

E - 3734/23

TIBERIU POPOVICIU

QUELQUES REMARQUES SUR UN THÉORÈME DE M. POMPEIU

(EXTRAIT DU BULLETIN MATHÉMATIQUE DE LA SOCIÉTÉ
ROUMAINE DES SCIENCES, TOME 43-1-2, BUCAREST, 1941)



MONITORUL OFICIAL ȘI ÎMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA CENTRALĂ
BUCUREȘTI
1 9 4 2

QUELQUES REMARQUES SUR UN THÉORÈME DE M. POMPEIU

PAR

TIBERIU POPOVICIU

M. D. POMPEIU a démontré¹⁾ que si ABC est un triangle équilatéral et P un point de son plan, avec les longueurs $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$ on peut toujours former un triangle.

On peut énoncer ce résultat sous la forme suivante:

Si ABC est un triangle équilatéral et si P est un point de son plan, on a

$$\frac{\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}}{3} \geq \frac{2}{3} \max (\overline{PA}, \overline{PB}, \overline{PC}).$$

Dans la suite nous nous proposons de généraliser cette propriété pour un polygone régulier d'un nombre quelconque de côtés. Nous ferons aussi quelques autres remarques. Le lecteur se rendra facilement compte que ces problèmes en soulèvent d'autres qu'il serait intéressant d'examiner de plus près.

I

1. — Considérons un polygone régulier $A_0 A_1 \dots A_{n-1}$ ($n \geq 3$) et soit P un point de son plan. L'expression

$$E_r(P) = \frac{\overline{PA_0}^r + \overline{PA_1}^r + \dots + \overline{PA_{n-1}}^r}{\overline{PA_0}^r}$$

où r est un nombre positif, est une fonction continue de P dans tout le plan, sauf au point A_0 , où d'ailleurs elle n'est pas définie.

Nous nous proposons d'étudier le minimum de $E_r(P)$.

¹⁾ D. POMPEIU. „Une identité entre nombres complexes et un théorème de géométrie élémentaire". Bulletin de Mathématique et de Physique, 6, 6 — 7 (1936).

Sans restreindre la généralité nous pouvons supposer que les sommets A_k sont représentés dans le plan par les nombres complexes $e^{i \frac{2k\pi}{n}}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ et le point variable P par le nombre complexe $\rho e^{i\theta}$, $\rho \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Nous avons alors

$$\overline{PA_k} = \sqrt{\rho^2 + 1 - 2\rho \cos\left(\theta - \frac{2k\pi}{n}\right)}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Si P est le point A_0 diamétralement opposé à A_0 sur le cercle circonscrit, on a

$$E_r(A_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \left| \cos \frac{k\pi}{n} \right|^r = \alpha < n.$$

On a donc sûrement

$$\min E_r(P) \leq \alpha.$$

Mais nous avons

$$|\rho - 1| \leq PA_k \leq \rho + 1, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

donc

$$E_r(P) \geq \frac{n |\rho - 1|^r}{(\rho + 1)^r}.$$

Si nous prenons $\rho > \frac{\frac{1}{n^{\frac{1}{r}} + \alpha^{\frac{1}{r}}}}{\frac{1}{n^{\frac{1}{r}} - \alpha^{\frac{1}{r}}}}$, nous avons $E_r(P) > \alpha$.

Il en résulte que le minimum de $E_r(P)$ est le même que dans un cercle fermé de centre origine et de rayon $\frac{\frac{1}{n^{\frac{1}{r}} + \alpha^{\frac{1}{r}}}}{\frac{1}{n^{\frac{1}{r}} - \alpha^{\frac{1}{r}}}}$. D'autre part

$$\lim_{P \rightarrow A_0} E_r(P) = +\infty$$

$$P \rightarrow A_0.$$

On peut donc affirmer que:

Le minimum de $E_r(P)$ est atteint en au moins un point du plan.

Remarquons qu'un tel point est nécessairement distinct de l'origine

O puisque

$$E_r(O) = n.$$

2. — Considérons le point P_m représenté par le nombre complexe $\rho e^{i\left(\theta + \frac{2m\pi}{n}\right)}$ où m est un entier. Par suite de la symétrie, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} \overline{P_m A_k}^r = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{P A_k}^r.$$

Toujours par suite de la symétrie, on voit qu'il suffit d'examiner l'expression $E_r(P)$ seulement pour les points P pour lesquels

$$(1) \quad \pi - \frac{\pi}{n} \leq \theta \leq \pi.$$

Fixons un tel θ et faisons varier ρ de 0 à $+\infty$.

