^2 y'' - \left[1 + \frac{1+\lambda(2n-3)}{\lambda} t\right] y' + \frac{n}{\lambda} [1+\lambda(n-2)] y = 0.$$

Această ecuație e de forma:

$$t^2 y'' - [1 - (\xi + \eta + 1)t] y' + \xi \eta y = 0$$

căreia am atașat seria divergentă¹⁾.

$$T(\xi, \eta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi(\xi+1) \dots (\xi+n-1) \eta(\eta+1) \dots (\eta+n-1)}{n!} t^n.$$

Rezultă dar, că polinomul e de forma

$$P_n = \frac{(-1)^n [\mu(1+\lambda) + 2\lambda\beta]^n}{2^n \lambda^n [\lambda(n-2)+1] [\lambda(n-3)+1] \dots (\lambda+1)(1-\lambda)} \\ T\left(-n, -\frac{1+\lambda(n-2)}{\lambda}, \frac{2\lambda^2 x + \lambda\mu}{\mu(1+\lambda) + 2\lambda\beta}\right)$$

7. În fine pentru ca studiul de față să fie complet, revenind la problema inițială, ar trebui să examinăm cazul când unii din A_n sunt nuli. Pentru a nu lungi mult acest articol, vom da numai indicațiuni asupra acestui caz urmând ca să publicăm ulterior un studiu ecomplet.

Să demonstrăm întâi lema:

Dacă polinomul $f(x)$ este de forma

$$(22) \quad f(x) = (x+a)^n (x+b)^m \quad n > 1, m > 1, a \neq b,$$

nici una din derivatele $f', f'', \dots, f^{(m+n-3)}$ nu poate fi de aceeași formă. Cu alte cuvinte: ecuația

1) Vezi: T. Popoviciu loc. cit. p. 6.

$$(23) \quad f^{(k)}(x) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, m + n - 3$$

are cel puțin trei rădăcini distincte.

Dacă a, b , sunt reali lema rezultă din teorema lui Rolle. Ori în cazul general se poate face o transformare

$$y = ux + v$$

u, v fiind reali sau complexi, astfel ca rădăcinile ecuației transformate să fie reale. Cum o astfel de transformare nu schimbă caracterul ecuației (23) rezultă că lema este adevărată oricare ar fi a, b ; $a \neq b$.

Dacă acum $A_n = 0$, din ecuațiile (2), (3) scoatem

$$(24) \quad P_{n-1} = (x + a)^k (x + b)^{n-1-k}$$

și dacă încă $A_{n'} = 0$, $n' > n$

$$P_{n'-1} = (x + a')^{k'} (x + b')^{n'-1-k'}$$

Dar P_{n-1} este o derivată a lui $P_{n'-1}$, afară de un factor constant; deci relația precedentă e compatibilă cu (24), numai dacă $k=0$, $k=1$.

Să presupunem dar că

$$(25) \quad P_n = (x + a)^k (x + b)^{n-k}$$

se vede că dacă mai mulți A_n sunt nuli există un n , cel puțin, pentru care P_n e de forma (25) unde $k=0$ sau 1.

Pe ecuația (15) se vede că se poate întâmpla ca un singur A_n să fie nul. Dacă

$$\lambda = -\frac{1}{n-1}$$

P_n verifică ecuația diferențială:

$$\left(-\frac{x^2}{n-1} + \mu x + v\right) Y' + \left(\frac{n}{n-1}x + \beta - (n-1)\mu\right) Y = 0$$

Dar P_n fiind luat sub forma (25), avem

$$P_{n'} = (x + a)^{k-1} (x + b)^{n-1-k} (nx + k(b-a) + na)$$

unde presupunem $k > 1$, $n - k \geq k$.

Se vede numai decât că

$$\mu = -\frac{a+b}{n-1}, v = -\frac{ab}{n-1}, \beta = -(a+b) + \frac{k(b-a) + na}{n-1}$$

În ce privește funcția generatoare suntem în cazul a) dela Nr. 5. Putem lua $w = b$, și ecuația în t a lui F_1 este

$$(26) \quad t \frac{d^2 F_1}{dt^2} - (n+t) \frac{d F_1}{dt} + k F_1 = 0$$

$$t = (a - b)z$$

Ecuația (26) are soluția

$$C \sum_{i=0}^k \frac{k(k-1)\dots(k-i+1)}{n(n-1)\dots(n-i+1)} \cdot \frac{t^i}{i!}$$

Ținând deci seamă de forma pe care trebuie s'o aibe funcția generatoare rezultă că

$$F_1 = \sum_{i=0}^k \frac{k(k-1)\dots(k-i+1)}{n(n-1)\dots(n-i+1)} \cdot \frac{(a-b)^{2i}}{i!}$$

Paris, 22 Octombrie 1928.