pp. 335–345

44.

APROXIMAREA FUNCȚIILOR DE DOUĂ ȘI MAI MULTE VARIABILE PRINTR-O CLASĂ DE POLINOAME DE TIP BERNSTEIN

DE

D. D. STANCU

(Cluj)

Se studiază operatorii liniari și pozitivi (3) și (17) în două și respectiv s variabile, utili în aproximarea uniformă a funcțiilor continue.

Aceștia reprezintă o generalizare a operatorului (1)—(2), de care ne-am ocupat în lucrarea [3].

1. În lucrarea [3] am introdus următorul operator liniar pozitiv, atașat unei funcții $f(x)$ definită pe intervalul $[0, 1]$:

$$P_m^{[\alpha]}(f;\, x) = \sum_{i=0}^{m} w_{m,i}(x;\, \alpha)\, f\left(\frac{i}{m}\right), \tag{1}$$

unde

$$w_{m,i}(x;\alpha) = \tag{2}$$

$$= \binom{m}{i} \frac{x(x+\alpha)\ldots(x+\overline{i-1}\alpha)\,(1-x)\,(1-x+\alpha)\ldots(1-x+\overline{m-i-1}\alpha)}{(1+\alpha)\,(1+2\alpha)\,\ldots\,(1+\overline{m-1}\alpha)},$$

α fiind un parametru nenegativ, care poate depinde numai de numărul natural m. Acest operator l-am folosit apoi pentru aproximarea funcției $f(x)$, presupusă continuă pe $[0, 1]$.

În lucrarea de față vom da o extindere la două și mai multe variabile a rezultatelor mai importante din lucrarea citată.

2. În cazul unei funcții de două variabile $f(x, y)$, definită pe pătratul $D: 0 \leq x,\, y \leq 1$, operatorul (1) se poate extinde în felul următor

$$P_{m,n}^{[\alpha,\beta]}(f;\, x, y) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} w_{m,i}(x;\, \alpha)\, w_{n,j}(y;\, \beta)\, f\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n}\right), \tag{3}$$

ST. CERC. MAT., TOM. 22, NR. 2, P. 335—345, BUCUREȘTI, 1970

unde alături de polinomul (2) folosim şi următorul

$$w_{n,j}(y;\beta)=$$
$$=\binom{n}{j}\frac{y(y+\beta)\ldots(y+\overline{j-1}\beta)(1-y)(1-y+\beta)\ldots(1-y+\overline{n-j-1}\beta)}{(1+\beta)(1+2\beta)\ldots(1+\overline{n-1}\beta)},$$

parametrii α şi β fiind nenegativi, primul putînd depinde numai de m, iar al doilea numai de n.

După cum se observă imediat, operatorul liniar (3) este pozitiv pe pătratul D, în sensul că dacă $f(x, y) \geqq 0$ pe acest pătrat, atunci pe acesta avem de asemenea $P_{m,n}^{[\alpha,\beta]}(f; x, y) \geqq 0$. Se mai observă că acest operator reprezintă un polinom de gradul (m, n), adică de gradul m în raport cu x şi de gradul n în raport cu y. Este un polinom de tip Bernstein. Pentru $\alpha = \beta = 0$ el se reduce la polinomul clasic al lui Bernstein de gradul (m, n):

$$B_{m,n}(f; x, y)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\binom{m}{i}\binom{n}{j}x^{i}(1-x)^{m-i}y^{j}(1-y)^{n-j}f\left(\frac{i}{m},\frac{j}{n}\right).$$

3. Mai întîi vom enunţa şi demonstra

TEOREMA 1. *Operatorul (3) se poate reprezenta sub forma*

$$P_{m,n}^{[\alpha,\beta]}(f;x,y)=\sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{n}\binom{m}{r}\binom{n}{s}\times \tag{4}$$
$$\times\frac{x(x+\alpha)\ldots(x+\overline{r-1}\alpha)\,y(y+\beta)\ldots(y+\overline{s-1}\beta)}{(1+\alpha)(1+2\alpha)\ldots(1+\overline{r-1}\alpha)(1+\beta)(1+2\beta)\ldots(1+\overline{s-1}\beta)}\Delta_{\frac{1}{m},\frac{1}{n}}^{r,s}f(0,0),$$

unde $\Delta_{\frac{1}{m},\frac{1}{n}}^{r,s}f(0,0)$ *este diferenţa finită de ordinul* (r, s) *a funcţiei* $f(x, y)$ *avînd punctul de plecare* $(0, 0)$ *pasul* $\frac{1}{m}$ *în raport cu* x *şi pasul* $\frac{1}{n}$ *în raport cu* y, *adică*

$$\Delta_{\frac{1}{m},\frac{1}{n}}^{r,s}f(0,0)=\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{s}(-1)^{i+j}\binom{r}{i}\binom{s}{j}f\left(\frac{r-i}{m},\frac{s-j}{n}\right).$$

