

P. 558

*PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BUCAREST
SOCIETATEA ROMÂNĂ DE ȘTIINȚE, SECȚIA MATEMATICĂ*

BULLETIN MATHÉMATIQUE

DE LA SOCIÉTÉ ROUMAINE DES SCIENCES

TOME **42** (1)
1940

Inv. P. 664



MONITORUL OFICIAL ȘI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA CENTRALĂ

BUCUREȘTI
1 9 4 0

C. 29.192.

BCU Cluj-Napoca



PMATE 2014 00779

TABLE DES MATIERES

	<u>Pag.</u>
DAN I. HULUBEI: <i>Sur un problème de statique</i>	3
DAN I. HULUBEI: <i>Sur l'annulation de la réaction dans le cas du pendule sphérique</i>	15
CAIUS JACOB: <i>Sur quelques propriétés de la correspondance de M. Tchapliguine en dynamique des fluides compressibles</i>	19
GR. C. MOISIL: <i>Sur les géodésiques des espaces de Riemann singuliers .</i>	33
MIRON NICOLESCO: <i>Sur les suites doubles</i>	53
AL. PANTAZI: <i>Correspondance entre deux surfaces à axes confondus . .</i>	57
TIBERIU POPOVICIU: <i>Introduction à la théorie des différences divisées .</i>	65
N. THEODORESCO: <i>La géométrie de l'équation des ondes (II)</i>	79
G. VRANCEANU: <i>Sur les invariants des équations aux dérivées partielles du second ordre</i>	91

INTRODUCTION À LA THÉORIE DES DIFFÉRENCES DIVISÉES

PAR

TIBERIU POPOVICIU

Dans ce qui va suivre nous nous proposons de donner la démonstration de plusieurs formules qui interviennent dans la théorie des différences divisées des fonctions d'une variable. La plupart de ces formules se trouvent déjà exposées, sans démonstration, dans notre Thèse ¹⁾. Ces formules étant d'un usage courant dans la théorie des fonctions convexes d'ordre supérieur, il ne sera pas inutile de les établir ici en toute rigueur. Je me suis décidé de revenir sur ces questions en remarquant l'apparition de quelques travaux où mes résultats ne sont pas cités ²⁾.

1. **Le polynôme de LAGRANGE.** Considérons $n+1$ points distincts $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ et soit $f=f(x)$ une fonction uniforme définie sur ces points. Nous supposons que les points x_i sont sur l'axe réel et que f est une fonction réelle.

Il existe un polynôme et un seul de degré n qui prend les valeurs $f(x_i)$ aux points $x_i, i=1, 2, \dots, n+1$ ³⁾.

L'existence au moins d'un polynôme satisfaisant aux conditions imposées peut être démontrée par récurrence. Pour $n=0$ la propriété est immédiate. La constante $f(x_1)$ (polynôme de degré 0) satisfait à la condition imposée. Supposons que la propriété soit vraie pour n et démontrons-la pour $n+1$. Il existe donc, par hypothèse, au moins un polynôme $P(x)$ de degré $n-1$ prenant les valeurs $f(x_i)$ aux points $x_i, i=1, 2, \dots, n$. On voit alors que le polynôme

$$P(x) + [f(x_{n+1}) - P(x_{n+1})] \frac{(x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_n)}{(x_{n+1}-x_1)(x_{n+1}-x_2) \dots (x_{n+1}-x_n)}$$

est de degré n et prend les valeurs $f(x_i)$ aux points $x_i, i=1, 2, \dots, n+1$.

¹⁾ TIBERIU POPOVICIU „Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles“ Thèse, Paris 1933 ou Mathematica, 8, 1—85 (1934).

²⁾ Voir par ex. J. F. STEFFENSEN „Note on divided differences“ Danske Vid. Selsk. Math-fys. Medd. 17, Nr. 3, 1—12 (1939).

³⁾ Un polynôme de degré n est une expression de la forme

$$c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_n$$

les c_i étant des constantes positives, nulles ou négatives (il suffit de nous limiter au cas réel).