Si nous posons

$$(2) \quad t = \frac{2\rho}{\rho^2 + 1}$$

nous avons

$$E_r(P) = \frac{1}{(1 - t \cos \theta)^{\frac{r}{2}}} \sum_{k=0}^{n-1} \left[1 - t \cos\left(\theta - \frac{2k\pi}{n}\right) \right]^{\frac{r}{2}}.$$

De (1) il résulte que $\cos \theta < 0$, donc $E_r(P)$ est une fonction continue de t dans l'intervalle fermé $[0, 1]$ et est sûrement dérivable dans l'intervalle $[0, 1]$ ouvert à droite. Nous avons, d'après un calcul facile,

$$\frac{dE_r(P)}{dt} = - \frac{r}{(1 - t \cos \theta)^{\frac{r}{2} + 1}} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\theta - \frac{k\pi}{n}\right) \sin \frac{k\pi}{n} \left[1 - t \cos\left(\theta - \frac{2k\pi}{n}\right) \right]^{\frac{r}{2} - 1}$$

et compte tenant de (1),

$$\frac{dE_r(P)}{dt} < 0, \quad 0 \leq t < 1.$$

La fonction $E_r(P)$ de t est donc décroissante dans l'intervalle $[0, 1]$. Son minimum est atteint seulement pour $t = 1$ donc, d'après (2), seulement pour $\rho = 1$.

Le minimum de l'expression $E_r(P)$ ne peut être atteint que sur le cercle circonscrit au polygone.

3. — Supposons donc $\rho = 1$. L'expression $E_r(P)$ devient

$$E_r(P) = \frac{1}{\sin^r \frac{\theta}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \left| \sin \left(\frac{\theta}{2} - \frac{k\pi}{n} \right) \right|^r,$$

ou

$$E_r(P) = \sum_{k=0}^{n-1} \left| \cos \frac{k\pi}{n} - u \sin \frac{k\pi}{n} \right|^r,$$

en posant

$$u = \cotg \frac{\theta}{2}.$$

C'est une fonction continue de u dans l'intervalle fermé $\left[0, \tg \frac{\pi}{2n}\right]$ et est sûrement indéfiniment dérivable dans l'intervalle ouvert $\left(0, \tg \frac{\pi}{2n}\right)$. On a

$$\frac{dE_r(P)}{du} = -r \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin \frac{k\pi}{n} \left| \cos \frac{k\pi}{n} - u \sin \frac{k\pi}{n} \right|^r}{\cos \frac{k\pi}{n} - u \sin \frac{k\pi}{n}},$$

$$\frac{d^2E_r(P)}{du^2} = r(r-1) \sum_{k=0}^{n-1} \sin^2 \frac{k\pi}{n} \left| \cos \frac{k\pi}{n} - u \sin \frac{k\pi}{n} \right|^{r-2}.$$

Nous avons donc

$$\frac{d^2E_r(P)}{du^2} < 0, = 0 \text{ resp. } > 0, \quad 0 < u < \tg \frac{\pi}{2n}$$

suivant que $r < 1, = 1, \text{ resp. } > 1$.

La fonction $E_r(P)$ de u est donc une fonction continue *concave linéaire* resp. *convexe* dans l'intervalle fermé $\left[0, \tg \frac{\pi}{2n}\right]$. Pour aller plus loin examinons la dérivée première de $E_r(P)$ au voisinage des extrémités.

Si n est impair, tous les $\cos \frac{k\pi}{n}$ sont $\neq 0$, donc

$$\lim_{u \rightarrow +0} \frac{dE_r(P)}{du} = -r \sum_{k=0}^{n-1} \tg \frac{k\pi}{n} \left| \cos \frac{k\pi}{n} \right|^r = 0.$$

On peut donc affirmer dans ce cas que le minimum est atteint pour $u = 0$ si $r > 1$ et pour $u = \tg \frac{\pi}{2n}$ si $r < 1$ et seulement pour ces valeurs.

