

SUR CERTAINS PROBLÈMES DE MAXIMUM DE STIELTJES ¹⁾

PAR

TIBERIU POPOVICIU

I

Sur quelques théorèmes de STIELTJES et de M. I. SCHUR

1. Désignons par $V(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ le déterminant de VAN DER MONDE des nombres (ou points) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Le carré de ce déterminant est le discriminant des nombres α_i , ou le discriminant du polynôme de degré n ayant comme zéros les points α_i .

Dans une note STIELTJES a énoncé le théorème suivant ²⁾:

Théorème I. Lorsque $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et que les x_i restent compris dans l'intervalle $(0, 1)$, l'expression

$$D = D(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left[\prod_{i=1}^n x_i^\alpha (1-x_i)^\beta \right] V^2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

devient maximum quand les x_i sont les zéros du polynôme de JACOBI

$$P_n(x) = F(-n, \alpha + \beta + n - 1, \alpha, x) = \frac{x^{1-\alpha} (1-x)^{1-\beta}}{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1)} \frac{d^n}{dx^n} x^{\alpha+n-1} (1-x)^{\beta+n-1}$$

La valeur de ce maximum est

$$M_n(\alpha, \beta) = \prod_{i=1}^n \frac{i! (\alpha + i - 1)^{\alpha+i-1} (\beta + i - 1)^{\beta+i-1}}{(\alpha + \beta + n + i - 2)^{\alpha+\beta+n+i-2}}$$

STIELTJES a donné la démonstration dans un autre travail ³⁾, sur lequel nous reviendrons plus loin. Le calcul de $M_n(\alpha, \beta)$ n'est pas indiqué par STIELTJES mais il peut se faire en suivant la méthode, développée sur certains cas particuliers, de M. I. SCHUR ⁴⁾.

¹⁾ J'ai entrepris ce travail à la suite des discussions que j'ai eu avec M. le Prof. TH. ANGHELUTA à l'Institut Mathématique de l'Université de Cluj.

²⁾ TH. J. STIELTJES „Sur les polynômes de JACOBI“, C. R. Acad. Sc., Paris, t. 100 (1885), p. 620.

³⁾ TH. J. STIELTJES „Sur certains polynômes qui vérifient une équation différentielle linéaire du second ordre et sur la théorie des fonctions de LAMÉ“. Acta Math., t. 6 (1885), p. 321.

⁴⁾ I. SCHUR „Über die Verteilung der Wurzeln gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten“. Math. Zeitschrift, t. 1 (1918), p. 377.

2. La démonstration du théorème I peut se faire facilement. Remarquons d'abord que $D(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a un maximum pour $0 \leq x_i \leq 1$ qui est nécessairement atteint et notamment pour des valeurs x_i toutes distinctes et ne coïncidant pas avec 0 et 1.

On peut voir facilement que ce maximum ne peut être atteint que pour un seul système de points x_i . Supposons, en effet, que

$$\max_{(0,1)} D(x_1, x_2, \dots, x_n) = D(y_1, y_2, \dots, y_n) = D(y'_1, y'_2, \dots, y'_n)$$

où

$$(1) \quad 0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n < 1; \quad 0 < y'_1 < y'_2 < \dots < y'_n < 1 \\ |y_1 - y'_1| + |y_2 - y'_2| + \dots + |y_n - y'_n| > 0$$

Si nous posons

$$y''_i = \frac{y_i + y'_i}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

nous avons

$$(y''_i)^2 \geq y_i y'_i, \quad (1 - y''_i)^2 \geq (1 - y_i)(1 - y'_i), \quad (y''_i - y''_j)^2 \geq (y_i - y_j)(y'_i - y'_j) |$$

l'égalité, dans l'une de ces formules, ne pouvant avoir lieu que si $y_i = y'_i$ resp. $y_i - y_j = y'_i - y'_j$.

Il en résulte que

$$(2) \quad D(y''_1, y''_2, \dots, y''_n) \geq \sqrt{D(y_1, y_2, \dots, y_n) D(y'_1, y'_2, \dots, y'_n)}$$

l'égalité n'étant possible que si les suites (1) coïncident. C'est en contradiction avec nos hypothèses et l'unicité signalée en résultat.

On en déduit, en particulier, que si $\alpha = \beta$ les points pour lesquels le maximum est atteint sont symétriquement distribués par rapport au milieu de l'intervalle (0,1). Cela résulte du fait que si $\alpha = \beta$, on a

$$D(1 - x_1, 1 - x_2, \dots, 1 - x_n) = D(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (0 \leq x_i \leq 1)$$

3. STIELTJES a démontré que la détermination du maximum se fait à l'aide du calcul différentiel. Posons

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n).$$

Le maximum est donné par le système

$$\frac{\partial D}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

qui admet, comme il va en résulter plus loin, une seule solution sous l'hypothèse que les x_i sont distincts entre eux. Cette unicité est d'ailleurs démontrable directement à l'aide de l'inégalité (2).

Un calcul simple nous donne

$$\frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial x_i} = \frac{\alpha}{x_i} - \frac{\beta}{1 - x_i} + 2 \sum_{j=1}^n \frac{1}{x_i - x_j} = \frac{\alpha}{x_i} - \frac{\beta}{1 - x_i} + \frac{P''(x_i)}{P'(x_i)}$$

Σ' désignant une sommation où la valeur $j=i$ est exclue.

Le maximum sera donc donné par le système

$$x_i(1 - x_i)P''(x_i) + [\alpha - (\alpha + \beta)x_i]P'(x_i) = 0 \\ i = 1, 2, \dots, n.$$

On voit immédiatement que le polynôme $P(x)$, qui est de degré n , doit vérifier l'équation différentielle

$$x(1 - x)y'' + [\alpha - (\alpha + \beta)x]y' + \lambda y = 0$$

λ étant une constante. On trouve $\lambda = n(n + \alpha + \beta - 1)$ et on voit que $P(x)$ s'exprime à l'aide de la série hypergéométrique de GAUSS, $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$. On trouve effectivement que ce polynôme, à un facteur constant près, est égal à $F(-n, \alpha + \beta + n - 1, \alpha, x)$ donc il est un polynôme de JACOBI de degré n .

4. Pour calculer la valeur du maximum $M_n(\alpha, \beta)$ nous allons faire d'abord quelques considérations un peu plus générales.

Soit

$$Q_0(x), Q_1(x), \dots, Q_n(x), \dots$$

une suite de polynômes définis par les relations de récurrence

$$(3) \quad Q_0 = 1, Q_1 = b_1 x + c_1, Q_n = (b_n x + c_n) Q_{n-1} + a_n Q_{n-2} \\ n = 2, 3, \dots$$

où nous supposons que les a_i et les b_i sont différents de zéro.

Désignons par $\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_n^{(n)}$ les zéros du polynôme $Q_n(x)$ et par

$$\Delta_n = \prod_{i=1}^n Q_{n-1}(\xi_i^{(n)})$$

le résultant des polynômes Q_{n-1}, Q_n (ce résultant étant défini de cette manière).