L'unicité résulte facilement. Si l'on avait deux polynômes $P(x)$ et $Q(x)$, non identiques, de degré n et vérifiant les conditions imposées, la différence $P(x) - Q(x)$ serait nulle pour $x = x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$, ce qui est impossible.

Le polynôme unique, déterminé tel que nous l'avons vu, s'appelle le polynôme (d'interpolation) de LAGRANGE de la fonction f sur les points $x_i, i=1, 2, \dots, n+1$.

Nous désignerons ce polynôme par

$$(1) \quad P(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f | x).$$

La forme générale des polynômes prenant les valeurs $f(x_i)$ aux points $x_i, i=1, 2, \dots, n+1$, est

$$P(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f | x) + (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n+1}) Q(x)$$

$Q(x)$ étant un polynôme quelconque ⁴⁾.

L'unicité du polynôme (1) permet d'écrire les formules suivantes, bien connues,

$$P(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f | x) = \sum_{i=1}^{n+1} f(x_i) \frac{(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_{n+1})}{(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_{n+1})} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{f(x_i) \varphi_i(x)}{\varphi'(x_i)}$$

$$P(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f | x) = - \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n & f(x_1) \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n & f(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^n & f(x_{n+1}) \\ 1 & x & x^2 & \dots & x^n & 0 \end{vmatrix}$$

$$P(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f | x) = - \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \dots & x_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

où nous avons posé

$$(2) \quad \varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n+1}).$$

Posons

$$(3) \quad [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f] = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{f(x_i)}{\varphi'(x_i)},$$

⁴⁾ Le polynôme (1) peut être aussi caractérisé par la propriété extrémale suivante. Il existe un polynôme et un seul de degré effectif minimum qui prend les valeurs $f(x_i)$, pour $x = x_i, i=1, 2, \dots, n+1$.

qui est le coefficient de x^n dans le polynôme (1). Ce polynôme peut alors s'écrire sous les formes suivantes⁵⁾

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n; f | x) + [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f] \frac{\varphi(x)}{x - x_{n+1}}$$

$$P(x_2, x_3, \dots, x_{n+1}; f | x) + [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f] \frac{\varphi(x)}{x - x_1}$$

d'où résulte la relation de récurrence des polynômes de LAGRANGE

$$(4) \quad P(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f | x) = \frac{(x - x_1)P(x_2, x_3, \dots, x_{n+1}; f | x) - (x - x_{n+1})P(x_1, x_2, \dots, x_n; f | x)}{x_{n+1} - x_1}.$$

2. Les différences divisées. La différence divisée d'ordre n de la fonction f sur les points $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ est caractérisée par les propriétés suivantes :

a) Elle est une expression linéaire et homogène par rapport à $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{n+1})$, avec des coefficients indépendants de la fonction f .

b) Elle est nulle identiquement pour les fonctions $f=1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$.

c) Elle se réduit à 1 identiquement pour la fonction $f=x^n$.

L'expression déterminée par ces conditions a), b), c), est unique puisque le système

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i^m = \begin{cases} 0, & m=0, 1, \dots, n-1, \\ 1, & m=n, \end{cases}$$

est un système de CRAMER en $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}$. Le déterminant de ce système est, en effet, le déterminant de VANDERMONDE

$$V(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \prod_{i < j} (x_j - x_i)$$

des nombres distincts x_i .

Remarquons que l'expression (3) vérifie les propriétés a), b), c) puisque

$$P(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; x^i | x) = x^i, \quad i=0, 1, \dots, n-1,$$

c'est donc la valeur de la différence divisée de f sur les points x_i .

⁵⁾ En vertu de l'unicité du polynôme (1). Nous tenons compte du fait qu'un polynôme de degré n est complètement déterminé par la valeur de son premier coefficient et ses valeurs en n points distincts.

Désignons par $U(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f)$ le déterminant qu'on obtient de $V(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ si on remplace les éléments x_i^n par $f(x_i)$ respectivement. La différence divisée (3) s'écrit alors

$$(5) \quad [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f] = \frac{U(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f)}{V(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})}$$

sous la forme du quotient de deux déterminants. On voit que la différence divisée (5) est symétrique par rapport aux points x_i .