Si n est pair les $\cos \frac{k\pi}{n}$ sont $\neq 0$ sauf pour $k = \frac{n}{2}$. On a donc

$$\lim_{u \rightarrow +0} \frac{dE_r(P)}{du} = r \lim_{u \rightarrow +0} u^{r-1}$$

et par conséquence

$$\lim_{u \rightarrow +0} \frac{dE_r(P)}{du} = \begin{cases} 0, & \text{pour } r > 1 \\ +\infty, & \text{pour } r < 1 \end{cases}$$

On en déduit immédiatement que si $r > 1$ le minimum est atteint pour $u = 0$. Si $r < 1$, la fonction $E_r(P)$ étant concave nous savons que le minimum ne peut être atteint que pour les extrémités

$$u = 0, \quad u = \tg \frac{\pi}{2n}.$$

Pour décider remarquons que dans ce cas (n pair)

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \tg \frac{\pi}{2n}} \frac{dE_r(P)}{du} &= -\frac{r}{\cos^{r-1} \frac{\pi}{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin \frac{k\pi}{n}}{\cos \frac{(2k+1)\pi}{2n}} \left| \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right|^r = \\ &= -\frac{r \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{2n}} \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \cos^r \frac{(2k+1)\pi}{2n} > 0. \end{aligned}$$

La fonction $E_r(P)$ est donc croissante et son minimum est atteint pour $u = 0$.

Il reste à examiner le cas spécial $r = 1$. Nous avons alors

$$E_r(P) = \begin{cases} \frac{1}{\tg \frac{\pi}{2n}} + u, & \text{pour } n \text{ pair} \\ \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2n}}, & \text{pour } n \text{ impair.} \end{cases}$$

Pour n pair le minimum est atteint pour $u = 0$. Pour n impair $E_1(P)$ est constante sur l'ensemble des points considéré, donc son minimum est atteint en tout point de l'intervalle $\left[0, \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n}\right]$.

Remarquons maintenant que si θ croît de $\pi - \frac{\pi}{n}$ à π , $u = \cotg \frac{\theta}{2}$ décroît de $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2n}$ à 0.

Posons maintenant

$$(3) \quad \lambda_n^{(r)} = \begin{cases} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \cos \frac{k\pi}{n} \right|^r, & \text{si } n \text{ est pair } r > 0 \text{ et si } n \text{ est impair } r \geq 1 \\ \frac{1}{\cos^r \frac{\pi}{2n}} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right|^r, & \text{si } n \text{ est impair } 0 < r < 1. \end{cases}$$

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant.

Théorème 1. Si $A_0 A_1 \dots A_{n-1}$ est un polygone régulier, r un nombre positif donné et P un point du plan du polygone, on a l'inégalité

$$E_r(P) \geq \lambda_n^{(r)}.$$

L'égalité a lieu si et seulement si:

1° n étant pair et $r > 0$, ou bien n étant impair et $r \geq 1$, P coïncide avec le point A_0 du cercle circonscrit diamétralement opposé à A_0 .

2° n étant impair et $0 < r < 1$, P coïncide avec l'un des sommets opposés à A_0 , donc $P = A_{\frac{n-1}{2}}$ ou $P = A_{\frac{n+1}{2}}$.

3° n étant impair et $r = 1$, P coïncide avec l'un des points de l'arc du cercle circonscrit compris entre les sommets $A_{\frac{n-1}{2}}$, $A_{\frac{n+1}{2}}$.

Il s'agit, bien entendu, du cercle circonscrit au polygone.

4. — Le résultat précédent peut se mettre sous diverses formes. L'expression

$$(4) \quad M_r(P) = \left(\frac{\overline{PA_0}^r + \overline{PA_1}^r + \dots + \overline{PA_{n-1}}^r}{n} \right)^{\frac{1}{r}}$$

est la moyenne de puissance r des distances $\overline{PA_0}, \overline{PA_1}, \dots, \overline{PA_{n-1}}$. On sait que nous avons la limitation supérieur

$$M_r(P) \leq \max(\overline{PA_0}, \overline{PA_1}, \dots, \overline{PA_{n-1}})$$

Le théorème 1 donne, pour un polygone régulier, une limitation inférieur de $M_r(P)$. Nous avons le

Théorème 2. Si $A_0 A_1 \dots A_{n-1}$ est un polygone régulier, r un nombre positif et P un point du plan du polygone, on a

$$M_r(P) \geq C_n^{(r)} \max(\overline{PA_0}, \overline{PA_1}, \dots, \overline{PA_{n-1}})$$

où

$$C_n^{(r)} = \left(\frac{\lambda_n^{(r)}}{n} \right)^{\frac{1}{r}}$$

Remarquons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n^{(r)}}{n} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |\cos x|^r dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^r x dx < 1,$$

donc $C_n^{(r)}$ pour $n \rightarrow \infty$ tend vers la valeur moyenne de puissance r de

la fonction $\cos x$ dans l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Pour compléter les résultats précédents nous examinerons avec un peu plus de détail, le cas où r est un nombre entier.