De (3) nous déduisons que le coefficient de x^n dans $Q_n(x)$ est égal à $b_1 b_2 \dots b_n$. Faisant ensuite successivement $x = \xi_1^{(n-1)}, \xi_2^{(n-1)}, \dots, \xi_{n-1}^{(n-1)}$, nous en déduisons

$$\prod_{i=1}^{n-1} Q_n(\xi_i^{(n-1)}) = a_n^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} Q_{n-2}(\xi_i^{(n-1)}) = a_n^{n-1} \Delta_{n-1}.$$

Mais

$$\prod_{i=1}^{n-1} Q_n(\xi_i^{(n-1)}) = \frac{b_n^{n-1}}{b_1 b_2 \dots b_{n-1}} \Delta_n$$

donc

$$\Delta_n = \frac{b_1 b_2 \dots b_{n-1}}{b_n^{n-1}} a_n^{n-1} \Delta_{n-1}.$$

Si on remarque maintenant que $\Delta_1 = 1$, on obtient

$$(4) \quad \Delta_n = \frac{a_2}{b_2} \left(\frac{a_3}{b_3} \right)^2 \dots \left(\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} \right)^{n-2} \left(\frac{a_n}{b_n} \right)^{n-1} b_1^{n-1} b_2^{n-2} \dots b_{n-2}^2 b_{n-1}.$$

En particulier, les polynômes $P_n(x) = F(-n, \alpha + \beta + n - 1, \alpha, x)$ sont liés par des relations de la forme (3). Dans ce cas

$$(5) \quad b_n = - \frac{(\alpha + \beta + 2n - 2)(\alpha + \beta + 2n - 3)}{(\alpha + n - 1)(\alpha + \beta + n - 2)}, \quad \left(b_1 = - \frac{\alpha + \beta}{\alpha} \right)$$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{(n-1)(\beta + n - 2)}{(\alpha + \beta + 2n - 3)(\alpha + \beta + 2n - 4)}$$

et on trouve

$$(6) \quad \Delta_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{i! (\beta + i - 1)!}{(\alpha + i - 1)^{n-i} (\alpha + \beta + n + i - 2)^i}$$

5. Passons maintenant au calcul de $M_n(\alpha, \beta)$. Si $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ sont les zéros du polynôme $P_n(x)$, nous avons

$$M_n(\alpha, \beta) = \left[\prod_{i=1}^n \xi_i^\alpha (1 - \xi_i)^\beta \right] V^2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n).$$

Les relations

$$P_n(0) = 1, \quad P_n(1) = (-1)^n \prod_{i=1}^n \frac{\beta + i - 1}{\alpha + i - 1}$$

$$P_n(x) = (-1)^n \left[\prod_{i=1}^n \frac{\alpha + \beta + n + i - 2}{\alpha + i - 1} \right] (x - \xi_1)(x - \xi_2) \dots (x - \xi_n)$$

nous donnent

$$(7) \quad \begin{cases} \xi_1 \xi_2 \dots \xi_n = \prod_{i=1}^n \frac{\alpha + i - 1}{\alpha + \beta + n + i - 2} \\ (1 - \xi_1)(1 - \xi_2) \dots (1 - \xi_n) = \prod_{i=1}^n \frac{\beta + i - 1}{\alpha + \beta + n + i - 2} \end{cases}$$

Nous avons maintenant

$$(8) \quad V^2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{\prod_{i=1}^n P'_n(\xi_i)}{(b_1 b_2 \dots b_n)^n}$$

Mais les polynômes P_n, P_{n-1} et la dérivée du premier vérifient encore la relation suivante

$$x(1-x)P'_n(x) = (d_n x + e_n)P_n(x) - \frac{n(\beta + n - 1)}{\alpha + \beta + 2n - 2} P_{n-1}(x)$$

d_n, e_n étant deux constantes sans importance pour nous.

Si nous faisons successivement $x = \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ nous obtenons

$$(9) \quad \prod_{i=1}^n P'_n(\xi_i) = (-1)^n \frac{n^n (\beta + n - 1)^n}{(\alpha + \beta + 2n - 2)^n} \frac{\Delta_n}{\prod_{i=1}^n \xi_i (1 - \xi_i)}$$

Enfin, compte tenant de (5), (6), (7), (8), (9) nous obtenons

$$M_n(\alpha, \beta) = \prod_{i=1}^n \frac{i! (\alpha + i - 1)^{\alpha+i-1} (\beta + i - 1)^{\beta+i-1}}{(\alpha + \beta + n + i - 2)^{\alpha+\beta+n+i-2}}$$

qui est précisément la formule demandée.

6. Une transformation linéaire simple permet d'énoncer le théorème suivant:

Théorème II. Lorsque $\alpha > 0, \beta > 0$ et que les x_i restent compris dans l'intervalle (a, b) , $a < b$, l'expression

$$\left[\prod_{i=1}^n (x_i - a)^\alpha (b - x_i)^\beta \right] V^2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

devient maximum quand les x_i sont les zéros du polynôme

$$(x - a)^{1-\alpha} (b - x)^{1-\beta} \frac{d^n}{dx^n} (x - a)^{\alpha+n-1} (b - x)^{\beta+n-1}.$$

La valeur de ce maximum est

$$(b - a)^{n(\alpha+\beta+n-1)} M_n(\alpha, \beta).$$

En particulier si $a = -1, b = 1, \alpha = \beta = 1$ on obtient un autre théorème de STIELTJES⁵⁾:

Théorème III. Lorsque les x_i restent dans l'intervalle $(-1, 1)$, l'expression

$$(1 - x_1^2)(1 - x_2^2) \dots (1 - x_n^2) V^2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

devient maximum quand les x_i sont les zéros du polynôme X_n de LEGENDRE de degré n . La valeur de ce maximum est

$$\frac{2^4 3^6 \dots n^{2n}}{3^3 5^5 \dots (2n-1)^{2n-1}}$$

7. STIELTJES a encore énoncé le théorème suivant⁶⁾:

Théorème IV. Lorsque les x_i sont dans l'intervalle $(-1, 1)$ l'expression

$$V^2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

devient maximum quand les x_i sont les zéros du polynôme V_n qui provient du développement

$$\sqrt{1 - 2xz + z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(x) z^n.$$

La valeur de ce maximum, qu'on peut désigner par $2^{n(n-1)} M_n(0, 0)$, est

$$\frac{2^2 3^3 \dots (n-2)^{n-2} 2^2 3^3 \dots n^n}{3^3 5^5 \dots (2n-3)^{2n-3}}.$$

⁵⁾ TH. J. STIELTJES: „Sur quelques théorèmes d'algèbre", C. R. Acad. Sc., Paris, t. 100 (1885) p. 439.

⁶⁾ Loc cit. ⁵⁾.

Ce théorème correspond au cas où $\alpha = \beta = 0$. Il a été démontré par M. I. SCHUR ⁷⁾. Les résultats précédents ne sont pas applicables sans précautions, mais on peut voir aisément que cette propriété résulte du théorème II. On voit, en effet, que ce maximum ne peut être atteint que si les x_i sont tous distinct et si l'un coïncide avec 0 et un autre avec 1. On déduit donc le théorème IV du théorème II en y faisant $a = -1$, $b = 1$, $\alpha = \beta = 2$ et en prenant $n - 2$ au lieu de n .

Remarquons que

$$\frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} (x^2 - 1)^{n-1} = - \frac{n(x^2 - 1)}{2^{n-1}(n-2)!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^{n-1} = \\ = - \int_{-1}^x X_{n-1}(x) dx = V_n(x).$$

On peut aussi, de la même manière, traiter les cas où $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$ seulement. Par exemple le cas $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ résulte du théorème II en y faisant $\alpha = 2$ et en prenant $n - 1$ au lieu de n . On définit ainsi les nombres $M_n(0, \beta)$, $M_n(\alpha, 0)$.

On trouve effectivement ⁸⁾

$$M_n(\alpha, 0) = M_n(0, \alpha) = M_{n-1}(\alpha, 2) = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{i(i+1)^{i+1}(\alpha+i-1)^{\alpha+i-1}}{(\alpha+n+i-1)^{\alpha+n+i-1}}$$

8. Sur les nombres $M_n(\alpha, \beta)$ nous pouvons faire quelques remarques. Délimitons d'abord le nombre $M_n(\alpha, \beta)$ à l'aide de $M_n(0, 0)$.