La formule (4) nous donne la formule de récurrence des différences divisées

$$(6) \quad [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f] = \frac{[x_2, x_3, \dots, x_{n+1}; f] - [x_1, x_2, \dots, x_n; f]}{x_{n+1} - x_1}$$

$$[x_1; f] = f(x_1),$$

qui peut aussi servir à les définir et qui justifie leur nom.

Nous pouvons donc écrire

$$(7) \quad [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; x^m] = \begin{cases} 0, & m=0, 1, \dots, n-1, \\ 1, & m=n. \end{cases}$$

Nous avons

$$(8) \quad [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; Cf] = C[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f].$$

$$(9) \quad [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f+g] = [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f] + [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; g]$$

C étant une constante et f, g deux fonctions définies sur les points x_i , $i=1, 2, \dots, n+1$.

Si $\{f_m\}$ est une suite convergente de fonctions définies sur les points x_i , on a évidemment

$$\lim_{m \rightarrow \infty} [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f_m] = [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; \lim_{m \rightarrow \infty} f_m],$$

donc, si la série $\sum_{m=0}^{\infty} f_m$ converge, on a

$$\sum_{m=0}^{\infty} [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f_m] = [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; \sum_{m=0}^{\infty} f_m].$$

De ce qui précède il résulte que la différence divisée d'ordre n d'un polynôme de degré $n-1$ est toujours nulle.

Remarquons encore la formule

$$f(x) - P(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f|x) = \varphi(x) [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}, x; f],$$

qui est une relation simple entre le polynôme de LAGRANGE et la différence divisée.

Application. Calculons les différences divisées (7) pour m entier $> n$. Sans restreindre la généralité nous pouvons supposer $x_i \neq 0$, $i=1, 2, \dots$,

$n+1$ et soit $|z| < \min \left(\frac{1}{|x_1|}, \frac{1}{|x_2|}, \dots, \frac{1}{|x_{n+1}|} \right)$, z étant un paramètre indépendant de x . Nous avons

$$\frac{z^n}{(1-zx_1)(1-zx_2)\dots(1-zx_{n+1})} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(1-zx_i)} \varphi'(x_i) =$$

$$= \left[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; \frac{1}{1-zx} \right].$$

Mais,

$$\frac{1}{1-zx} = \frac{z^n x^n}{1-zx} + 1 + zx + z^2 x^2 + \dots + z^{n-1} x^{n-1}$$

et en tenant compte de (7), (8), (9),

$$\left[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; \frac{1}{1-zx} \right] = z^n \left[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; \frac{x^n}{1-zx} \right].$$

Si nous posons donc

$$(10) \quad \frac{1}{(1-zx_1)(1-zx_2)\dots(1-zx_{n+1})} = S_0 + S_1 z + S_2 z^2 + \dots$$

nous avons

$$S_i = [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; x^{i+n}].$$

Si nous écrivons que le premier membre de (10) est égal au produit des développements

$$\frac{1}{1-zx_i} = 1 + zx_i + z^2 x_i^2 + \dots + z^m x_i^m + \dots, \quad i=1, 2, \dots, n+1,$$

nous trouvons

$$S_i = [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; x^{i+n}] = \sum x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_{n+1}^{a_{n+1}},$$

la sommation étant étendue à toutes les solutions entières et positives de l'équation $a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1} = i$.

3. La formule fondamentale de transformation des différences divisées. Considérons maintenant la fonction f définie sur m points distincts

$$(11) \quad x_1, x_2, \dots, x_m \quad (m \geq n+1).$$

Pour simplifier les notations nous poserons

$$(12) \quad \Delta_j^i(f) = [x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+j}; f], \quad \Delta_0^i(f) = f(x_i),$$

$$(13) \quad \varphi_{i,j+1}(x) = (x - x_i)(x - x_{i+1}) \dots (x - x_{i+j}), \quad \varphi_{i,0}(x) = 1, \\ i = 1, 2, \dots, m - j, \quad j = 0, 1, \dots, m - 1.$$

Ainsi $\varphi_{1,n+1}(x)$ est précisément le polynome (2) déjà considéré. Avec ces notations nous avons

$$\Delta_j^i(f) = \sum_{r=i}^{i+j} \frac{f(x_r)}{\varphi'_{i,j+1}(x_r)}.$$

Nous allons maintenant considérer une expression linéaire et homogène de $f(x_i)$ de la forme

$$F = \sum_{i=1}^m \lambda_i f(x_i),$$

les λ_i étant indépendants de la fonction f .