5. — Soit d'abord $r = 1$. Nous avons alors

$$\lambda_n^{(1)} = \begin{cases} \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2n}}, & n \text{ pair} \\ \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2n}}, & n \text{ impair.} \end{cases}$$

La généralisation directe du théorème de M. D. POMPEU peut s'énoncer de la manière suivante

Théorème 3. Si $A_0 A_1 \dots A_{n-1}$ est un polygone régulier et P un point de son plan, on a

$$M_1(P) = \frac{\overline{PA_0} + \overline{PA_1} + \dots + \overline{PA_{n-1}}}{n} \geq C_n^{(1)} \max(\overline{PA_0}, \overline{PA_1}, \dots, \overline{PA_{n-1}})$$

où $C_n^{(1)}$ est égal à

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2n}} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2n}}$$

suivant que n est pair ou impair.

Remarquons que pour n pair $C_n^{(1)}$ croît et tend vers $\frac{2}{\pi}$ et pour n impair il décroît et tend vers $\frac{2}{\pi}$ pour $n \rightarrow \infty$, donc

Conséquence 1. Si $A_0 A_1 \dots A_{n-1}$ est un polygone régulier d'un nombre impair de côtés et P un point de son plan, on a

$$M_1(P) > \frac{2}{\pi} \max(\overline{PA_0}, \overline{PA_1}, \dots, \overline{PA_{n-1}})$$

l'égalité n'étant pas possible et $\frac{2}{\pi}$ ne pouvant être remplacé par aucun autre nombre plus grand.

Pour $n=4$ on a $C_4^{(1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{4}$ et nous avons le

Théorème 4. Si $ABCD$ est un carré et P un point de son plan, nous avons l'inégalité

$$\frac{\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}}{4} \geq \frac{\sqrt{2}+1}{4} \max(\overline{PA}, \overline{PB}, \overline{PC}, \overline{PD})$$

qui est, d'ailleurs, équivalente aux quatre inégalités

$$\overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD} \geq \sqrt{2} \overline{PA}, \quad \overline{PC} + \overline{PD} + \overline{PA} \geq \sqrt{2} \overline{PB}$$

$$\overline{PD} + \overline{PA} + \overline{PB} \geq \sqrt{2} \overline{PC}, \quad \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} \geq \sqrt{2} \overline{PD}.$$

M. D. POMPEIU a déjà trouvé²⁾ $C_4^{(1)} > \frac{1}{2}$.

6. — Supposons maintenant $r=2m$, m étant un nombre naturel. Calculons $\lambda_n^{(2m)}$. Nous avons

$$\cos^{2m} x = \frac{1}{2^{2m}} \binom{2m}{m} + 2 \sum_{j=1}^m \frac{1}{2^{2m}} \binom{2m}{m+j} \cos 2jx$$

²⁾ D. POMPEIU „La géométrie et les imaginaires: démonstration de quelques théorèmes élémentaires“. Bulletin de Mathématiques et de Physique, 11, (1941).

et d'autre part

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos 2j \frac{k}{n} = \begin{cases} 0, & \text{si } j \not\equiv 0 \pmod{n} \\ n, & \text{si } j \equiv 0 \pmod{n}. \end{cases}$$

Nous en déduisons

$$\lambda_n^{(2m)} = \begin{cases} \frac{n}{2^{2m}} \binom{2m}{m}, & \text{si } m < n \\ \frac{n}{2^{2m}} \left[\binom{2m}{m} + 2 \sum_{j=1}^{\left[\frac{m}{n}\right]} \binom{2m}{m+jn} \right], & \text{si } m \geq n \end{cases}$$

où $[x]$ est le plus grand entier $\leq x$.

Remarquons que dans ce cas le coefficient $C_n^{(2m)}$ est indépendant de n pour $n > m$.