Demonstraţie. În conformitate cu reprezentarea dată în lucrarea [3] pentru operatorul (1) avem

$$P_{m,n}^{[\alpha,\beta]}(f;x,y)=\sum_{j=0}^{n}w_{n,j}(y;\beta)\left[\sum_{i=0}^{m}w_{m,i}(x;\alpha)f\left(\frac{i}{m},\frac{j}{n}\right)\right]=$$
$$=\sum_{j=0}^{n}w_{n,j}(y;\beta)\left[\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}\frac{x(x+\alpha)\ldots(x+\overline{r-1}\alpha)}{(1+\alpha)(1+2\alpha)\ldots(1+\overline{r-1}\alpha)}\Delta_{\frac{1}{m}}^{r}f\left(0,\frac{j}{n}\right)\right]=$$

$$= \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} \frac{x(x+\alpha)\ldots(x+\overline{r-1}\alpha)}{(1+\alpha)(1+2\alpha)\ldots(1+\overline{r-1}\alpha)} \left[\sum_{j=0}^{n} w_{n,j}(y;\beta)\, \Delta^{r}_{\frac{1}{m}} f\left(0, \frac{j}{n}\right)\right] =$$

$$= \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} \frac{x(x+\alpha)\ldots(x+\overline{r-1}\alpha)}{(1+\alpha)(1+2\alpha)\ldots(1+\overline{r-1}\alpha)} \times$$

$$\times \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} \frac{y(y+\beta)\ldots(y+\overline{s-1}\beta)}{(1+\beta)(1+2\beta)\ldots(1+\overline{s-1}\beta)}\, \Delta^{r,s}_{\frac{1}{m},\frac{1}{n}} f(0,0)$$

și se ajunge astfel la formula (4).

4. Ținînd seama de teorema 1, dacă se aplică operatorul (3) funcțiilor 1, x, y și $x^2 + y^2$ obținem imediat

$$P^{[\alpha,\beta]}_{m,n}(1; x, y) = 1, \quad P^{[\alpha,\beta]}_{m,n}(t; x, y) = x, \quad P^{[\alpha,\beta]}_{m,n}(\tau; x, y) = y, \tag{5}$$

$$P^{[\alpha,\beta]}_{m,n}(t^2+\tau^2; x, y) = \frac{1}{1+\alpha}\left[\frac{x(1-x)}{m} + x(x+\alpha)\right] + \tag{6}$$

$$+ \frac{1}{1+\beta}\left[\frac{y(1-y)}{n} + y(y+\beta)\right].$$

Aceste rezultate simple vor fi utile pentru a demonstra

TEOREMA 2. *Dacă $f(x, y)$ este continuă pe pătratul D și $0 \leqq \alpha = \alpha(m) \to 0$ cînd $m \to \infty$, iar $0 \leqq \beta = \beta(n) \to 0$ cînd $n \to \infty$, atunci șirul $\{P^{[\alpha,\beta]}_{m,n}(f, x, y)\}$ converge uniform pe D către $f(x, y)$ cînd $m, n \to \infty$.*

Demonstrație. Avînd în vedere că în conformitate cu (5) și (6) avem uniform pe D

$$\lim_{m,n\to\infty} P^{[\alpha,\beta]}_{m,n}(f; x, y) = f(x, y),$$

dacă $f(x, y)$ reprezintă pe rînd funcțiile 1, x, y și $x^2 + y^2$, rezultă, în baza teoremei lui V. I. Volkov [4], care constituie o extindere la două variabile a binecunoscutei teoreme a lui Bohman-Korovkin, că atunci cînd m și $n \to \infty$ șirul operatorilor (3) tinde uniform pe D către $f(x, y)$, oricare este această funcție, continuă pe D.

5. În continuare ne vom ocupa de evaluarea ordinului de aproximație prin operatorul (3) a funcției $f(x, y)$, continuă pe D.