On peut toujours mettre une telle expression sous la forme

$$F = \sum_{i=1}^n \mu_i \Delta_{i-1}^1(f) + \sum_{i=1}^{m-n} \nu_i \Delta_n^i(f),$$

où les μ_i et les ν_i ne dépendent pas de la fonction f . Ces coefficients sont complètement déterminés par les coefficients λ_i . En effet, l'identification nous conduit à un système linéaire de m équations par rapport aux m inconnues μ_i, ν_i . Le déterminant de ce système

$$\frac{1}{\varphi'_{1,2}(x_2) \varphi'_{1,3}(x_3) \dots \varphi'_{1,n}(x_n) \varphi'_{1,n+1}(x_{n+1}) \varphi'_{2,n+1}(x_{n+2}) \dots \varphi'_{m-n,n+1}(x_m)}$$

est différent de zéro.

Il reste à voir comment on détermine les coefficients μ_i, ν_i . Nous les obtiendrons en choisissant convenablement la fonction f .

Pour avoir les coefficients μ_i , prenons pour f le polynome $\varphi_{1,j-1} = \varphi_{1,j-1}(x)$. Nous avons alors

$$\Delta_{i-1}^1(\varphi_{1,j-1}) = \begin{cases} 0, & i = 1, 2, \dots, j-1, \\ 1, & i = j, \\ 0, & i = j+1, j+2, \dots, n, \end{cases} \\ \Delta_n^i(\varphi_{1,j-1}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m-n,$$

donc

$$(14) \quad \mu_j = \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_{1,j-1}(x_i) = \sum_{i=j}^m \lambda_i (x_i - x_1)(x_i - x_2) \dots (x_i - x_{j-1}) \\ j = 1, 2, \dots, n.$$

Pour obtenir les coefficients ν_i , nous prenons pour f les fonctions suivantes

$$(15) \quad f_j^* = f_j^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{pour } x = x_1, x_2, \dots, x_{j+n-1}, \\ \varphi_{j+1,n-1}(x), & \text{pour } x = x_{j+n}, x_{j+n+1}, \dots, x_m, \end{cases} \\ j = 1, 2, \dots, m-n.$$

Nous avons

$$\Delta_{i-1}^1(f_j^*) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ \Delta_n^i(f_j^*) = \begin{cases} 0, & i = 1, 2, \dots, j-1, \\ \Delta_n^j(f_j^*), & i = j, \\ 0, & i = j+1, j+2, \dots, m-n, \end{cases}$$

donc

$$F = \nu_j \Delta_n^j(f_j^*) = \frac{f_j^*(x_{j+n})}{(x_{j+n} - x_j)(x_{j+n} - x_{j+1}) \dots (x_{j+n} - x_{j+n-1})} = \frac{\nu_j}{x_{j+n} - x_j}.$$

Nous en déduisons

$$(16) \quad \nu_j = (x_{j+n} - x_j) \sum_{i=1}^m \lambda_i f_j^*(x_i) = (x_{j+n} - x_j) \sum_{i=j+n}^m \lambda_i \varphi_{j+1,n-1}(x_i) = \\ = (x_{j+n} - x_j) \sum_{i=j+n}^m \lambda_i (x_i - x_{j+1})(x_i - x_{j+2}) \dots (x_i - x_{j+n-1}).$$

La formule fondamentale de transformation s'écrit donc finalement sous la forme suivante

$$(17) \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i f(x_i) = \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=j}^m \lambda_i \varphi_{1,j-1}(x_i) \right] \Delta_{j-1}^1(f) + \\ + \sum_{j=1}^{m-n} \left[(x_{j+n} - x_j) \sum_{i=j+n}^m \lambda_i \varphi_{j+1,n-1}(x_i) \right] \Delta_n^j(f).$$