Théorème 5. Si m est un nombre naturel, $A_0 A_1 \dots A_{n-1}$ un polygone régulier à $n > m$ ($n \geq 3$) côtés et P un point du plan de ce polygone, on a

$$M_{2m}(P) \geq \frac{1}{2} \binom{2m}{m} \max(\overline{PA_0}, \overline{PA_1}, \dots, \overline{PA_{n-1}}).$$

Le nombre $\lambda_n^{(r)}$ peut aussi se calculer facilement si $r=2m+1$ est un nombre impair. Nous avons dans ce cas

$$\lambda_n^{(2m+1)} = 2 \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \cos^{2m+1} \frac{k\pi}{n} = 1.$$

Mais,

$$\cos^{2m+1} x = \frac{1}{2^{2m}} \sum_{j=1}^{m+1} \binom{2m+1}{m+j} \cos (2j-1)x$$

et d'autre part

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \cos (2j-1) \frac{k\pi}{n} = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^{j+1}}{\operatorname{tg} \frac{(2j-1)\pi}{2n}}, & n \text{ pair} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^{j+1}}{\sin \frac{(2j-1)\pi}{2n}}, & n \text{ impair} \end{cases}$$

donc

$$\lambda_n^{(2m+1)} = \begin{cases} \frac{1}{2^{2m}} \sum_{j=1}^{m+1} \frac{(-1)^{j+1} \binom{2m+1}{m+j}}{\operatorname{tg} \frac{(2j-1)\pi}{2n}}, & n \text{ pair} \\ \frac{1}{2^{2m}} \sum_{j=1}^{m+1} \frac{(-1)^{j+1} \binom{2m+1}{m+j}}{\sin \frac{(2j-1)\pi}{2n}}, & n \text{ impair.} \end{cases}$$

II.

7. M. D. POMPEIU dans son deuxième travail cité démontre que si les quatre longueurs a, b, c, d vérifient l'inégalité

$$a + b + c + d \geq 2 \max(a, b, c, d)$$

on peut construire avec ces longueurs un contour polygonal fermé. C'est l'extension de la propriété bien connue qu'avec trois longueurs a, b, c telles que

$$a + b + c \geq 2 \max(a, b, c)$$

on peut former un triangle.

La généralisation de cette propriété est la suivante.

Théorème 6. La condition nécessaire et suffisante pour qu'avec n longueurs ($n \geq 3$) $a_1, a_2, \dots, a_n$ on puisse construire une ligne polygonale fermée est que l'on ait

$$(5) \quad a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq 2 \max(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

L'inégalité (5) est équivalente aux n inégalités

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{l-1} + a_{l+1} + \dots + a_n \geq a_l$$

$$l = 1, 2, \dots, n.$$

La condition est nécessaire puisqu'une ligne brisée est au moins aussi longue que le segment unissant ses extrémités.

Il reste à démontrer que la condition est aussi suffisante. Nous allons faire la démonstration par induction complète.

¹⁾ En réalité la propriété est vraie aussi pour $n=2$, mais dans ce cas elle est évidente.

La propriété est vraie et bien connue pour $n=3$. Supposons la vraie pour $n (\geq 3)$ et démontrons-la pour $n+1$ longueurs. Soient $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$, $n+1$ longueurs telles que

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1} \geq 2 \max(a_1, a_2, \dots, a_{n+1}).$$

Sans restreindre la généralité nous pouvons supposer

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n+1}. \text{ Nous avons alors}$$

$$(6) \quad a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq a_{n+1}.$$

Soit maintenant AB un segment de longueur a_{n+1} et soit C le point de ce segment tel que le segment CB ait la longueur a_1 . Le segment AC a pour longueur $a_{n+1} - a_1$. Il suffit de démontrer qu'avec les longueurs $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1} - a_1$ on peut construire une ligne polygonale fermée. En effet, on peut alors construire une ligne polygonale fermée AD...CA avec ces longueurs et la ligne polygonale fermée AD...CBA sera construite avec les longueurs $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$.

Nous avons

$$\max(a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1} - a_1) = \max(a_n, a_{n+1} - a_1).$$

Il suffit donc de démontrer les inégalités

$$a_2 + a_3 + \dots + a_n \geq a_{n+1} - a_1,$$

$$a_2 + a_3 + \dots + a_{n+1} + (a_{n+1} - a_1) \geq a_n.$$

Or la première n'est autre que l'inégalité (6). La seconde peut s'écrire

$$(a_2 - a_1) + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_{n+1} \geq a_n$$

et est vérifiée puisque $a_2 \geq a_1, a_{n+1} \geq a_n$. On a donc

$$a_2 + a_3 + \dots + a_n + (a_{n+1} - a_1) \geq 2 \max(a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1} - a_1)$$

ce qui démontre la propriété.