În acest scop vom face uz de modulul de continuitate al funcției $f(x, y)$ care se definește astfel

$$\omega(\delta_1, \delta_2) = \max |f(x'', y'') - f(x', y')|,$$

unde $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, iar (x', y'), (x'', y'') sînt puncte din D, supuse condiției: $|x'' - x'| \leqq \delta_1$, $|y'' - y'| \leqq \delta_2$.

Ne va fi utilă următoarea proprietate, binecunoscută, a modulului de continuitate :

(7) $$\omega(\lambda_1 \delta_1, \lambda_2 \delta_2) \leqq (\lambda_1 + \lambda_2 + 1)\, \omega(\delta_1, \delta_2) \quad (\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0).$$

Are loc

TEOREMA 3. *Dacă $f(x, y)$ este continuă pe pătratul D, atunci are loc inegalitatea*

(8) $$\left| f(x, y) - P_{m,n}^{[\alpha,\beta]}(f;\, x, y) \right| \leqq 2\omega\left(\sqrt{\frac{1+\alpha m}{m+\alpha m}}, \sqrt{\frac{1+\beta n}{n+\beta n}} \right).$$

Demonstrație. Avînd în vedere prima relație de la (5), precum și faptul că $w_{m,i}(x;\alpha) \geqq 0$ și $w_{n,j}(y;\beta) \geqq 0$ dacă $x, y \in [0, 1]$, putem scrie

$$|f(x, y) - P_{m,n}^{[\alpha,\beta]}(f;\, x, y)| =$$

$$= \left| \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} w_{m,i}(x;\alpha)\, w_{n,j}(y;\beta) \left[f(x, y) - f\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n}\right) \right] \right| \leqq$$

$$\leqq \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} w_{m,i}(x;\alpha)\, w_{n,j}(y;\beta) \left| f(x, y) - f\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n}\right) \right|.$$

Dar cum în virtutea inegalității (7) avem

$$\left| f(x, y) - f\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n}\right) \right| \leqq \omega\left(\left| x - \frac{i}{m} \right|, \left| y - \frac{j}{n} \right| \right) =$$

$$= \omega\left(\frac{1}{\delta_1} \left| x - \frac{i}{m} \right| \delta_1, \frac{1}{\delta_2} \left| y - \frac{j}{n} \right| \delta_2 \right) \leqq$$

$$\leqq \left(1 + \frac{1}{\delta_1} \left| x - \frac{i}{m} \right| + \frac{1}{\delta_2} \left| y - \frac{j}{n} \right| \right) \omega(\delta_1, \delta_2),$$

obținem în continuare

(9) $$|f(x, y) - P_{m,n}^{[\alpha,\beta]}(f;\, x, y)| \leqq$$

$$\leqq \left(1 + \frac{1}{\delta_1} \sum_{i=0}^{m} w_{m,i}(x;\alpha) \left| x - \frac{i}{m} \right| + \frac{1}{\delta_2} \sum_{j=0}^{n} w_{n,j}(y;\beta) \left| y - \frac{j}{n} \right| \right) \omega(\delta_1, \delta_2) \leqq$$

$$\leqq \left(1 + \frac{1}{2\delta_1} \sqrt{\frac{1+\alpha m}{m+\alpha m}} + \frac{1}{2\delta_2} \sqrt{\frac{1+\beta n}{n+\beta n}} \right) \omega(\delta_1, \delta_2),$$

deoarece avem

$$\sum_{i=0}^{m} w_{m,i}(x;\alpha)\left|x-\frac{i}{m}\right| \leqq \left[\sum_{i=0}^{m} w_{m,i}(x;\alpha)\left(x-\frac{i}{m}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \tag{10}$$

$$= \left[\frac{1+\alpha m}{1+\alpha}\cdot\frac{x(1-x)}{m}\right]^{\frac{1}{2}} \leqq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\alpha m}{m+\alpha m}}$$

şi

$$\sum_{j=0}^{n} w_{n,j}(y;\beta)\left|y-\frac{j}{n}\right| \leqq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\beta n}{n+\beta n}}. \tag{11}$$

Alegînd

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{1+\alpha m}{m+\alpha m}}, \quad \delta_2 = \sqrt{\frac{1+\beta n}{n+\beta n}}, \tag{12}$$

inegalitatea (9) ne conduce la inegalitatea (8), pe care voiam s-o demonstrăm.