Pour tout nombre naturel n nous avons une telle formule. Les coefficients μ_i, ν_i peuvent aussi être obtenus par des relations de récurrence. Si nous désignons par $\mu_i^{(n)}, \nu_i^{(n)}$ ces coefficients, pour mettre en évidence le nombre n , nous avons

$$\mu_j^{(n)} = \mu_j^{(n-1)}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \\ \mu_n^{(n)} = \nu_1^{(n-1)} + \nu_2^{(n-1)} + \dots + \nu_{m-n+1}^{(n-1)} \\ \nu_j^{(n)} = (x_{j+n} - x_j) \left[\nu_{j+1}^{(n-1)} + \nu_{j+2}^{(n-1)} + \dots + \nu_{m-n+1}^{(n-1)} \right], \\ j = 1, 2, \dots, m-n.$$

4. — Quelques applications de la formule fondamentale.

I. Soient $f = f(x)$, $g = g(x)$ deux fonctions définies sur les points x_i . Considérons la différence divisée

$$F = [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; fg]$$

du produit fg . Dans ce cas nous avons

$$\lambda_i = \frac{g(x_i)}{\varphi'_{1, n+1}(x_i)}, i = 1, 2, \dots, n+1, \lambda_i = 0, i > n+1.$$

Si nous remarquons que $\varphi_{1, n+1} = \varphi_{1, j-1} \cdot \varphi_{j, n-j+2}$, nous en déduisons

$$\varphi_{1, j-1}(x_i) = \frac{\varphi'_{1, n+1}(x_i)}{\varphi'_{j, n-j+2}(x_i)}, \text{ pour } j \leq i \leq n+1$$

et la formule (14) nous donne

$$\mu_j = \sum_{i=j}^{n+1} \frac{g(x_i)}{\varphi'_{j, n-j+2}(x_i)} = [x_j, x_{j+1}, \dots, x_{n+1}; g], j = 1, 2, \dots, n.$$

La formule (16) nous donne

$$\nu_1 = g(x_{n+1}), \nu_j = 0, j = 2, 3, \dots$$

Il en résulte que nous avons la formule suivante

$$(18) [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; fg] = \sum_{i=1}^{n+1} [x_1, x_2, \dots, x_i; f] [x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}; g],$$

qui donne la différence divisée d'un produit. C'est la généralisation de la formule de LEIBNIZ.

II. Le polynôme de LAGRANGE (1) est de la forme F . Un calcul simple nous montre que dans ce cas

$$\lambda_i = \frac{\varphi_{1, n+1}(x)}{(x-x_i) \varphi'_{1, n+1}(x_i)}, i = 1, 2, \dots, n+1, \lambda_i = 0, i > n+1.$$

La formule (14) nous donne

$$\mu_j = P(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; \varphi_{1, j-1} | x) = \varphi_{1, j-1}(x), j = 1, 2, \dots, n$$

et

$$\begin{aligned} \nu_1 &= (x_{n+1} - x_1) P(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f^* | x) = \\ &= (x_{n+1} - x_1) \varphi_{1, n}(x) \frac{f^*_1(x_{n+1})}{\varphi'_{1, n+1}(x_{n+1})} = \varphi_{1, n}(x), \nu_i = 0, i > 1 \end{aligned}$$

et nous obtenons la formule d'interpolation bien connue

$$\begin{aligned} P(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f | x) &= f(x_1) + (x-x_1)[x_1, x_2; f] + \\ &+ (x-x_1)(x-x_2)[x_1, x_2, x_3; f] + \dots \\ &+ (x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_n)[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f]. \end{aligned}$$

III. Prenons

$$F = [x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n}; f] - [x_1, x_2, \dots, x_n; f].$$

On vérifie facilement que $\mu_j = 0, j = 1, 2, \dots, n$. Nous trouvons

$$\begin{aligned} \nu_j &= (x_{j+n} - x_j) \{ [x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n}; f^*_j] - [x_1, x_2, \dots, x_n; f^*_j] \} = \\ &= (x_{j+n} - x_n) [x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n}; \varphi_{j+1, n-1}] = (x_{j+n} - x_j) \end{aligned}$$

et nous avons, avec les notations (12), la formule suivante

$$(19) \Delta_{n-1}^{n+1}(f) - \Delta_{n-1}^1(f) = \sum_{j=1}^n (x_{j+n} - x_j) \Delta_n^j(f),$$

qui peut, d'ailleurs, être établie aussi simplement à l'aide de la formule de récurrence (6)