8. — Reprenons le théorème 5. Pour n impair on a

$$(7) \quad n C_n^{(n)} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2n}} \geq \frac{1}{\sin \frac{\pi}{6}} = 2$$

l'égalité n'étant vraie que pour $n=3$. Pour n pair on a

$$(8) \quad n C_n^{(n)} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2n}} \geq \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}} = \sqrt{2} + 1 > 2$$

on a donc la

Conséquence 2. Si $A_0 A_1 \dots A_{n-1}$ est un polygone régulier ($n \geq 3$) et P un point de son plan, on a

$$\overline{PA_0} + \overline{PA_1} + \dots + \overline{PA_{n-1}} \geq 2 \max(\overline{PA_0}, \overline{PA_1}, \dots, \overline{PA_{n-1}})$$

et nous pouvons énoncer le

Théorème 7. Si $A_0 A_1 \dots A_{n-1}$ est un polygone régulier ($n \geq 3$) et P un point de son plan, avec les longueurs $\overline{PA_0}, \overline{PA_1}, \dots, \overline{PA_{n-1}}$ on peut toujours former une ligne polygonale fermée.

C'est le théorème de M. D. POMPEIU pour un polygone régulier quelconque.

Remarquons, qu'en vertu des inégalités (7) et (8), pour $n \geq 4$ il existe sûrement des polygones non réguliers vérifiant le théorème de M. POMPEIU.

9. — Si r est un nombre positif, l'unité de longueur étant choisie, on peut considérer les longueurs $\overline{PA_0}^r, \overline{PA_1}^r, \dots, \overline{PA_{n-1}}^r$.

Nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n^{(r)} = +\infty,$$

donc il existe un nombre naturel N_r dépendant de r , tel que

$$\lambda_n^{(r)} \geq 2, \text{ pour } n \geq N_r.$$

Soit $r \leq 1$. Compte tenant de (3), pour $n \geq 3$, nous avons

$$\lambda_n^{(r)} \geq 1 + 2 \left| \cos \frac{\pi}{n} \right|^r \geq 1 + \frac{2}{2^r} \geq 2, \quad n \text{ pair}$$

$$\lambda_n^{(r)} \geq \frac{1}{\cos^r \frac{\pi}{2n}} 2 \left| \cos \frac{\pi}{2n} \right|^r - 2, \quad n \text{ impair}$$

donc.

Théorème 8. Si $A_0 A_1 \dots A_{n-1}$ est un polygone régulier ($n \geq 3$), r un nombre positif ≤ 1 et P un point du plan du polygone, avec les longueurs $\overline{PA_0}^r, \overline{PA_1}^r, \dots, \overline{PA_{n-1}}^r$ on peut toujours former une ligne polygonale fermée.

On peut d'ailleurs remarquer que, pour un $n \geq 3$ donné, $\lambda_n^{(r)}$ est une fonction décroissante de r .

Le théorème 7 résulte donc des inégalités (7), (8) et

$$\lambda_n^{(r)} \geq \lambda_n^{(1)}, \quad r \leq 1.$$

Pour $r > 1$, on ne peut pas prendre $N_r = 3$. Le minimum de N_r croît vers $+\infty$ pour $r \rightarrow \infty$. Des calculs simples nous montrent que

pour $r \leq 2$ on peut prendre $N_r = 4$. Sur le cas $r = 2$ nous reviendrons plus loin avec plus de précisions.

III.

10. — Lorsque $r = 2$ on peut facilement compléter les résultats du § I.

Considérons n points formant un polygone quelconque $A_0 A_1 \dots A_{n-1}$ et soit P un point quelconque, le tout situé dans un même plan. Le cas où les points A_k ne sont pas tous distincts n'est pas exclu.

L'expression

$$E_2^{(r)}(P) = \frac{\overline{PA_0}^2 + \overline{PA_1}^2 + \dots + \overline{PA_{n-1}}^2}{\overline{PA_i}^2}$$

est une fonction de P , continue dans tout le plan, sauf au point A_i .

Nous nous proposons d'étudier le minimum de cette expression.

Soit G le centre de gravité des points $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$. Nous avons

$$E_2^{(r)}(P) = \frac{n \overline{GP}^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \overline{GA_k}^2}{\overline{PA_i}^2} = n \frac{\overline{GP}^2 + M_2^2(G)}{\overline{PA_i}^2}$$

avec la notation (4).