În cazul particular $\alpha = \beta = 0$, aceasta se reduce la următoarea

$$|f(x, y) - B_{m,n}(f; x, y)| \leqq 2\omega\left(\frac{1}{\sqrt{m}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

care se datoreşte lui A. F. Ipatov [1].

6. În cazul cînd se presupune că funcţia $f(x, y)$ are derivate parţiale de ordinul întîi continue pe pătratul D, se poate da o evaluare a ordinului de aproximaţie a acestei funcţii prin operatorul (3) cu ajutorul modulului de continuitate a derivatelor parţiale de ordinul întîi ale funcţiei $f(x, y)$. Are loc

TEOREMA 4. *Dacă funcţia $f(x, y)$ are derivatele parţial6 $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ continue pe D, atunci are loc inegalitatea*

$$|f(x, y) - P_{m,n}^{[\alpha,\beta]}(f; x, y)| \leqq \tag{13}$$

$$\leqq \sqrt{\frac{1+\alpha m}{m+\alpha m}}\,\omega_{1,0}\left(\sqrt{\frac{1+\alpha m}{m+\alpha m}}, \sqrt{\frac{1+\beta n}{n+\beta n}}\right) +$$

$$+ \sqrt{\frac{1+\beta n}{n+\beta n}}\,\omega_{0,1}\left(\sqrt{\frac{1+\alpha m}{m+\alpha m}}, \sqrt{\frac{1+\beta n}{n+\beta n}}\right),$$

$\omega_{1,0}(\delta_1, \delta_2)$ şi $\omega_{0,1}(\delta_1, \delta_2)$ reprezentînd modulele de continuitate respectiv ale derivatelor parţiale $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$.

Demonstrație. Deoarece în baza formulei lui Taylor putem scrie identitatea

$$f(x, y) - f\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n}\right) = \left(x - \frac{i}{m}\right) f'_x(x, y) + \left(x - \frac{i}{m}\right) [f'_x(\xi_i, \eta_j) - f'_x(x, y)] +$$

$$+ \left(y - \frac{j}{n}\right) f'_y(x, y) + \left(y - \frac{j}{n}\right) [f'_y(\xi_i, \eta_j) - f'_y(x, y)],$$

unde ξ_i și η_j aparțin intervalelor deschise determinate de x și $\frac{i}{m}$, respectiv de y și $\frac{j}{n}$, avem

$$| f(x, y) - P_{m, n}^{[\alpha, \beta]}(f; x, y) | \leqq$$

$$\leqq \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \left| x - \frac{i}{m} \right| w_{m, i}(x; \alpha) w_{n, j}(y; \beta) | f'_x(\xi_i, \eta_j) - f'_x(x, y) | +$$

$$+ \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \left| y - \frac{j}{n} \right| w_{m, i}(x; \alpha) w_{n, j}(y; \beta) | f'_y(\xi_i, \eta_j) - f'_y(x, y) |,$$

căci

$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \left(x - \frac{i}{m}\right) w_{m, i}(x; \alpha) w_{n, j}(y; \beta) = 0 \tag{14}$$

$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \left(y - \frac{j}{n}\right) w_{m, i}(x; \alpha) w_{n, j}(y; \beta) = 0. \tag{15}$$

Cum

$$| f'_x(\xi_i, \eta_j) - f'_x(x, y) | \leqq \omega_{1, 0}(|x - \xi_i|, |y - \eta_j|) \leqq$$

$$\leqq \left(1 + \frac{1}{\delta_1} |x - \xi_i| + \frac{1}{\delta_2} |y - \eta_j|\right) \omega_{1, 0}(\delta_1, \delta_2) \leqq$$

$$\leqq \left(1 + \frac{1}{\delta_1} \left| x - \frac{i}{m} \right| + \frac{1}{\delta_2} \left| y - \frac{j}{n} \right|\right) \omega_{1, 0}(\delta_1, \delta_2)$$