IV. Soit

$$x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n+1}} \quad (1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n+1} \leq m)$$

une suite partielle extraite de la suite (11). Prenons

$$F = [x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n+1}}; f]$$

La formule fondamentale (17) nous donne alors

$$(20) [x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n+1}}; f] = \sum_{j=1}^{m-n} (x_{j+n} - x_j) [x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n+1}}; f^*_j] \Delta_n^j(f).$$

Remarques. 1°. Lorsque F s'annule identiquement pour un polynôme quelconque de degré $r-1$ nous avons $\mu_j = 0, j = 1, 2, \dots, r$.

2°. La formule (19) est valable même si les x_i ne sont pas tous distincts. Il suffit que chacune des suites

$$\begin{aligned} x_1, x_2, \dots, x_n; \quad x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n}, \\ x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+n}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

soit formée par des points distincts. Nous en déduisons que si

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_j, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_j, \alpha_{j+1} = \beta_{j+1}, \alpha_{j+2} = \beta_{j+2}, \dots, \alpha_n = \beta_n$$

sont des points distincts, nous avons la formule suivante

$$\begin{aligned} [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; f] - [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n; f] &= \\ &= \sum_{i=1}^j (\alpha_i - \beta_i) [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \beta_i, \beta_{i+1}, \dots, \beta_n; f]. \end{aligned}$$

5. La formule de la moyenne des différences divisées. Nous supposons maintenant que les points (11) soient ordonnés, donc que

$$x_1 < x_2 < \dots < x_m.$$

Le déterminant $V(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ a alors une valeur positive et si nous posons

$$sg \alpha = \begin{cases} -1, & \alpha < 0, \\ 0, & \alpha = 0, \\ 1, & \alpha > 0, \end{cases}$$

nous avons

$$sg[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f] = sgU(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f)$$

Reprenons alors la formule (20). La suite $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n+1}}$ est aussi ordonnée et nous avons $i_{n+1} - i_1 = p \geq n$. Nous allons démontrer qu'alors tous les coefficients de $\Delta_n^i(f)$ sont ≥ 0 . La démonstration peut se faire par induction sur le nombre p . La propriété est évidente pour $p=n$, car dans ce cas $[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n+1}}; f] = \Delta_n^{i_1}(f)$.

Pour $p=n+1$, prenons

$$i_1 = i, i_2 = i+1, \dots, i_j = i+j-1,$$

$$i_{j+1} = i+j+1, i_{j+2} = i+j+2, \dots, i_{n+1} = i+n+1$$

et un calcul simple nous donne alors

$$(21) \quad [x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+j-1}, x_{i+j+1}, \dots, x_{i+n+1}; f] = \frac{(x_{i+j} - x_i) \Delta_n^i(f) + (x_{i+n+1} - x_{i+j}) \Delta_n^{i+1}(f)}{x_{i+n+1} - x_i}.$$

En général, pour $p=n+1$, $i_{j+1} - i_j = 2$ nous pouvons écrire

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n+1}}; f] = \frac{(x_{i_{j+1}} - x_{i_1}) \Delta_n^{i_1}(f) + (x_{i_{n+1}} - x_{i_{j+1}}) \Delta_n^{i_{j+1}}(f)}{x_{i_{n+1}} - x_{i_1}}.$$

Supposons maintenant que la propriété soit vraie pour $p=n$, $n+1, \dots, n+r$ et démontrons qu'elle sera vraie aussi pour $p=n+r+1$.