Nous avons

$$(10) \quad M_n(\alpha, \beta) < \max_{(0,1)} V^2(x_1, x_2, \dots, x_n) = M_n(0, 0) \quad (\alpha + \beta > 0)$$

Remarquons que

$$V^2(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = \frac{V^2(\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n, \eta_{n+1})}{(\eta_0 - \eta_{n+1})^2 \prod_{i=1}^n (\eta_0 - \eta_i)^2 (\eta_{n+1} - \eta_i)^2}$$

Si $\eta_0 = -1$, $\eta_1, \dots, \eta_n, \eta_{n+1} = 1$ sont les zéros du polynôme $V_{n+2}(x)$, nous avons

$$2^{n(\alpha+\beta+n-1)} M_n(\alpha, \beta) \geq \left[\prod_{i=1}^n (1 + \eta_i)^\alpha (1 - \eta_i)^\beta \right] V^2(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = \\ = 2^{(n+2)(n+1)-2} M_{n+2}(0, 0) \left[\prod_{i=1}^n (1 + \eta_i)^{\alpha-2} (1 - \eta_i)^{\beta-2} \right].$$

⁷⁾ Loc cit. ⁴⁾.

⁸⁾ Bien entendu on peut aussi écrire

$$M_n(\alpha, 0) = \lim_{\beta \rightarrow 0} M_n(\alpha, \beta) ; \quad M_n(0, 0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} M_n(\alpha, \beta)$$

compte tenant de $\alpha^\alpha \rightarrow 1$ lorsque $\alpha \rightarrow 0$.

Nous avons

$$V_{n+1}(x) = - \frac{(2n+1)!}{2^n n! (n+2)!} x^{n+2} + \dots$$

donc

$$\prod_{i=1}^n (1 - \eta_i) = - \frac{2^n n! (n+2)!}{(2n+1)!} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{V_{n+2}(x)}{x^2 - 1} = - \frac{2^{n-1} n! (n+2)!}{(2n+1)!} V'_{n+2}(1)$$

$$\prod_{i=1}^n (1 + \eta_i) = (-1)^{n+1} \frac{2^n n! (n+2)!}{(2n+1)!} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{V_{n+2}(x)}{x^2 - 1} \\ = (-1)^{n+2} \frac{2^{n+1} n! (n+2)!}{(2n+1)!} V'_{n+2}(-1)$$

Mais

$$V'_{n+2}(1) = -1, \quad V'_{n+2}(-1) = (-1)^{n+2}$$

donc

$$\prod_{i=1}^n (1 + \eta_i) = \prod_{i=1}^n (1 - \eta_i) = \frac{2^{n-1} n! (n+2)!}{(2n+1)!}$$

Tenant compte de la formule

$$2^{(n+2)(n+1)} M_{n+2}(0, 0) = \frac{2^n (n-1)! (n-1)^{n-1} n^n (n+1)^{n+1} (n+2)^{n+2}}{(2n-1)^{2n-1} (2n+1)^{2n+1}} M_n(0, 0)$$

nous en déduisons

$$(11) \quad M_n(\alpha, \beta) \geq \frac{(n-1)^{n-1} n^n (n+1)^{n+1} (n+2)^{n+2}}{2^{\alpha+\beta+2} (2n+1) (2n-1)^{2n-1} (2n+1)^{2n+1}} \cdot$$

$$\left[\frac{n! (n+2)!}{(2n+1)!} \right]^{\alpha+\beta-4} M_n(0, 0)$$

et cette formule est évidemment valable pour $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$.

Compte tenant de la formule de STIRLING, on voit que la racine $n(n-1)^{\text{ème}}$ du coefficient de $M_n(0, 0)$ dans (11) tend vers 1 pour $n \rightarrow \infty$. D'autre part M. M. FEKETE ⁹⁾ a déjà remarqué que

$$\frac{n(n-1)}{\sqrt{M_n(0, 0)}} \rightarrow \frac{1}{4}$$

$$n \rightarrow \infty$$

ce nombre étant le diamètre transfini du segment $0 - 1$. Les formules (10), (11) nous montrent donc que:

Théorème V. α, β étant deux nombres non-négatifs, l'expression

$$\frac{n(n-1)}{\sqrt{M_n(\alpha, \beta)}}$$

⁹⁾ M. FEKETE „Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten“ Math. Zeitschrift, t. 17 (1923), p. 228.

tend, pour $n \rightarrow \infty$, vers le diamètre transfini $\frac{1}{4}$ du segment $0-1$ ¹⁰⁾.

On établit facilement que $M_n(\alpha, \beta)$ est une fonction décroissante de α et de β . On vérifie immédiatement que la fonction

$$(\alpha + i - 1) \log(\alpha + i - 1) + (\beta + i - 1) \log(\beta + i - 1) - (\alpha + \beta + n + i - 2) \log(\alpha + \beta + n + i - 2)$$

est convexe par rapport à α et β lorsque $i \leq n$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

La fonction $\log M_n(\alpha, \beta)$ est une somme de fonctions convexes et nous pouvons donc énoncer la propriété suivante:

Théorème VI. La fonction $M_n(\alpha, \beta)$ est décroissante et son logarithme est une fonction convexe par rapport aux deux variables α et β .

On peut facilement voir que la propriété est valable pour $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$.

On trouve facilement les propriétés correspondantes quand, au lieu de l'intervalle $(0, 1)$, on prend un intervalle fini quelconque (a, b) .

9. Prenons $a = 0$, $b = \beta$ dans le théorème II; nous en déduisons que pour $0 \leq x_i \leq \beta$ l'expression

$$\left[\prod_{i=1}^n x_i \left(1 - \frac{x_i}{\beta} \right)^\beta \right] V^2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

devient maximum quand les x_i sont les zéros du polynôme (écrit sous une forme convenable)

$$\frac{x^{1-\alpha} \left(1 - \frac{x}{\beta} \right)^{1-\beta}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} x^{\alpha+n-1} \left(1 - \frac{x}{\beta} \right)^{\beta+n-1}.$$

Si nous faisons maintenant $\beta \rightarrow \infty$, nous obtenons le

Théorème VII. Lorsque $\alpha > 0$ et que les x_i restent non-négatifs, l'expression

$$(12) \quad (x_1 x_2 \dots x_n)^\alpha e^{-(x_1+x_2+\dots+x_n)} V^2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

¹⁰⁾ M. FEKETE a établi l'existence de la limite de $\sqrt[n]{M_n(0, 0)}$ en démontrant que la suite

$$\left\{ \sqrt[n]{M_n(0, 0)} \right\} \quad n = 2, 3, \dots$$

est décroissante. α, β étant donnés, la suite plus générale

$$\left\{ \sqrt[n]{M_n(\alpha, \beta)} \right\} \quad n = k, k+1, \dots$$

est aussi décroissante si on prend le nombre k suffisamment grand.

devient maximum quand les x_i sont les zéros du polynôme de LAGUERRE généralisé

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^x x^{1-\alpha}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x} x^{\alpha+n-1}.$$

La valeur de ce maximum est

$$N_n(\alpha) = e^{-n(\alpha+n-1)} \prod_{i=1}^n i! (\alpha + i - 1)^{\alpha+i-1}.$$

Le passage à la limite est justifié par le fait — qu'on démontre comme au No. 2 — que l'expression (12) admet un maximum atteint pour un seul système de points $x_i \geq 0$.

Si $\alpha = 1$ le problème correspondant est résolu par le polynôme de LAGUERRE proprement dit.