și

$$| f'_y(\xi_i, \eta_j) - f'_y(x, y) | \leqq \left(1 + \frac{1}{\delta_1} \left| x - \frac{i}{m} \right| + \frac{1}{\delta_2} \left| y - \frac{j}{n} \right|\right) \omega_{0, 1}(\delta_1, \delta_2),$$

dacă ţinem seama de inegalităţile (10) şi (11) obţinem în continuare

$$|f(x, y) - P_{m,n}^{[\alpha,\beta]}(f; x, y)| \leqq$$

$$\leq \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\alpha m}{m+\alpha m}} + \frac{1}{4\delta_1} \cdot \frac{1+\alpha m}{m+\alpha m} + \frac{1}{4\delta_2}\sqrt{\frac{(1+\alpha m)(1+\beta n)}{(m+\alpha m)(n+\beta n)}}\right)\omega_{1,0}(\delta_1, \delta_2) +$$

$$+ \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\beta n}{n+\beta n}} + \frac{1}{4\delta_1}\sqrt{\frac{(1+\alpha m)(1+\beta n)}{(m+\alpha m)(n+\beta n)}} + \frac{1}{4\delta_2} \cdot \frac{1+\beta n}{n+\beta n}\right)\omega_{0,1}(\delta_1, \delta_2).$$

Alegînd pentru δ_1 şi δ_2 valorile de la (12) găsim tocmai inegalitatea (13). Pentru $\alpha = \beta = 0$ aceasta se reduce la inegalitatea

$$|f(x, y) - B_{m,n}(f; x, y)| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{\sqrt{m}}\,\omega_{1,0}\left(\frac{1}{\sqrt{m}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \frac{1}{\sqrt{n}}\,\omega_{0,1}\left(\frac{1}{\sqrt{m}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

pe care am stabilit-o anterior în lucrarea [2].

7. Acum vom da o formulă asimptotică, de tip Voronovskaia, pentru termenul rest al formulei de aproximare a funcţiei $f(x, y)$ prin operatorul (3). Are loc

TEOREMA 5. *Să presupunem că* $\alpha = \alpha(m) \to 0$ *cînd* $m \to \infty$ *şi că* $\beta = \beta(n) \to 0$ *cînd* $n \to \infty$. *Dacă* $f(x,y)$ *este mărginită pe* D *iar în punctul* $(x, y) \in D$ *are diferenţiala de ordinul doi* $\mathrm{d}^2 f(x, y)$, *atunci*

$$P_{m,n}^{[\alpha,\beta]}(f; x, y) = f(x, y) + \frac{1+\alpha m}{1+\alpha} \cdot \frac{x(1-x)}{2m} f''_{xx}(x, y) + \tag{16}$$

$$+ \frac{1+\beta n}{1+\beta} \cdot \frac{y(1-y)}{2n} f''_{yy}(x, y) + \frac{\varepsilon_{m,n}^{[\alpha,\beta]}(x, y)}{m} + \frac{\eta_{m,n}^{[\alpha,\beta]}(x, y)}{n},$$

unde $\varepsilon_{m,n}^{[\alpha,\beta]}(x, y)$ *şi* $\eta_{m,n}^{[\alpha,\beta]}(x, y)$ *tind la zero cînd* $m, n \to \infty$.

Demonstraţie. Fie $(t, \tau) \in D$. Se ştie că dacă $f(x, y)$ este mărginită pe D şi are diferenţială de ordinul doi pe punctul $(x, y) \in D$, atunci există o funcţie $g(t, \tau)$, definită pe D, astfel încît atunci cînd $t \to x$ şi $\tau \to y$ avem $g(t, \tau) \to 0$ şi $f(t, \tau)$ se poate dezvolta după formula lui Taylor

$$f(t, \tau) = f(x, y) + (t - x) f'_x(x, y) + (\tau - y) f'_y(x, y) +$$

$$+ \frac{1}{2}(t - x)^2 f''_{xx}(x, y) + (t - x)(\tau - y) f''_{xy}(x, y) +$$

$$+ \frac{1}{2}(\tau - y)^2 f''_{yy}(x, y) + [(t - x)^2 + (\tau - y)^2]\, g(t, \tau).$$

Dacă înlocuim aici $t = \frac{i}{m}$ şi $\tau = \frac{j}{n}$, înmulţim ambii membri cu $w_{m,i}(x; \alpha)\, w_{n,j}(y, \beta)$, iar apoi însumăm, ţinînd seama de (5), (6), (14) şi (15), obţinem

$$P_{m,n}^{[\alpha,\beta]}(f; x, y) = f(x, y) +$$

$$+ \frac{1+\alpha m}{1+\alpha} \cdot \frac{x(1-x)}{2m} f''_{xx}(x, y) + \frac{1+\beta n}{1+\beta} \cdot \frac{y(1-y)}{2n} f''_{yy}(x, y) + \rho_{m,n}^{[\alpha,\beta]}(x, y),$$

unde

$$\rho_{m,n}^{[\alpha,\beta]}(x, y) =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} w_{m,i}(x; \alpha)\, w_{n,j}(y, \beta) \left[\left(\frac{i}{m} - x\right)^2 + \left(\frac{j}{n} - y\right)^2\right] g\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n}\right).$$