Si $i_{n+1} - i_1 = n+r+1$, la formule (21) nous donne

$$\begin{aligned} [x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n+1}}; f] &= \\ &= \frac{1}{x_{i_{n+1}} - x_{i_1}} \left\{ (x_{i_{j+1}} - x_{i_1}) [x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_j}, x_{i_{j+1}}, x_{i_{j+1}}, \dots, x_{i_n}; f] + \right. \\ &\quad \left. + (x_{i_{n+1}} - x_{i_{j+1}}) [x_{i_2}, x_{i_3}, \dots, x_{i_j}, x_{i_{j+1}}, x_{i_{j+1}}, \dots, x_{i_{n+1}}; f] \right\} \end{aligned}$$

où j est un indice tel que $i_j + 1 < i_{j+1}$. La propriété résulte immédiatement.

En prenant $f=x^n$ dans (20), on voit que la somme des coefficients dans le second membre est égale à 1. Nous avons donc la propriété suivante.

Si la suite (11) est ordonnée, toute différence divisée $[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n+1}}; f]$ sur $n+1$ de ces points est une moyenne arithmétique (généralisée) des différences divisées $\Delta_n^1(f), \Delta_n^2(f), \dots, \Delta_n^{m-n}(f)$. Nous avons donc

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n+1}}; f] = \sum_{j=1}^{m-n} A_j \Delta_n^j(f),$$

$$A_j \geq 0, j=1, 2, \dots, m-n, \sum_{j=1}^{m-n} A_j = 1,$$

les A_j étant indépendants de la fonction f .

Les coefficients A_j sont donnés par la formule (20). La démonstration précédente nous montre, d'ailleurs, que

$$A_j = 0, j=1, 2, \dots, i_1 - 1, i_{n+1} - n + 1, i_{n+1} - n + 2, \dots, m - n,$$

ce qu'on peut voir aussi sur la formule (20), en tenant compte de la définition (15) des fonctions f_j^* . Les coefficients $A_{i_1}, A_{i_{n+1}-n}$ sont surement positifs. On peut facilement calculer leurs valeurs. La fonction f_i^* peut être considérée, sur les points $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n+1}}$, comme la somme du polynome $\varphi_{i_1+n-1, n-1}$ de degré $n-1$ et d'une fonction $g=g(x)$ égale à $\varphi_{i_1+n-1, n-1}(x_{i_1})$ pour $x=x_{i_1}$ et nulle en dehors de ce point. Nous avons alors

$$\begin{aligned} A_{i_1} &= (x_{i_1+n} - x_{i_1}) [x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n+1}}; f_i^*] = (x_{i_1+n} - x_{i_1}) [x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n+1}}; g] = \\ &= \frac{(-1)^{n+1} (x_{i_1+n} - x_{i_1}) V(x_{i_2}, x_{i_3}, \dots, x_{i_{n+1}}) \varphi_{i_1+n-1, n-1}(x_{i_1})}{V(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n+1}})} \\ &= \frac{(x_{i_1+1} - x_{i_1}) (x_{i_1+2} - x_{i_1}) \dots (x_{i_1+n} - x_{i_1})}{(x_{i_2} - x_{i_1}) (x_{i_3} - x_{i_1}) \dots (x_{i_{n+1}} - x_{i_1})} \end{aligned}$$

Nous trouvons de la même manière

$$A_{i_{n+1}-n} = \frac{(x_{i_{n+1}} - x_{i_{n+1}-1}) (x_{i_{n+1}} - x_{i_{n+1}-2}) \dots (x_{i_{n+1}} - x_{i_{n+1}-n})}{(x_{i_{n+1}} - x_{i_1}) (x_{i_{n+1}} - x_{i_2}) \dots (x_{i_{n+1}} - x_{i_n})}.$$

Remarque. La démonstration précédente nous montre que les fonctions f_j^* sont non-concaves d'ordre $n-1$ sur les points (11). Cette propriété peut aussi être établie directement.