Le cas $\alpha = 0$ peut aussi se rattacher au cas $\alpha = 2$. En effet si $\alpha = 0$ pour que (12) soit maximum il faut qu'un des points x_i coïncide avec 0. Faisant donc $\alpha = 2$ et prenant $n-1$ au lieu de n on déduit le

Théorème VIII. Lorsque les x_i restent non-négatifs, l'expression

$$e^{-(x_1+x_2+\dots+x_n)} V^2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

devient maximum quand les x_i sont les zéros du polynôme

$$-\frac{e^x x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x} x^{n-1} = \frac{e^x}{n!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x} x^n = \int_0^x L_{n-1}(x) dx = G_n(x).$$

La valeur de ce maximum est

$$N_n(0) = e^{-n(n-1)} 2^2 3^3 \dots (n-1)^{n-1} 2^2 3^3 \dots n^n.$$

$L_{n-1}(x)$ est le polynôme de LAGUERRE

$$L_{n-1}(x) = \frac{e^x}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x} x^{n-1}$$

de degré $n-1$.

10. Faisons quelques remarques sur les nombres $N_n(\alpha)$.

Si $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ sont les zéros de $L_n^{(\alpha)}(x)$, nous avons

$$N_n(\alpha) \leq (\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n)^\alpha N_n(0)^{11)}.$$

Si $\eta_0 = 0$, $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ sont les zéros de $G_{n+1}(x)$

$$\begin{aligned} N_n(\alpha) &\geq (\eta_1 \eta_2 \dots \eta_n)^\alpha e^{-(\eta_1+\eta_2+\dots+\eta_n)} V^2(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = \\ &= (\eta_1 \eta_2 \dots \eta_n)^{\alpha-2} e^{-(\eta_1+\eta_2+\dots+\eta_n)} V^2(\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n) = \\ &= (\eta_1 \eta_2 \dots \eta_n)^{\alpha-2} N_{n+1}(0). \end{aligned}$$

Mais, un calcul simple nous donne

$$\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n = \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1), \quad \eta_1 \eta_2 \dots \eta_n = (n+1)!$$

donc

$$(13) \quad [(n+1)!]^{\alpha-2} N_{n+1}(0) \leq N_n(\alpha) [\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1)]^\alpha N_n(0).$$

¹¹⁾ L'égalité n'est d'ailleurs possible que si $\alpha = 0$.

Or, l'ordre de grandeur du produit $2^2 3^3 \dots n^n$ est

$$n^{\frac{n^2}{2}} + \frac{n}{2} + \frac{1}{12} e^{-\frac{n^2}{4}}$$

ce qui signifie que

$$\frac{\sqrt[n(n-1)]{2^2 3^3 \dots n^n}}{\sqrt{n}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{e}} \quad n \rightarrow \infty.$$

On en déduit que

$$\frac{\sqrt[n(n-1)]{N_n(0)}}{n} \rightarrow \frac{1}{e\sqrt[4]{e}} \quad n \rightarrow \infty.$$

Remarquons encore que $N_n(\alpha)$ n'est pas une fonction monotone mais son logarithme est convexe. Compte tenant aussi de (13) et de $N_{n+1}(0) = e^{-2n} n^n (n+1)^{n+1} N_n(0)$ nous avons le

Théorème IX. Le logarithme de la fonction $N_n(\alpha)$ est convexe pour $\alpha \geq 0$, α étant donné on a

$$\frac{\sqrt[n(n-1)]{N_n(\alpha)}}{n} \rightarrow \frac{1}{e\sqrt[4]{e}} \quad n \rightarrow \infty$$

11. Prenons maintenant $a = -\sqrt{2\beta}$, $b = \sqrt{2\beta}$, $\alpha = \beta$ dans le théorème II. Nous déduisons que pour $-\sqrt{2\beta} \leq x_i \leq \sqrt{2\beta}$ l'expression

$$\left[\prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{x_i^2}{2\beta} \right)^\beta \right] V^2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

devient maximum quand les x_i sont les zéros du polynôme (écrit sous une forme convenable)

$$(-1)^n \left(1 - \frac{x^2}{2\beta} \right)^{1-\beta} \frac{d^n}{dx^n} \left(1 - \frac{x^2}{2\beta} \right)^{\beta+n-1}.$$

Faisant $\beta \rightarrow \infty$ nous obtenons un troisième théorème énoncé par STIELTJES¹²⁾.

¹²⁾ Loc. cit. 5).

Théorème X. L'expression

$$e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)} V^2(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (x_i \text{ réels})$$

devient maximum quand les x_i sont les zéros du polynôme d'HERMITE

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

La valeur de ce maximum est

$$N_n^* = e^{-\frac{n(n-1)}{2}} 2^2 3^3 \dots n^n.$$

Le passage à la limite, on le démontre facilement, est parfaitement justifié.

Nous avons

$$\frac{\sqrt[n(n-1)]{N_n^*}}{\sqrt{n}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{e^3}} \quad n \rightarrow \infty$$

12. Remarquons qu'on a

$$(-1)^n n! L_n^{(\alpha)}(x) = x^n - n(\alpha + n - 1)x^{n-1} + \dots$$

On voit que la somme des zéros du polynôme $L_n^{(\alpha)}(x)$ est égale à $n(\alpha + n - 1)$. Le théorème VII nous montre alors que si $\alpha > 0$, x_i sont non-négatifs et

$$(14) \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq n(\alpha + n - 1)$$

l'expression

$$(x_1 x_2 \dots x_n)^\alpha V^2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

atteint son maximum, égal à $\prod_{i=1}^n i! (\alpha + i - 1)^{\alpha+i-1}$, quand les x_i sont les zéros du polynôme $L_n^{(\alpha)}(x)$. On a pu supprimer le facteur $e^{-(x_1 + x_2 + \dots + x_n)}$ puisque la fonction e^x croît lorsque x croît à partir de la valeur zéro. On voit d'ailleurs qu'il faut prendre l'égalité dans (14) pour avoir le maximum.

La substitution $x \mid n(\alpha + n - 1)x$ permet d'énoncer le théorème suivant:

Théorème XI. Lorsque $\alpha > 0$, les x_i sont non-négatifs et

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1$$

l'expression

$$(x_1 x_2 \dots x_n)^\alpha V^2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

devient maximum quand les $n(\alpha + n - 1)x_i$ sont les zéros du polynôme de LAUERRE généralisé $L_n^{(\alpha)}(x)$. La valeur de ce maximum est

$$M_n^*(\alpha) = \frac{\prod_{i=1}^n i^i (\alpha + n - 1)^{\alpha + n - 1}}{[n(\alpha + n - 1)]^{n(\alpha + n - 1)}}.$$

On a, en particulier, le

Théorème XII. Lorsque les x_i sont non-négatifs et

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1$$

le discriminant

$$V^2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

devient maximum quand les $n(n-1)x_i$ sont les zéros du polynôme $G_n(x)$. La valeur de ce maximum est

$$M_n^*(0) = \frac{2^2 3^3 \dots n^n 2^2 3^3 \dots (n-1)^{n-1}}{[n(n-1)]^{n(n-1)}}.$$

De la même manière, en remarquant que

$$H_n(x) = x^n - \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} + \dots$$

on voit que la somme des carrés des zéros du polynôme $H_n(x)$ est égale à $n(n-1)$. On obtient alors, comme plus haut, le

Théorème XIII. Lorsque les nombres réels x_i vérifient l'inégalité

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 1$$

le discriminant

$$V^2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

devient maximum quand les $\sqrt{n(n-1)}x_i$ sont les zéros du polynôme d'HERMITE $H_n(x)$. La valeur de ce maximum est

$$M_n^* = \frac{2^2 3^3 \dots n^n}{[n(n-1)]^{\frac{n(n-1)}{2}}}$$

Les théorèmes XII, XIII sont dus à M. I. SCHUR qui les a démontré par une autre voie¹³⁾.