Si le sommet A_i coïncide avec G on a

$$E_2^{(r)}(P) = n + \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \overline{GA_k}^2}{\overline{PA_i}^2}$$

et on voit alors que

$$\min E_2^{(r)}(P) = n,$$

mais ce minimum n'est atteint par aucun point P du plan, sauf si tous les points A_k sont confondus.

Si A_i ne coïncide pas avec G , le minimum de $E_2^{(r)}(P)$ ne peut être atteint que pour un point de la droite GA_i . En effet, sur la circonférence d'un cercle de centre A_i le minimum ne peut être atteint qu'aux points où cette circonférence coupe la droite GA_i .

Si P est sur la droite GA_i , nous pouvons écrire

$$E_2^{(i)}(P) = n \frac{(1-\lambda)^2 \overline{GA_i^2} + M_2^2(G)}{\lambda^2 \overline{GA_i^2}},$$

où λ est un paramètre réel. On a notamment $P = \lambda G + (1-\lambda) A_i$.

Le minimum est atteint seulement pour

$$\lambda = \frac{\overline{GA_i^2} + M_2^2(G)}{\overline{GA_i^2}}$$

et nous avons

$$\min E_2^{(i)}(P) = n \frac{M_2^2(G)}{\overline{GA_i^2} + M_2^2(G)}.$$

On voit que dans ce cas

$$\min E_2^{(i)}(P) < n.$$

11. — Considérons maintenant les expressions

$$E_2^{(0)}(P), E_2^{(1)}(P), \dots, E_2^{(n-1)}(P).$$

Chacune à un minimum. Le plus petit de ces minima,

$$(9) \quad \min_{i=0, 1, \dots, n-1} \left[\min_{(P)} E_2^{(i)}(P) \right]$$

est donc déterminé et dépend du polygone $A_0 A_1 \dots A_{n-1}$.

Lorsque le polygone varie, ce minimum a un maximum. Nous nous proposons de déterminer ce maximum.

Les résultats du No. précédent nous montrent que si tous les points A_i sont confondus le minimum (9) est égal à n . Dans la suite nous excluons ce cas.

Si s des points A_i ($1 \leq s \leq n$) sont distincts de G et si d, d' sont respectivement la plus grande et la plus petite des distances de G à ces points, on a

$$\frac{s d'^2}{n} \leq M_2^2(G) \leq \frac{s d^2}{n}$$

et le nombre (9) est $\geq \frac{d'^2}{d^2} \cdot \frac{n s}{n+s}$, l'égalité étant possible et ayant

lieu effectivement seulement si $d = d'$. D'autre part

$$\frac{n s}{n+s} \leq \frac{n}{2},$$

l'égalité n'étant vraie que pour $s = n$. Il en résulte que le maximum de (9) est $\frac{n}{2}$ et est atteint seulement si les distances $\overline{GA_i}$ sont toutes égales.

Nous pouvons donc énoncer la propriété suivante, généralisation du théorème 5 pour $m = 1$.

Théorème 9. Si $A_0 A_1 \dots A_{n-1}$ est un polygone inscrit dans un cercle dont le centre coïncide avec le centre de gravité G des sommets A_i et si P est un point du plan de ce polygone, on a

$$(10) \quad M_2(P) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \max(\overline{PA_0}, \overline{PA_1}, \dots, \overline{PA_{n-1}})$$

l'égalité étant vraie seulement si P coïncide avec le symétrique par rapport à G de l'un des points A_i .

Si le polygone $A_0 A_1 \dots A_{n-1}$ ne vérifie pas la condition précédente il existe au moins un point P pour lequel l'inégalité (10) n'est pas vérifiée.

La polygone „maximisant“ est un triangle équilatéral pour $n = 3$ et est un rectangle pour $n = 4$.

12. — L'inégalité (10) nous donne encore la propriété suivante.

Théorème 10. Si $A_0 A_1 \dots A_{n-1}$ est un polygone à $n \geq 4$ sommets inscrit dans un cercle dont le centre coïncide avec le centre de gravité des points A_i et si P est un point du plan de ce polygone, avec les longueurs $\overline{PA_0}, \overline{PA_1}, \dots, \overline{PA_{n-1}}$ on peut construire une ligne polygonale fermée.

Pour $n = 4$ on a, en particulier, la propriété caractéristique du rectangle exprimée par le

Théorème 11. Si $ABCD$ est un rectangle et P un point de son plan, avec les longueurs $\overline{PA}^2, \overline{PB}^2, \overline{PC}^2, \overline{PD}^2$ on peut toujours construire une ligne polygonale fermée.