6. La différence divisée d'une fonction de fonction. Nous avons établi la formule (18) donnant la différence divisée d'un produit de deux fonctions. Considérons maintenant une fonction de fonction $G(f)$ et proposons nous de trouver une expression pour la différence divisée

$$F = [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; G(f)]$$

Si nous posons $f_i = f(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n+1$, l'expression F est linéaire et homogène en $G(f_1), G(f_2), \dots, G(f_{n+1})$, donc de la forme

$$F = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i G(f_i).$$

Nous aurons donc

$$F = \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i [f_1, f_2, \dots, f_i; G].$$

Nous avons

$$\lambda_i = \frac{1}{\varphi'_{1, n+1}(x_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n+1$$

et la formule (14) nous montre que si nous posons

$$g_j = g_j(x) = (f - f_1)(f - f_2) \dots (f - f_{j-1}), \quad g_1 = 1, \\ j = 1, 2, \dots, n+1,$$

nous avons

$$(22) \quad \mu_j = [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; g_j], \quad j = 1, 2, \dots, n+1.$$

En particulier, nous avons $\mu_1 = 0$. Tenant compte de (18), des formules $[x_1; f - f_1] = 0$, $[x_2; f - f_2] = 0$ et des relations (7), (8), (9), nous pouvons écrire

$$\mu_2 = \sum_{i=3}^{n+1} [x_1, x_3, \dots, x_i; f] [x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}; x_2; f].$$

Ce coefficient est donc une somme de $n-1$ produits de différences divisées d'ordre ≥ 1 de f , chaque produit étant formé par deux différences divisées dont la somme des ordres est égale à n . Démontrons qu'en général

Le coefficient μ_j est une somme de produits de différences divisées d'ordre ≥ 1 de f , chaque produit étant formé par des différences divisées dont la somme des ordres est égale à n .

Chaque différence divisée est prise, bien entendu, sur certains points de la suite $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$

La démonstration se fait par induction. Nous avons vu que la propriété est vraie pour le coefficient μ_2 , quel que soit n . Supposons la propriété vraie pour le coefficient μ_j pour toutes les valeurs possibles de n et démontrons-la pour μ_{j+1} . Nous avons, compte tenant de (22), de la formule (18) et de $g_{j+1} = g_j(f - f_j)$,

$$(23) \quad \mu_{j+1} = \sum_{i=j+1}^{n+1} [x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_i; g_j] [x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}; x_j; f],$$

qui démontre la propriété.

Cette formule nous indique aussi le nombre des termes du coefficient μ_j . Soit N_j^n le nombre des termes de μ_j pour $n+1$ points. Nous avons alors $N_2^n = n-1$ et la formule (23) nous montre que $N_{j+1}^n = N_j^{n-1} + N_j^n + \dots + N_j^{n-j+1}$ d'où l'on déduit facilement,

$$N_j^n = \frac{(n-1)(n-2) \dots (n-j+1)}{(j-1)!}.$$

Désignons par $d'_r, d''_r, \dots$ des différences divisées d'ordre r de f prise sur des groupes de $r+1$ points de la suite $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$. Nous avons alors

$$(24) \quad \mu_j = \sum d'_1 d''_1 \dots d^{(j_1)}_1 d'_2 d''_2 \dots d^{(j_2)}_2 \dots d'_n d''_n \dots d^{(j_n)}_n$$

où

$$(25) \quad j_1 + j_2 + \dots + j_n = j, \quad j_1 + 2j_2 + \dots + nj_n = n.$$

La sommation (24) s'étend à toutes les solutions entières et positives ou nulles du système (25) par rapport à $j_1, j_2, \dots, j_n$. A toute solution correspondant $\frac{n!}{j_1! j_2! \dots j_n!}$ termes dans μ_j .

7. Le cas des fonctions dérivables. Nous avons supposé que les points (11) soient tous distincts. On peut aussi supposer le contraire. On obtient alors de (17) des formules limites en faisant tendre plusieurs des points x_i l'un vers l'autre. Les différences divisées qui s'introduisent ont alors les valeurs que nous avons donné dans notre Thèse⁶⁾. Nous

⁶⁾ Voir loc. cit. ¹⁾, p. 43.

supposons, bien entendu, qu'il s'agit maintenant de fonctions définies dans un intervalle contenant les points x_i et un nombre suffisant de fois dérivables. Par exemple si tous les points viennent se confondre, la formule (18) devient la formule de LEIBNIZ donnant la dérivée $n^{\text{ème}}$ d'un produit. La formule de la différence divisée d'une fonction de fonction devient la formule donnant la $n^{\text{ème}}$ dérivée d'une fonction de fonction.

București, le 29 octobre 1940.