13. Exactement comme plus haut on démontre que:

Théorème XIV. La fonction $M_n^*(\alpha)$ est décroissante et son logarithme est convexe pour $\alpha \geq 0$. Nous avons la limite

$$\frac{n(n-1)}{n} \sqrt[n]{M_n^*(\alpha)} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{e}} \quad n \rightarrow \infty$$

pour toute valeur donnée de α .

¹³⁾ Loc. cit. 4).

Nous avons aussi

$$\sqrt[n]{n} \sqrt[n(n-1)]{M_n^*} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{e}} \quad n \rightarrow \infty$$

II.

Généralisation du problème de STIELTJES

14. Considérons maintenant l'expression

$$E_n = E(x_1, x_2, \dots, x_n; f) = f(x_1) f(x_2) \dots f(x_n) V^2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

dont nous chercherons à étudier le maximum quand les x_i restent dans un intervalle fini. Nous pouvons toujours nous rapporter à l'intervalle $(0, 1)$, mais il va sans dire qu'on passe aux problèmes analogues pour un intervalle quelconque par des transformations simples.

Bien entendu, pour avoir des propriétés intéressantes nous allons nous borner au cas où la fonction $f(x)$ a une certaine forme particulière. Précisons avant tout les hypothèses que nous faisons sur la fonction $f(x)$.

Nous dirons que la fonction $f(x)$, réelle, définie et uniforme dans l'intervalle fermé $(0, 1)$ vérifie les conditions (C) ou bien que c'est une fonction (C), si:

1°. elle est positive dans l'intervalle ouvert $(0, 1)$.

2°. elle est continue aux points 0 et 1.

3°. $f(0) = f(1) = 0$.

4°. elle est exponentiellement concave dans l'intervalle $(0, 1)$.

Nous dirons aussi que $f(x)$ vérifie les conditions (C') ou bien que c'est une fonctions (C') si, en dehors des propriétés 1°, 2°, 3°, 4°, elle vérifie aussi la propriété suivante:

5°. $f(x)$ a une dérivée en tout point de l'intervalle ouvert $(0, 1)$.

La propriété 4° est entendue au sens restrictif (et non pas au sens de JENSEN), donc

$$(15) \quad f(x_2) > f(x_1)^{\frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_1}} f(x_3)^{\frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_3}}$$

quels que soient les points $x_1 < x_2 < x_3$ de l'intervalle $(0, 1)$.

En particulier nous avons

$$(16) \quad f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \sqrt{f(x_1) f(x_2)}$$

pour deux points x_1, x_2 de $(0, 1)$. La fonction $\log f(x)$ est concave dans tout intervalle complètement intérieur à $(0, 1)$.

Des propriétés bien connues résulte qu'une fonction (C) est bornée supérieurement dans $(0, 1)$ et est continue non seulement à l'intérieur mais, par suite de la propriété 2°, partout dans $(0, 1)$.

Le problème que nous nous proposons d'examiner est le suivant :
La fonction $f(x)$ vérifiant les conditions (C), déterminer et étudier le maximum de l'expression E_n lorsque les x_i restent dans l'intervalle $(0, 1)$.

On pourrait étudier ce problème aussi quand la fonction $f(x)$ ne vérifie pas les conditions (C), mais nos hypothèses paraissent être les plus intéressantes. Soit par exemple la fonction $f(x)$ égale à 1 pour $0 < x < 1$ et $f(0) = f(1) = 0$. Cette fonction vérifie les propriétés 1^o, 3^o, 4^o. On a dans ce cas

$$\max_{(0,1)} E(x_1, x_2) = 1$$

mais il est clair que ce maximum n'est pas atteint.

Passons maintenant à l'étude de notre problème.

15. L'expression E_n est une fonction symétrique et est continue dans le domaine $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq 1$. Elle s'annule sur la frontière de ce domaine, donc

Théorème XV. *Si $f(x)$ est une fonction (C) l'expression E_n admet dans $(0, 1)$ un maximum atteint pour au moins un système de points x_i distincts et situés à l'intérieur de l'intervalle $(0, 1)$.*

Supposons que le maximum soit atteint pour deux systèmes différents de points x_i

$$(17) \quad 0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n < 1, \quad 0 < y'_1 < y'_2 < \dots < y'_n < 1 \\ |y_1 - y'_1| + |y_2 - y'_2| + \dots + |y_n - y'_n| > 0.$$

En prenant alors les points

$$y''_i = \frac{y_i + y'_i}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

et tenant compte de (16) on déduit, exactement comme au No. 2, que

$$E(y''_1, y''_2, \dots, y''_n; f) \geq \sqrt{E(y_1, y_2, \dots, y_n; f) E(y'_1, y'_2, \dots, y'_n; f)}$$

l'égalité n'étant possible que si les deux suites (17) coïncident. C'est en contradiction avec nos hypothèses. Nous avons donc le

Théorème XVI. *Si $f(x)$ est une fonction (C) l'expression E_n admet dans $(0, 1)$ un maximum atteint pour un seul système de points x_i distincts et situés à l'intérieur de l'intervalle $(0, 1)$.*

Nous désignerons par $0 < \xi_{n,1} < \xi_{n,2} < \dots < \xi_{n,n} < 1$ les points pour lesquels ce maximum est atteint. Nous appelons ce système le système maximisant de E_n . Le polynôme

$$P_n(x) = (x - \xi_{n,1})(x - \xi_{n,2}) \dots (x - \xi_{n,n})$$

sera appelé le polynôme maximisant de E_n .

Enfin nous désignerons par

$$M_n(f) = \max_{(0,1)} E_n = E(\xi_{n,1}, \xi_{n,2}, \dots, \xi_{n,n}, f)$$

qui est évidemment un nombre positif.

16. Nous allons démontrer maintenant que la correspondance entre une fonction (C) et son système maximisant ou son polynôme maximisant est continue.

Nous avons besoin de la propriété suivante :

Lemme I. *Nous pouvons faire correspondre à tout nombre positif ϵ un autre nombre positif η tel que si*

$$|E(x_1, x_2, \dots, x_n; f) - M_n(f)| < \eta$$

on ait aussi

$$|x_i - \xi_{n,i}| < \epsilon \quad (x_1 < x_2 < \dots < x_n) \\ i = 1, 2, \dots, n$$

Cette propriété est une conséquence de l'unicité. Supposons, en effet, que la propriété ne soit pas vraie. Par un raisonnement classique on voit qu'il existerait alors un nombre positif ϵ et une suite de systèmes de points

$$x_1^{(m)} \leq x_2^{(m)} \leq \dots \leq x_n^{(m)}, \quad m = 1, 2, \dots$$

telles qu'on ait

$$|E(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}; f) - M_n(f)| < \frac{1}{m}, \quad m = 1, 2, \dots$$

et que l'une au moins des inégalités

$$|x_i^{(m)} - \xi_{n,i}| \geq \epsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

soit vérifiée pour tout m . On en déduit l'existence d'un système

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n^{14)}$$

tel que

$$E(x_1, x_2, \dots, x_n; f) = M_n(f)$$

$$|x_1 - \xi_{n,1}| + |x_2 - \xi_{n,2}| + \dots + |x_n - \xi_{n,n}| \geq \epsilon$$

ce qui est en contradiction avec le théorème XVI.

Considérons maintenant deux fonctions (C), $f(x)$, $g(x)$.

