

P. 558

SOCIETATEA ROMÂNĂ DE ȘTIINȚE, SECȚIA MATEMATICĂ

BULLETIN MATHÉMATIQUE

DE LA SOCIÉTÉ ROUMAINE DES SCIENCES

33-34 1932

SOMMAIRE:

T. POPOVICIU	<i>Asupra polinoamelor cari formează un șir Appel</i>	11
T. POPOVICIU	<i>Asupra polinoamelor cari formează un șir Appel</i>	22
G. CALUGAREANU	<i>Asupra unei aplicații a teoremei lui Landau</i>	28
N. GEORGESCU	<i>Sur la meilleure valeur a posteriori d'une variable aléatoire</i>	32
N. CIORANESCU	<i>Sur la définition fonctionnelle des polynomes et quelques formules a deux et trois niveaux</i>	39
N. CIORANESCU	<i>Une équation fonctionnelle rencontrée dans l'intégration de l'équation $s=f(x,y)$ avec certaines conditions initiales</i>	48
AL. PANTAZI	<i>Sur les couples de congruences stratifiables</i>	51
O. ONICESCU	<i>Sur le déplacement affine</i>	63
G. MIHOC	<i>Les applications de la loi normale dans le cas des variables interdépendantes</i>	90
PROCESE-VERBALE		103

Inv. P 656

INSTITUTUL DE ARTE GRAFICE «BUCOVINA», I. E. TOROȘIU
BUCUREȘTI III.—STR. GRIGORE ALEXANDRESCU 4.—TEL. AUT. 210743

BCU Cluj-Napoca



PMATE 2014 00773



ASUPRA POLINOAMELOR CARE FORMEAZA UN SIR APPELL ¹⁾

de TIB. POPOVICIU

1. In primul nostru articol publicat sub acest titlu am cautat sirurile de polinoame in x :

$$(1) \quad P_0=1, P_1, \dots, P_n, \dots$$

cari verifica conditiile

$$(2) \quad \frac{dP_n}{dx} = P_{n-1}$$

$$(3) \quad A_n P_n + B_n P_{n-1} + C_n P_{n-2} = 0$$

A_n, B_n, C_n fiind polinoame in x de grade 0, 1, 2 respectiv.

In particular am studiat cazul cand $A_n \neq 0$ pentru orice n si cazul $A_n = 0$ pentru orice n . Ne propunem acum a studia cazul al treilea semnalat in articolul sus-citat, cand unii din A_n sunt nuli. Observam ca e suficient, a presupune totdeauna $C_n \neq 0$, caci daca am avea o constructie de forma $C_n \equiv 0$, avem un caz particular al conditiei $A_n = 0$. Se poate intampla ca relatia (3) sa nu fie unica; convenim a spune ca $A_n \neq 0$ cand nu exista nici o relatie (3) unde $A_n = 0$. Am vazut la No. 3 al articolului precedent cand asa ceva este posibil.

Vom intrebuinta notatiile din articolul precedent, la care celitorul este rugat a se referi.

2. Sa presupunem

$$A_{n+1} = 0$$

Rezulta imediat ca putem lua

$$A_{n+2} = A_{n+3} = \dots = A_m = \dots = 1$$

faara a pierde din generalitatea problemei, caci daca $A_m = 0$ sau il putem

¹⁾ Nota a doua.

lua in loc de A_{n+1} , sau toti A_n sunt nuli. Cu alte cuvinte presupunem ca $n+1$ este cea mai mare valoare a lui j pentru care $A_j \neq 0$.

Putem acum calcula coeficientii $\lambda_m, \mu_m, \nu_m, \alpha_m, \beta_m, m > n+2$ in functie de $\lambda_{n+2}, \mu_{n+2}, \nu_{n+2}, \beta_{n+2}$, care se reduc la 4 in virtutea relatiei

$$1 + \lambda_{n+2} + \alpha_{n+2} = 0.$$

Formulele de recurenta stabilite la No. 4 al articolului precedent ne dau,

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_m}{m-1-\lambda_m(m-2)}$$

oricare ar fi $m \geq 2$. Rezulta imediat egalitatea

$$\frac{\lambda_{n+2}}{n+1-\lambda_{n+2}} = \frac{\lambda_m}{m-1-(m-2)\lambda_m}$$

din care

$$(4) \quad \lambda_m = \frac{(m-1)\lambda_{n+2}}{n+1+(m-n-2)\lambda_{n+2}}$$

din

$$\frac{\lambda_m}{\lambda_{n+2}} = \frac{\mu_m}{\mu_{n+2}} = \frac{\nu_m}{\nu_{n+2}}$$

deducem

$$(5) \quad \mu_m = \frac{(m-1)\mu_{n+2}}{n+1+(m-n-2)\lambda_{n+2}}, \quad \nu_m = \frac{(m-1)\nu_{n+2}}{n+1+(m-n-2)\lambda_{n+2}}$$

si

$$(6) \quad \alpha_m = -\frac{n+1+(2m-n-3)\lambda_{n+2}}{n+1+(m-n-2)\lambda_{n+2}}$$