Deoarece $g(t, \tau) \to 0$ cînd $t \to x$ şi $\tau \to y$, rezultă că oricărui număr $\varepsilon > 0$ îi corespund numerele $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, astfel încît să avem $|g(t, \tau)| < \varepsilon$ cînd $|t - x| \leqq \delta_1$ şi $|\tau - y| \leqq \delta_2$. Luînd $t = \frac{i}{m}$, $\tau = \frac{j}{n}$, înseamnă că avem

$$\left|g\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n}\right)\right| < \varepsilon \quad \text{cînd} \quad \left|\frac{i}{m} - x\right| \leqq \delta_1, \quad \left|\frac{j}{n} - y\right| \leqq \delta_2.$$

Avînd în vedere că

$$|\rho_{m,n}^{[\alpha,\beta]}(x, y)| \leqq$$

$$\leqq \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} w_{m,i}(x; \alpha)\, w_{n,j}(y; \beta) \left[\left(\frac{i}{m} - x\right)^2 + \left(\frac{j}{n} - y\right)^2\right] \left|g\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n}\right)\right|,$$

se poate proceda în continuare ca şi în cazul unei variabile, şi anume, se descompune prima sumă în două — una extinsă la mulţimea întregilor i care satisfac inegalitatea $\left|\frac{i}{m} - x\right| \leqq \delta_1$ şi a doua extinsă la mulţimea întregilor i care satisfac inegalitatea contrară; a doua sumă se descompune în mod analog, după cum j satisface sau nu inegalitatea $\left|\frac{j}{n} - y\right| \leqq \delta_2$. Se ajunge apoi la concluzia că

$$\rho_{m,n}^{[\alpha,\beta]}(x, y) = \frac{\varepsilon_{m,n}^{[\alpha,\beta]}(x, y)}{m} + \frac{\eta_{m,n}^{[\alpha,\beta]}(x, y)}{n},$$

unde numărătorii tind la zero cînd $m, n \to \infty$.

Pentru $\alpha = \beta = 0$ egalitatea (16) se reduce la o egalitate dată de I. F. Ipatov [1] pentru polinoamele lui Bernstein $B_{m,n}(f; x, y)$.

8. Rezultatele precedente se pot extinde, fără dificultăţi, la un număr oarecare de s variabile.

Astfel, dacă se consideră funcţia $f(x_1, \ldots, x_s)$ definită pe hipercubul $D_s: 0 \leq x_k \leq 1$ $(k = \overline{1, s})$, operatorul corespunzător celui de la (1) va fi

$$P^{[\alpha_1, \ldots, \alpha_s]}_{m_1, \ldots, m_s}(f; x_1, \ldots, x_s) = \tag{17}$$

$$= \sum_{i_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{i_s=0}^{m_s} w_{m_1, i_1}(x_1; \alpha_1) \ldots w_{m_s, i_s}(x_s; \alpha_s) f\left(\frac{i_1}{m_1}, \ldots, \frac{i_s}{m_s}\right),$$

cu

$$w_{m_\nu, i_\nu}(x_\nu; \alpha_\nu) =$$

$$= \binom{m_\nu}{i_\nu} \frac{x_\nu(x_\nu + \alpha_\nu) \ldots (x_\nu + \overline{i_\nu - 1}\alpha_\nu)(1 - x_\nu)(1 - x_\nu + \alpha_\nu) \ldots (1 - x_\nu + \overline{m_\nu - i_\nu - 1}\alpha_\nu)}{(1 + \alpha_\nu)(1 + 2\alpha_\nu) \ldots (1 + \overline{m_\nu - 1}\alpha_\nu)},$$

unde $\nu = \overline{1, s}$ iar $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ sînt parametri nenegativi, care pot depinde respectiv numai de $m_1, \ldots, m_s$.

Se poate arăta, fără dificultate, că teoremelor 1–4 le corespund teoremele care vor urma.