Soient $\xi_{n,1} < \xi_{n,2} < \dots < \xi_{n,n}$ et $\xi'_{n,1} < \xi'_{n,2} < \dots < \xi'_{n,n}$ les systèmes maximisants correspondants. Soit A la borne supérieure de la fonction $f(x)$ et B la borne supérieure de $|f(x) - g(x)|$,

$$A = \max_{(0,1)} f(x), \quad B = \max_{(0,1)} |f(x) - g(x)|$$

¹⁴⁾ Nous savons d'ailleurs que partout nous avons le signe $<$.

Nous avons

$$f(x) \leq g(x) + B, \quad g(x) \leq f(x) + B$$

donc

$$f(x_1) f(x_2) \dots f(x_n) \leq g(x_1) g(x_2) \dots g(x_n) + C$$

$$g(x_1) g(x_2) \dots g(x_n) \leq f(x_1) f(x_2) \dots f(x_n) + C$$

où $C = (A + B)^n - A^n$.

Nous en déduisons

$$E(x_1, x_2, \dots, x_n; f) \leq E(x_1, x_2, \dots, x_n; g) + CV^2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$E(x_1, x_2, \dots, x_n; g) \leq E(x_1, x_2, \dots, x_n; f) + CV^2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

d'où

$$E(x_1, x_2, \dots, x_n; f) \leq M_n(g) + CM_n(0, 0)$$

$$E(x_1, x_2, \dots, x_n; g) \leq M_n(f) + CM_n(0, 0).$$

Nous avons, en particulier,

$$M_n(f) \leq M_n(g) + CM_n(0, 0), \quad M_n(g) \leq M_n(f) + CM_n(0, 0)$$

$$|M_n(f) - M_n(g)| \leq CM_n(0, 0).$$

Ici $M_n(0, 0)$ est le nombre défini au § précédent.

Nous avons aussi

$$E(\xi'_{n,1}, \xi'_{n,2}, \dots, \xi'_{n,n}; f) \leq M_n(g) + CM_n(0, 0)$$

$$M_n(g) \leq E(\xi'_{n,1}, \xi'_{n,2}, \dots, \xi'_{n,n}; f) + CM_n(0, 0)$$

$$|E(\xi'_{n,1}, \xi'_{n,2}, \dots, \xi'_{n,n}; f) - M_n(g)| \leq CM_n(0, 0).$$

On en déduit que

$$|E(\xi'_{n,1}, \xi'_{n,2}, \dots, \xi'_{n,n}; f) - M_n(f)| \leq 2 CM_n(0, 0).$$

Or, C tend vers zéro avec B . Tenant alors compte du lemme I, il en résulte le

Théorème XVII. Nous pouvons faire correspondre à tout nombre positif ϵ un autre nombre positif η tel que, pour la fonction (C) $f(x)$ et pour tout autre fonction (C) $g(x)$ qui vérifie l'inégalité

$$|f(x) - g(x)| < \eta \text{ dans } (0, 1),$$

on ait aussi

$$|\xi_{n,i} - \xi'_{n,i}| < \epsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

pour les systèmes maximisants correspondants.

C'est la propriété que nous avons en vue.

Nous en déduisons, en particulier, le

Théorème XVIII. Si une suite de fonctions (C)

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

converge uniformément vers une fonction (C), $f(x)$, le système maximisant $\xi_{n,1}^{(m)} < \xi_{n,2}^{(m)} < \dots < \xi_{n,n}^{(m)}$ correspondant à $f_m(x)$ tend, pour

$m \rightarrow \infty$, vers le système maximisant $\xi_{n,1} < \xi_{n,2} < \dots < \xi_{n,n}$ correspondant à $f(x)$ ¹⁵.

$$\xi_{n,i}^{(m)} \rightarrow \xi_{n,i} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

$$m \rightarrow \infty$$

Cette propriété sera fondamentale pour nous dans la suite.

17. Supposons maintenant que $f(x)$ soit une fonction (C'). Pour déterminer alors le maximum nous pouvons appliquer le calcul différentiel. Le maximum est donc déterminé par le système

$$(18) \quad \frac{1}{E_n} \frac{\partial E_n}{\partial x_i} = \frac{P''(x_i)}{P'(x_i)} + \frac{f'(x_i)}{f(x_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

où

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n).$$

Il est facile de voir que, par suite des hypothèses faites et surtout à cause de la propriété 4^o (concavité), nous avons le

Lemme II. Si $f(x)$ est une fonction (C') le système (18) admet une solution et une seule telle que les x_i soient dans l'intervalle $(0, 1)$.

Compte tenant du théorème XV, nous avons le

Théorème XIX. Si $f(x)$ est une fonction (C'), nous avons

$$f(\xi_{n,i}) P''_n(\xi_{n,i}) + (\xi_{n,i}) P'_n(\xi_{n,i}) = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

18. Avant d'aller plus loin, nous devons montrer comment les démonstrations des propriétés énoncées pour les fonctions (C) et qui vont suivre se déduisent des démonstrations des propriétés correspondantes pour les fonctions (C').

Démontrons avant tout le

Lemme III. Si

$$0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m < 1$$

est une suite de points situés à l'intérieur de l'intervalle $(0, 1)$ et si

$$c_1 > c_2 > \dots > c_m$$

est une suite de nombres non-croissants, il existe une fonction (C') dont la dérivée logarithmique prend les valeurs c_i aux points correspondants x_i .

Soit $\varphi(x)$ la fonction continue définie dans l'intervalle (x_1, x_m) telle que

$$\varphi(x_i) = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$\varphi(x)$ = une fonction linéaire dans (x_i, x_{i+1}) , $i = 1, 2, \dots, m-1$.

¹⁵ Que la limite soit une fonction (C) n'est pas essentiel, mais nous appliquerons ce théorème sous cette forme dans la suite.

La fonction

$$\varphi_1(x) = \int_{x_1}^x \varphi(x) dx$$

est concave dans l'intervalle (x_1, x_m) .

Nous allons maintenant prolonger convenablement cette fonction dans l'intervalle $(0, 1)$. Prenons la fonction $\varphi_2(x)$ définie de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &= (|c_1| + 1 - c_1)(x_1 - x) + x_1(|c_1| + 1) - \frac{x_1^2(|c_1| + 1)}{x}, \quad 0 < x \leq x_1 \\ \varphi_2(x) &= \varphi_1(x), \quad x_1 \leq x \leq x_m \\ \varphi_2(x) &= (c_m - 1 - |c_m|)(x - x_m) + \varphi_1(x_m) + (1 - x_m)(|c_m| + 1) - \\ &\quad - \frac{(1 - x_m)^2(|c_m| + 1)}{1 - x}, \quad x_m \leq x < 1. \end{aligned}$$

Enfin la fonction $f(x)$ définie de la manière suivante

$$f(0) = f(1) = 0$$

$$f(x) = e^{\varphi_2(x)} \quad \text{pour } 0 < x < 1$$

est une fonction (C') et vérifie les conditions du lemme III.

Le prolongement de la fonction $\varphi_1(x)$ se fait en somme par raccordement à l'aide d'arcs d'hyperboles convenablement choisies. Si c_1 est non-négatif la fonction $\varphi_2(x)$ est croissante dans l'intervalle $(0, x_1)$ et si c_m est non-positif $\varphi_2(x)$ est décroissante dans l'intervalle $(x_m, 1)$. Cette remarque nous sera utile pour la propriété suivante.

Le lemme III a une conséquence importante :

Si $P_{n_1}(x), P_{n_2}(x), \dots, P_{n_k}(x)$ sont les polynômes maximisants correspondants à une fonction (C) et à k valeurs de n , ces polynômes sont aussi les polynômes maximisants correspondants à une fonction (C') et aux mêmes valeurs de n .