Avem apoi relatia de recurenta :

$$\beta_m [(n+1) + (m-n-2)\lambda_{n+2}] - \beta_{m-1} [n+1 + (m-n-3)\lambda_{n+2}] + \mu_{n+2} = 0$$

de unde

$$(7) \quad \beta_m = \frac{(n+1)\beta_{n+2} - (m-n-2)\mu_{n+2}}{n+1 + (m-n-2)\lambda_{n+2}}$$

Pentru a rezolva complet problema ramane sa se determine $\lambda_m, \mu_m, \nu_m, \rho_m, \alpha_m$ pentru $m \leq n+2$.

Am vazut insa ca

$$P_n = (x+a)^k (x+b)^{n-k}$$

Putem scrie pentru simplificarea

$$P_n = x^{n-k} (x+b_1)^k$$

si rezultatul general se va obtine substituind lui x, b_1 pe $x+b, a-b$ respectiv. Nu se pierde astfel nimic din generalitate, caci

$$\frac{d}{d(x+b)} = \frac{d}{dx};$$

caracterul polinoamelor se mentine deci prin aceasta simplificare

3. Fie $k = 0$, deci

$$P_n = x^n$$

polinoamele P_i , $i < n$, sunt determinate, constantele λ_m , μ_m , ν_m , α_m , β_m cu= noscute pentru $m \leq n + 1$.

Să punem

$$P_{n+1} = x^{n+1} + c, \quad P_{n+2} = x^{n+2} + (n+2)cx + c_1$$

c , c_1 fiind două constante. Se vede că pentru a avea un caz interesant, nereductibil la cele studiate până acum, trebuie să presupunem $c \neq 0$.

Avem atunci

$$\begin{aligned} (n+2)cx + c_1 + cB_{n+2} &= 0 \\ x^2 + xB_{n+2} + C_{n+2} &= 0 \end{aligned}$$

și se scoate imediat

$$\begin{aligned} \alpha_{n+2} &= -(n+2) & \lambda_{n+2} &= n+1 \\ \beta_{n+2} &= -\frac{c_1}{c} = \sigma & \mu_{n+2} &= -\sigma \\ & & \nu_{n+2} &= 0 \end{aligned}$$

Formulele (4), (5), (6), (7) ne dau acum pe λ_m , μ_m , ν_m , α_m , β_m și toate relațiile (3) sunt determinate.

Putem scrie în cazul din față

$$P_m = x^m + Q_{m-n-1}$$

unde șirul de polinoame

$$(8) \quad Q_0 = c, \quad Q_1, \quad Q_2, \dots, \quad Q_s \dots$$

verifică relațiile

$$(9) \quad \begin{aligned} \frac{dQ_{m-n-1}}{dx} &= mQ_{m-n-2} \\ Q_{m-n-1} + B_m Q_{m-n-2} + C_m Q_{m-n-3} &= 0 \end{aligned}$$

Deci șirul de polinoame:

$$(10) \quad R_0 = c, \quad R_1, \dots, \quad R_s, \dots$$

unde

$$Q_s = \binom{n+s+1}{s} R_s$$

este un șir APPELL verificând condiția:

$$(11) \quad \begin{aligned} \binom{n+s+1}{s} R_s + \binom{n+s}{s-1} B_{n+s+1} R_{s-1} + \binom{n+s-1}{s-2} C_{n+s+1} R_{s-2} &= 0 \end{aligned}$$

Și polinoamele R_s intră în cazul studiat în articolul precedent sub No. 4.

Dar avem

$$\begin{aligned} B_{n+s+1} &= -\frac{n+2s}{s}x + \frac{\sigma(n+s)}{s(n+1)} \\ C_{n+s+1} &= \frac{n+s}{s}x^2 - \frac{\sigma(n+s)}{s(n+1)}x \end{aligned}$$

și relația (11) se poate scrie

$$(12) \quad (n+s+1)R_s + \left[-(n+2s)x + \frac{\sigma(n+s)}{n+1} \right]$$

$$R_{s-1} + (s-1) \left(x^2 - \frac{\sigma}{n+1}x \right) R_{s-2} = 0$$

întrăm deci în cazul general luând:

$$\lambda = \frac{1}{n+3}, \quad \mu = -\frac{\sigma}{(n+1)(n+3)}, \quad \nu=0, \quad \beta = \frac{\sigma(n+2)}{(n+1)(n+3)}$$

Se obține apoi

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^s}{s!} R_s = c \cdot e^{zx} G\left(n+1, n+2, -\frac{\sigma}{n+1}z\right)$$

căci $R_0 = c$,

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^{n+s+1}}{(n+s+1)!} Q_s = \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^s}{s!} R_s$$

și deci funcția generatoare este

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} P_m = e^{zx} \left[1 + c \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} G\left(n+1, n+2, -\frac{\sigma}{n+1}z\right) \right]$$

Se poate dar spune pentru cazul general

$$P_n = (x+b)^n$$

că polinoamele sunt generate de funcția

$$e^{z(x+b)} \left[1 + c \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} G(n+1, n+2, \theta z) \right]$$

b , c , d fiind constante arbitrare.