TEOREMA 1'. *Operatorul (17) se poate reprezenta sub forma*

$$P^{[\alpha_1, \ldots, \alpha_s]}_{m_1, \ldots, m_s}(f; x_1, \ldots, x_s) =$$

$$= \sum_{r_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{r_s=0}^{m_s} \binom{m_1}{r_1} \cdots \binom{m_s}{r_s} \varphi_{r_1}(x_1; \alpha_1) \ldots \varphi_{r_s}(x_s; \alpha_s) \Delta^{r_1, \ldots, r_s}_{\frac{1}{m_1}, \ldots, \frac{1}{m_s}} f(0, \ldots, 0),$$

unde

$$\varphi_{r_j}(x_j; \alpha_j) = \frac{x_j(x_j + \alpha_j)(x_j + 2\alpha_j) \ldots (x_j + \overline{r_j - 1}\alpha_j)}{(1 + \alpha_j)(1 + 2\alpha_j) \ldots (1 + \overline{r_j - 1}\alpha_j)} \qquad (j = \overline{1, s}),$$

iar

$$\Delta^{r_1, \ldots, r_s}_{\frac{1}{m_1}, \ldots, \frac{1}{m_s}} f(0, \ldots, 0) =$$

$$= \sum_{i_1=0}^{r_1} \cdots \sum_{i_s=0}^{r_s} (-1)^{i_1 + \ldots + i_s} \binom{r_1}{i_1} \cdots \binom{r_s}{i_s} f\left(\frac{r_1 - i_1}{m_1}, \ldots, \frac{r_s - i_s}{m_s}\right).$$

În cazurile particulare ale funcţiilor $1, x_1, \ldots, x_s, x_1^2 + \ldots + x_s^2$ această formulă ne conduce la egalităţile

$$P_{m_1, \ldots, m_s}^{[\alpha_1, \ldots, \alpha_s]}(1; x_1, \ldots, x_s) = 1, \quad P_{m_1, \ldots, m_s}^{[\alpha_1, \ldots, \alpha_s]}(t_j; x_1, \ldots, x_s) = x_j \quad (j = \overline{1, s}),$$

$$P_{m_1, \ldots, m_s}^{[\alpha_1, \ldots, \alpha_s]}(t_1^2 + \ldots + t_s^2; x_1, \ldots, x_s) = \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{1 + \alpha_j}\left[\frac{x_j(1 - x_j)}{m_j} + x_j(x_j + \alpha_j)\right].$$

Avînd în vedere că dacă se presupune că $0 \leqq \alpha_j = \alpha_j(m_j) \to 0$ pentru $m_j \to \infty$ $(j = \overline{1, s})$, avem uniform pe D_s

$$\lim_{m_1, \ldots, m_s \to \infty} P_{m_1, \ldots, m_s}^{[\alpha_1, \ldots, \alpha_s]}(f; x_1, \ldots, x_s) = f(x_1, \ldots, x_s)$$

în cazul funcţiilor particulare precedente, în baza teoremei lui Bohman-Korovkin-Volkov pentru s variabile putem enunţa

TEOREMA 2'. *Dacă $f(x_1, \ldots, x_s)$ este continuă pe hipercubul D_s şi $0 \leqq \alpha_j = \alpha_j(m_j) \to 0$ cînd $m_j \to \infty$ $(j = \overline{1, s})$, atunci şirul polinoamelor* 17) *converge uniform pe D_s către $f(x_1, \ldots, x_s)$ cînd $m_1, \ldots, m_s \to \infty$.*

Definind modulul de continuitate al funcţiei $f(x_1, \ldots, x_s)$ pe D_s prin formula

$$\omega(\delta_1, \ldots, \delta_s) = \max |f(x_1'', \ldots, x_s'') - f(x_1', \ldots, x_s')|,$$

x_i', x_i'' $(i = \overline{1, s})$ luînd valori din intervalul $[0, 1]$ astfel încît $|x_1'' - x_1'| \leqq \delta_1, \ldots, |x_s'' - x_s'| \leqq \delta_s$, numerele $\delta_1, \ldots, \delta_s$ fiind pozitive, avem