La démonstration ne présente aucune difficulté et résulte immédiatement du lemme II et du théorème XIX.

Dans la suite nous appliquerons cette propriété pour les polynômes $P_n(x), P_{n-1}(x)$.

Nous avons encore le

Lemme IV. Toute fonction (C) est la limite d'une suite de fonctions (C') convergeant uniformément dans l'intervalle $(0, 1)$.

Il existe d'abord un nombre positif ρ tel que dans l'intervalle $(0, \rho)$ la fonction $f(x)$ soit non-décroissante et dans l'intervalle $(1 - \rho, 1)$ non-croissante. (On prend bien entendu $\rho \leq \frac{1}{2}$). Soit maintenant ε un nombre positif arbitraire. Il existe un nombre positif $\delta < \rho$ tel que

$$f(x) < \varepsilon$$

pour $0 \leq x \leq \delta$, et pour $1 - \delta \leq x \leq 1$.

Dans l'intervalle fermé $(\delta, 1 - \delta)$ la fonction $F(x) = \log f(x)$ est continue et concave. Il existe un nombre A tel que dans cet intervalle $|F(x)| \leq A$. Considérons maintenant la suite de polynômes¹⁶⁾

$$(19) \quad Q_1(x), Q_2(x), \dots, Q_m(x), \dots$$

$$Q_m(x) = \frac{1}{(1 - 2\delta)^m} \sum_{i=1}^m F\left(\delta + i \frac{1 - 2\delta}{m}\right) \binom{m}{i} (x - \delta)^i (1 - \delta - x)^{m-i}$$

qui vérifient les propriétés suivantes :

$$1^0. \quad Q_m(\delta) = F(\delta), \quad Q_m(1 - \delta) = F(1 - \delta)$$

$$2^0. \quad |Q_m(x)| \leq A, \quad \text{dans } (\delta, 1 - \delta)$$

$$3^0. \quad Q_m(x) \text{ est concave dans } (\delta, 1 - \delta)$$

$$4^0. \quad Q'_m(\delta) = \frac{m}{1 - 2\delta} \left[F\left(\delta + \frac{1 - 2\delta}{m}\right) - F(\delta) \right]$$

$$Q'_m(1 - \delta) = \frac{m}{1 - 2\delta} \left[F(1 - \delta) - F\left(1 - \delta - \frac{1 - 2\delta}{m}\right) \right]$$

5⁰. La suite (19) converge uniformément vers $F(x)$ dans tout l'intervalle $(\delta, 1 - \delta)$.

Nous prolongeons le polynôme $Q_m(x)$ exactement comme nous l'avons fait avec $\varphi_1(x)$ et nous désignons par $Q_m^*(x)$ la fonction ainsi définie dans tout l'intervalle ouvert $(0, 1)$. Définissons enfin la fonction $f_m(x)$ par

$$f_m(0) = f_m(1) = 0$$

$$f_m(x) = e^{Q_m^*(x)}, \quad 0 < x < 1.$$

Les fonctions $f_m(x)$ vérifient les conditions (C').

Pour $m > \frac{\rho - \delta}{1 - 2\delta}$ nous avons $Q'_m(\delta) \geq 0, Q'_m(1 - \delta) \leq 0$, donc $f_m(x)$ est respectivement croissante et décroissante dans les intervalles $(0, \delta), (1 - \delta, 1)$, donc à fortiori

$$f_m(x) < \varepsilon \quad \text{pour } 0 \leq x \leq \delta, \quad 1 - \delta \leq x \leq 1, \quad m > \frac{\rho - \delta}{1 - 2\delta}.$$

D'autre part, nous pouvons déterminer un nombre m' tel que pour $m > m'$ on ait

$$|Q_m(x) - F(x)| < \log(\varepsilon + e^A) - A, \quad \delta \leq x \leq 1 - \delta.$$

¹⁶⁾ Les polynômes $Q_m(x)$ sont les polynômes de M. S. BERNSTEIN. Pour la démonstration des propriétés du texte voir : TIBERIU POPOVICIU „Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur“ Mathematica t. X (1935), p. 49.

Nous en déduisons

$$|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \delta \leq x \leq 1 - \delta, \quad m > m'.$$

Finalement donc

$$|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ pour } 0 \leq x \leq 1, m > \max\left(m', \frac{\rho - \delta}{1 - 2\delta}\right)$$

ce qui démontre le lemme IV.

19. Nous dirons que deux suites

$$(20) \quad x_1 < x_2 < \dots < x_n \text{ et } x'_1 < x'_2 < \dots < x'_{n-1}$$

de n et de $n-1$ points respectivement, se séparent au sens strict si l'on a

$$x_1 < x'_1 < x_2 < x'_2 < \dots < x_{n-1} < x'_{n-1} < x_n.$$

Nous dirons aussi que les deux suites (20) se séparent au sens large si l'on a

$$x_1 \leq x'_1 \leq x_2 \leq x'_2 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x'_{n-1} \leq x_n$$

et si les suites ont au moins un point commun.

On peut aussi dire que les zéros des polynômes

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n), \quad P_1(x) = (x - x'_1)(x - x'_2) \dots (x - x'_{n-1})$$

se séparent respectivement au sens strict et au sens large.

Le polynôme $P_1(x)$ peut toujours s'écrire sous la forme

$$P_1(x) = P(x) \sum_{i=1}^n \frac{s_i}{x - x_i} \quad \left(\sum_{i=1}^n s_i = 1 \right)$$

qui n'est autre que la formule d'interpolation de LAGRANGE. Les constantes s_i sont complètement déterminées.

Nous avons le

Lemme V. La condition nécessaire et suffisante pour que les zéros des polynômes $P(x)$ et $P_1(x)$ se séparent au sens strict est que les coefficients s_i soient tous positifs. La condition nécessaire et suffisante pour que les zéros de ces polynômes se séparent au sens large est que les s_i soient tous non-négatifs l'un au moins étant nul.

Ces propriétés sont bien connues la démonstration étant immédiate.

Revenons maintenant aux polynômes maximisants $P_n(x)$, $P_{n-1}(x)$ correspondants à une fonction (C'). Nous avons le

Théorème XX. Les zéros des polynômes maximisants $P_n(x)$, $P_{n-1}(x)$ correspondants à une fonction (C') ne peuvent pas se séparer au sens large.

La démonstration est facile. Supposons le contraire. Nous pouvons alors écrire

$$P_{n-1}(x) = P_n(x) \sum_{i=1}^n \frac{s_i}{x - \xi_{n,i}}$$

où $s_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^n s_i = 1$. Pour fixer les idées, supposons que $s_1 = 0$. On a alors $\xi_{n,1} = \xi_{n-1,1}$. Dérivant deux fois de suite nous avons

$$P'_{n-1}(x) = P'_n(x) \sum_{i=1}^n \frac{s_i}{x - \xi_{n,i}} - P_n(x) \sum_{i=1}^n \frac{s_i}{(x - \xi_{n,i})^2}$$

$$P''_{n-1}(x) = P''_n(x) \sum_{i=1}^n \frac{s_i}{x - \xi_{n,i}} - 2P'_n(x) \sum_{i=1}^n \frac{s_i}{(x - \xi_{n,i})^2} + 2P_n(x) \sum_{i=1}^n \frac{s_i}{(x - \xi_{n,i})^3}$$

d'où

$$P'_{n-1}(\xi_{n,1}) = P'_n(\xi_{n,1}) \sum_{i=2}^n \frac{s_i}{\xi_{n,1} - \xi_{n,i}}$$

$$P''_{n-1}(\xi_{n,1}) = P''_n(\xi_{n,1}) \sum_{i=2}^n \frac{s_i}{\xi_{n,1} - \xi_{n,i}} - 2P'_n(\xi_{n,1}) \sum_{i=2}^n \frac{s_i}{(\xi_{n,1} - \xi_{n,i})^2}$$

Tenant compte de $\xi_{n,1} = \xi_{n-1,1}$ et du théorème XIX nous en déduisons

$$f(\xi_{n,1}) P'_n(\xi_{n,1}) \sum_{i=2}^n \frac{s_i}{(\xi_{n,1} - \xi_{n,i})^2} = 0.$$

Mais, $f(\xi_{n,1}) P'_n(\xi_{n,1}) \neq 0$, il en résulte donc que

$$s_2 = s_3 = \dots = s_n = 0.$$

C'est en contradiction avec l'hypothèse $\sum_{i=1}^n s_i = 1$ et le théorème

XX est donc démontré.