Rezultatul precedent a fost obținut în ipoteza $\sigma \neq 0$.

Dacă $\sigma = 0$ procedeul pe care l'am aplicat în lucrarea precedentă nu are sens, dar e ușor de văzut că formula rămâne aplicabilă. Se obține funcția generatoare

$$e^{z(x+b)} \left[1 + c \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \right].$$

4. Să trecem la cazul $k = 1$, care se tratează în același mod.

$$P_n = x^{n-1} (x + b_1)$$

și

$$P_{n+1} = x^n \left(x + \frac{n+1}{n} b_1 \right) + c, P_{n+2} = x^{n+1} \left(x + \frac{n+2}{n} b_1 \right) + (n+2)cx + c_1$$

și $c \neq 0$.

Se găsește că

$$\alpha_{n+2} = -(n+2)$$

$$\beta_{n+2} = -\frac{c_1}{c} = -n b_1$$

$$\lambda_{n+2} = n+1$$

$$\mu_{n+2} = (n+1) b_1$$

$$\nu_{n+2} = 0.$$

Putem scrie și aci

$$P_m = x^{m-1} \left(x + \frac{m}{n} b_1 \right) + Q_{m-n-1}$$

și polinoamele Q_s verifică relația (9). Se deduc polinoamele R_s cu relația (11), care se scrie

$$(n+s+1) R_s + [-(n+2s)x + (1-n-s)b_1] R_{s-1} + (s-1)(x^2 + b_1 x) R_{s-2} = 0$$

și se poate lua

$$\lambda = \frac{1}{n+3}, \mu = \frac{b_1}{n+3}, \nu = 0, \beta = -\frac{n+1}{n+3} b_1$$

și funcția generatoare este :

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^s}{s!} R_s = c \cdot e^{zx} G(n, n+2, b_1 z)$$

Se are pentru cazul general imediat :

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} P_m = e^{z(x+b)} \left[1 + \frac{2}{n} (a-b) z + c G(n, n+2, (a-b)z) \right]$$

5. Cazul $k > 1$, adică

$$P_n = x^{n-k} (x + b_1)^k \quad n-k \geq k, \quad k > 1,$$

Se poate atașa cazului general luând

$$\lambda = -\frac{1}{n-1}$$

după cum am văzut în articolul trecut.

Am găsit :

$$\lambda = -\frac{1}{n-1}, \alpha = -\frac{n-2}{n-1}, \mu = -\frac{b_1}{n-1}, \nu=0, \beta = -\frac{(k-1)b_1}{n-1}$$

Ecuația care dă funcția generatoare se scrie :

$$zF'' - [z b_1 + n] F' + k b_1 F = 0$$

punem

$$z b_1 = t.$$

$$tF'' - [t+n] F' + kF = 0$$

Toate integralele acestei ecuații sunt holomorfe în jurul originii. Intr'această devărm avem un polinom

$$\sum_{i=0}^k \frac{k(k-1)\dots(k-i+1)}{i! n(n-1)\dots(n-i+1)} t^i = P_1(t)$$

care satisface ecuația. Punând

$$F = e^t \varphi$$

avem

$$t\varphi'' - (n-t)\varphi' - (n-k)\varphi = 0$$

sau schimbând pe t în $-t$:

$$t\varphi'' - (n+t)\varphi' + (n-k)\varphi = 0$$

Avem deci soluția distinctă de precedentă :

$$e^t \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \frac{(n-k)(n-k-1)\dots(n-k-i+1)}{i! n(n-1)\dots(n-i+1)} t^i = e^t P_2(t)$$

Se are deci

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} P_n = e^{zx} [cP_1(b_1 z) + c_1 e^z b_1 P_2(b_1 z)]$$

constantele c, c_1 fiind legate prin relația

$$c + c_1 = 1$$

In general vom avea polinoamele

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} P_n = e^{z[x+b]} [cP_1[(a-b)z] + c_1 e^{[a-b]z} P_2[(a-b)z]]$$

6. Dacă un B_n e nul identic trebuie să avem

$$\lambda = -\frac{1}{2n-3}$$

și suntem în cazul precedent. Acesta deci nu prezintă un caz distinct de cele studiate.

Paris, 8.XI.1928.