La propriété n'est vraie pour aucun autre quadrilatère $ABCD$.

IV.

13. — Nous avons considéré jusqu'ici n point $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ dans un plan et le point P variant dans ce plan. On peut supposer, plus généralement, que ces points sont dans un espace à un nombre quelconque de dimensions. En particulier le problème traité au § III se résout immédiatement dans l'espace à un nombre quelconque de dimensions. Le théorème 9 se généralise immédiatement et il n'est même pas nécessaire d'insister ici sur cette question.

Considérons maintenant, au lieu d'un polygone régulier $A_0 A_1 \dots A_{n-1}$ une circonférence Γ .

Nous avons alors le théorème suivant, limite du théorème 2.

Théorème 12. Si P est un point du plan de la circonférence Γ et $M_r(P)$ la valeur moyenne de puissance $r > 0$ des distances $\overline{PA}$ du point P à un point A de Γ , on a l'inégalité

$$M_r(P) \geq \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^r x \, dx \right)^{\frac{1}{r}} \overline{PP_1}$$

où P_1 est le point de Γ le plus éloigné de P .

L'égalité a lieu seulement si P est sur la circonférence Γ .

On voit immédiatement que le passage à la limite est parfaitement justifié. Il est facile d'ailleurs de démontrer directement la propriété.

14. — Dans le cas $r = 2$ on peut encore se poser un problème plus complet.

Considérons dans le plan une courbe continue Γ . Plus précisément une courbe représentée paramétriquement par

$$x = f(t), \quad y = g(t),$$

où $f(t)$, $g(t)$ sont deux fonctions continues de t dans un intervalle fermé $[a, b]$.

Soit P un point du plan et $M_2(P)$ la valeur moyenne quadratique des distances du point P aux points de la courbe Γ . On a alors, x, y étant les coordonnées de P ,

$$M_2^2(P) = \frac{1}{b-a} \int_a^b \{ [x - f(t)]^2 + [y - g(t)]^2 \} \, dt$$

Étudions le minimum du rapport

$$\frac{M_2(P)}{\overline{PA_0}}$$

ou mieux du rapport

$$E_2^{(A_0)}(P) = \frac{M_2^2(P)}{\overline{PA_0^2}},$$

où A_0 est un point donné de Γ .

Si G est le centre de gravité de la ligne Γ , nous avons encore

$$E_2^{(A_0)}(P) = \frac{\overline{GP^2} + M_2^2(G)}{\overline{PA_0^2}}.$$

On voit, comme au § précédent, que si A_0 coïncide avec G , on a

$$\min E_2^{(A_0)}(P) = 1$$

et ce minimum n'est pas atteint si, comme nous le supposons, la ligne Γ ne se réduit pas à un point.

Si A_0 ne coïncide pas avec G le minimum est égal à

$$\min E_2^{(A_0)}(P) = \frac{M_2^2(G)}{\overline{GA_0^2} + M_2^2(G)}.$$

Pour que

$$(11) \quad \min_{(A_0)} \left[\min E_2^{(A_0)}(P) \right]$$

soit maximum il faut que $\overline{GA^2}$ où A est un point courant de Γ se réduise à une constante. En effet, si d est le maximum et d' le minimum de $\overline{GA}$, on a

$$d' \leq M_2(G) \leq d,$$

l'égalité, n'étant possible, par suite de la continuité des fonctions $f(t)$, $g(t)$, que si $\overline{GA_0}$ est constante. Le minimum (11) est donc

$$\geq \frac{d'^2}{2d^2}.$$

Mais $\frac{d'^2}{2d^2} \leq \frac{1}{2}$, l'égalité n'étant possible que si $d' = d$. Il en résulte que

le maximum de (11) est égal à $\frac{1}{2}$ et ce maximum est atteint seulement si

$\overline{GA}$ est constante. Pour cela, on le voit facilement, il faut et il suffit que Γ soit une circonférence et que P soit sur cette circonférence. On a donc finalement le

Théorème 13. Si Γ est une circonférence et P un point du plan de cette circonférence, on a

$$(12) \quad M_2(P) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{PP_1}$$

P_1 étant le point de Γ le plus éloigné de P .

Si Γ est une courbe continue différente d'une circonférence il existe au moins un point P du plan pour lequel l'inégalité (12) n'est pas vraie.

București, 11 Décembre 1941.