20. Nous nous proposons de démontrer maintenant la propriété que nous avons en vue et qui s'exprime par le

Théorème XXI. Les zéros de deux polynômes maximisants consécutifs $P_n(x)$, $P_{n-1}(x)$ correspondants à une fonction (C) se séparent au sens strict.

Montrons d'abord qu'il suffit de démontrer la propriété pour les fonctions (C'). En effet, si la propriété est vraie pour les fonctions (C'), le théorème XVIII et le lemme IV nous montrent que pour une fonction (C) les zéros se séparent ou bien au sens strict ou bien se séparent au sens large. Mais, en vertu de la conséquence du lemme III, c'est bien le premier cas qui arrive.

Il reste à démontrer la propriété dans le cas où $f(x)$ est une fonction (C). Considérons pour cela la fonction

$$f_m(x) = [x(1-x)]^{1-m} [f(x)]^m$$

$$0 \leq m \leq 1, f_0(x) = x(1-x), f_1(x) = f(x)$$

$f_m(x)$ est une fonction (C). Lorsque m croît de 0 à 1, la fonction $f_0(x)$ ou $x(1-x)$ se déforme d'une façon continue et tend uniformément vers $f_1(x)$ ou $f(x)$.

Les théorèmes XVIII et XX nous montrent alors qu'il suffit de démontrer la propriété pour la fonction $f_0(x) = x(1-x)$. Or, dans ce cas

$$P_n(x) = F(-n, n+1, 1, x), P_{n-1}(x) = F(-n+1, n, 1, x)$$

et il est bien connu que les zéros de ces polynômes de JACOBI se séparent au sens strict. Le théorème est donc complètement démontré.

21. Nous nous proposons de dire maintenant quelques mots sur le maximum $M_n(f)$.

Soit A le maximum (ou bien la borne supérieure) de $f(x)$. Nous avons

$$M_n(f) \leq A^n \cdot \max_{(0,1)} V^2(x_1, x_2, \dots, x_n) = A^n M_n(0, 0).$$

Le théorème de M. M. FEKETE nous montre donc que

$$(21) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)}{\sqrt{M_n(f)}} \leq \frac{1}{4}$$

Soit $\varepsilon < \frac{1}{4}$ un nombre positif arbitraire. Dans l'intervalle $(2\varepsilon, 1-2\varepsilon)$ la fonction $f(x)$ a un minimum positif a . Soient $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ les points pour lesquels

$$\max_{(2\varepsilon, 1-2\varepsilon)} V^2(x_1, x_2, \dots, x_n) = m_n(\varepsilon)$$

est atteint. Nous avons

$$f(\xi_1)f(\xi_2) \dots f(\xi_n) m_n(\varepsilon) \leq E(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n; f) \leq M_n(f)$$

d'où

$$a^n m_n(\varepsilon) \leq M_n(f)$$

Mais

$$\frac{n(n-1)}{\sqrt{a^n}} \rightarrow 1, \text{ pour } n \rightarrow \infty$$

$$\frac{n(n-1)}{\sqrt{m_n(\varepsilon)}} \rightarrow \frac{1}{4} - \varepsilon, \text{ pour } n \rightarrow \infty$$

et il en résulte que

$$(22) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)}{\sqrt{M_n(f)}} \geq \frac{1}{4} - \varepsilon$$

quel que petit que soit ε . Les relations (21) et (22) nous montrent donc que:

Théorème XXII. Si $f(x)$ est une fonction (C) l'expression

$$\frac{n(n-1)}{\sqrt{M_n(f)}}$$

a , pour $n \rightarrow \infty$, une limite qui est égale au diamètre transfini $\frac{1}{4}$ du segment $0-1$.

22. Nous allons maintenant considérer un cas particulier. Soit

$$f(x) = |x-a_1|^{\sigma_1} |x-a_2|^{\sigma_2} \dots |x-a_h|^{\sigma_h} |x-a_{h+1}|^{\sigma_{h+1}} \dots |x-a_{h+k}|^{\sigma_{h+k}}$$

où $a_1 < a_2 < \dots < a_{h-1} < a_h = 0 < a_{h+1} = 1 < a_{h+2} < \dots < a_{h+k}$ et

$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{h+k}$ sont $h+k$ nombres positifs. C'est une fonction (C). Le polynôme maximisant $P_n(x)$ est alors solution de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2

$$(23) \quad y'' + \left(\frac{\sigma_1}{x-a_1} + \frac{\sigma_2}{x-a_2} + \dots + \frac{\sigma_{h+k}}{x-a_{h+k}} \right) y' + \dots$$

$$\dots + \frac{\psi(x)}{(x-a_1)(x-a_2) \dots (x-a_{h+k})} y = 0$$

où $\psi(x)$ est un polynôme de degré $h+k-2$ convenablement choisi.

Nos résultats permettent donc de dire qu'une équation de la forme (23) admet une solution polynôme de degré n et une seule tel que ce polynôme ait tous ses zéros réels et compris dans l'un des intervalles (a_i, a_{i+1}) . Soit $P_n(x)$ la solution de degré n qui a ses zéros dans l'intervalle (a_i, a_{i+1}) et $P_{n-1}(x)$ la solution de degré $n-1$ qui a ses zéros dans le même intervalle. Nous pouvons alors dire que les zéros des polynômes $P_n(x)$ et $P_{n-1}(x)$ se séparent au sens strict.

C'est STIELTJES qui a étudié pour la première fois les solutions polynomiales de l'équation (23)¹⁷⁾. Il a montré, compte tenant du fait que l'équation a au plus

$$\binom{n+h+k-2}{h+k-2} = \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+h+k-2)}{1.2\dots(h+k-2)}$$

solutions polynomes de degré n , que cette équation a *exactement* $\binom{n+h+k-2}{h+k-2}$ solutions de cette forme qui ont tous leurs zéros réels et compris dans l'intervalle (a_1, a_{h+k}) . Les zéros de ces polynomes sont distribués de toutes les manières possibles dans les intervalles (a_i, a_{i+1}) , à chaque distribution correspondant une seule solution. D'ailleurs à toute solution correspond un problème de maximum. Ces problèmes de maxima, qui constituent une généralisation du problème étudié dans ce travail, ainsi que d'autres problèmes sur la distribution des zéros des solutions polynomiales d'une équation de la forme (23) seront examinés par nous dans un autre travail qui paraîtra prochainement¹⁸⁾.

¹⁷⁾ Loc. cit. 3)

¹⁸⁾ Nous avons énoncé des résultats plus généraux dans notre note: „Sur un problème de maximum de STIELTJES“. C. R. Acad. Sc., Paris, t. 202 (1936) p. 1645.