TEOREMA 3'. *Dacă $f(x_1, \ldots, x_s)$ este continuă pe D_s, atunci are loc inegalitatea*

$$|f(x_1, \ldots, x_s) - P_{m_1, \ldots, m_s}^{[\alpha_1, \ldots, \alpha_s]}(f; x_1, \ldots, x_s)| \leqq$$

$$\leqq \left(1 + \frac{s}{2}\right) \omega\left(\sqrt{\frac{1 + \alpha_1 m_1}{m_1 + \alpha_1 m_1}}, \ldots, \sqrt{\frac{1 + \alpha_s m_s}{m_s + \alpha_s m_s}}\right).$$

Notînd cu $\omega_{1,0,\ldots,0}, \omega_{0,1,0,\ldots,0}, \ldots, \omega_{0,0,\ldots,0,1}$ modulele de continuitate pe D_s ale derivatelor parţiale de ordinul întîi în raport cu x_1, cu $x_2, \ldots$, respectiv cu x_s, se poate enunţa teorema următoare, care generalizează teorema 4.

TEOREMA 4'. *Dacă $f(x_1, \ldots, x_s)$ are derivatele parţiale de ordinul întîi continue pe D_s, atunci are loc inegalitatea*

$$|f(x_1, \ldots, x_s) - P_{m_1, \ldots, m_s}^{[\alpha_1, \ldots, \alpha_s]}(f; x_1, \ldots, x_s)| \leqq \delta_1 \omega_{1,0,\ldots,0}(\delta_1, \ldots, \delta_s) +$$

$$+ \delta_2 \omega_{0,1,0,\ldots,0}(\delta_1, \ldots, \delta_s) + \ldots + \delta_s \omega_{0,\ldots,0,1}(\delta_1, \ldots, \delta_s),$$

unde

$$\delta_j = \sqrt{\frac{1 + \alpha_j m_j}{m_j + \alpha_j m_j}} \qquad (j = \overline{1, s}).$$

În sfîrşit, extinderea teoremei 5 la s variabile se poate enunţa astfel

TEOREMA 5′. *Fie* $\alpha_j = \alpha_j(m_j) \to 0$ *cînd* $m_j \to \infty$ $(j = \overline{1, s})$. *Dacă* $f(x_1, \ldots, x_s)$ *este mărginită pe* D_s *şi în punctul* $(x_1, \ldots, x_s) \in D_s$ *ea are diferenţială de ordinul doi, atunci are loc reprezentarea*

$$P_{m_1, \ldots, m_s}^{[\alpha_1, \ldots, \alpha_s]}(f; x_1, \ldots, x_s) = f(x_1, \ldots x_s) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{s} \frac{1 + \alpha_j m_j}{1 + \alpha_j} f'_{x_j x_j}(x_1, \ldots, x_s) + \sum_{j=1}^{s} \frac{\varepsilon_{m_1, \ldots, m_s}^{[\alpha_1, \ldots, \alpha_s; j]}(x_1, \ldots x_s)}{m_j},$$

unde numărătorii fracţiilor din ultima sumă tind la zero cînd $m_1, \ldots, m_s$ *tind la infinit.*

Primită la redacţie la 4 ianuarie 1969

Universitatea „Babeş-Bolyai" Cluj
Facultatea de matematică-mecanică

BIBLIOGRAFIE

1. А. Ф. ИПАТОВ, *Оценка погрешности и порядок приближения функции двух переменных полиномами С. Н. Бернштейна.* Учен. Зап. Петрозавод. Унив., 4, 31—48 (1955).
2. D. D. STANCU, *Generalizations of an inequality of G. G. Lorentz.* Analele Şt. Univ. „Al. I. Cuza", Iaşi, Secţ. I, 9, 49–58 (1963).
3. D. D. STANCU, *Approximation of functions by a new class of linear polynomial operators.* Rev. Roum. math. pures et appl., 13, 1173–1194 (1968).
4. В. И. ВОЛКОВ, *О сходимости последовательности линейных положительных операторов в пространстве непрерывных функций двух переменных.* Докл. Акад. наук СССР, 115, 17—19 (1957).

APPROXIMATION OF FUNCTIONS OF TWO AND SEVERAL VARIABLES BY A CLASS OF POLYNOMIALS OF BERNSTEIN TYPE

(ABSTRACT)

The purpose of this paper is to give a number of results concerning the approximation of continuous functions of two and several variables by the operators (3) and (17), which represent extensions to two and several variables of the linear positive polynomial operators (1), introduced and studied in detail by the author in his previous paper [3].