

45

## ASUPRA FUNCȚIILOR DE REPARTIȚIE PENTRU LEGILE PROBABILISTICE ALE LUI BERNOULLI ȘI POISSON MULTIDIMENSIONALE

DE

D. D. STANCU

(Cluj)

Folosind o formulă de tip Taylor pentru mai multe variabile, cu restul sub formă integrală, de care ne-am ocupat în două lucrări anterioare, se găsește, pe o cale simplă, o reprezentare a funcției de repartiție pentru repartiția multinomială, care se datorește lui M. I. Stoka, precum și pentru repartiția lui Poisson multidimensională.

Prin intermediul unei formule de tip Taylor de mai multe variabile, cu restul exprimat prin integrale definite, de care ne-am ocupat în lucrările [15], [16], vom regăsi, pe o cale simplă, o expresie dată de M.I. Stoka [17], [8] pentru funcția de repartiție a legii multinomiale, cunoscută încă demult (a se vedea, de ex., [18]) în cazul binomial și demonstrată de M. I. Stoka pe o cale directă, prin derivări și integrări, în cazul trinomial. De asemenea, vom da o expresie, potrivită pentru aplicații, pentru funcția de repartiție a legii lui Poisson multidimensională.

Fie  $f(x_1, \dots, x_s)$  o funcție de  $s$  variabile independente, care în vecinătatea unui punct  $A(a_1, \dots, a_s)$  admite derivate parțiale continue de ordinele  $(r_1 + 1, \dots, r_s + 1)$ . Aceasta se poate dezvolta după formula de tip Taylor

$$f(x_1, \dots, x_s) = \sum_{k_1=0}^{r_1} \dots \sum_{k_s=0}^{r_s} \frac{(x_1 - a_1)^{k_1} \dots (x_s - a_s)^{k_s}}{k_1! \dots k_s!} f^{(k_1, \dots, k_s)}(a_1, \dots, a_s) + R_s(f),$$

(1)

unde restul  $R_s(f)$  se reprezintă prin integrale definite în felul următor :

$$(2) \quad R_s(f) = \sum \int_{a_1}^{x_1} \frac{(x_1 - t_1)^{r_1}}{r_1!} f^{(r_1+1, 0, \dots, 0)}(t_1, x_2, \dots, x_s) dt_1 -$$



$$\begin{aligned}
 & - \sum \frac{h_1^{r_1+1} h_2^{r_2+1}}{r_1! r_2!} \int_0^1 \int_0^1 (1-u_1)^{r_1} (1-u_2)^{r_2} f^{(r_1+1, r_2+1, 0, \dots, 0)}(a_1+h_1 u_1, a_2+h_2 u_2, \\
 & \quad a_3+h_3, \dots, a_s+h_s) du_1 du_2 + \\
 & \quad \dots \\
 & + (-1)^{s-1} \frac{h_1^{r_1+1} \dots h_s^{r_s+1}}{r_1! \dots r_s!} \int_0^1 \dots \int_0^1 (1-u_1)^{r_1} \dots (1-u_s)^{r_s} f^{(r_1+1, \dots, r_s+1)} \\
 & \quad (a_1+h_1 u_1, \dots, a_s+h_s u_s) du_1 \dots du_s.
 \end{aligned}$$

Vom căuta acum să folosim formula de tip Taylor (3), cu restul sub forma (4), la stabilirea unei expresii analitice utile în aplicații, dată în cazul general în [17] pentru funcția de repartiție a distribuției multinomiale

$$(5) \quad F_{r_1, \dots, r_s}(n; p_1, \dots, p_s) = \sum_{k_1=0}^{r_1} \dots \sum_{k_s=0}^{r_s} w_n^{(k_1, \dots, k_s)}(p_1, \dots, p_s),$$

unde

$$\begin{aligned}
 (6) \quad & w_n^{(k_1, \dots, k_s)}(p_1, \dots, p_s) = \\
 & = \frac{n!}{k_1! \dots k_s! (n-k_1 - \dots - k_s)!} p_1^{k_1} \dots p_s^{k_s} (1-p_1 - \dots - p_s)^{n-k_1 - \dots - k_s}.
 \end{aligned}$$

(f) Dacă alegem  $f(x_1, \dots, x_s) = (x_1 + \dots + x_s)^n$ ,  $h_1 = p_1, \dots, h_s = p_s$ ,  $a_1 = \frac{1}{s} - p_1, \dots, a_s = \frac{1}{s} - p_s$ , avem

$$f^{(i_1, \dots, i_s)}(x_1, \dots, x_s) = n^{[i_1 + \dots + i_s]} (x_1 + \dots + x_s)^{n-i_1 - \dots - i_s},$$

cu notația obișnuită pentru factorialul generalizat:

$$n^{[k]} = n(n-1) \dots (n-k+1).$$

Obținem apoi

$$f(a_1 + h_1, \dots, a_s + h_s) = f\left(\frac{1}{s}, \dots, \frac{1}{s}\right) = 1,$$

$$f^{(k_1, \dots, k_s)}(a_1, \dots, a_s) = n^{[k_1 + \dots + k_s]} (1-p_1 - \dots - p_s)^{n-k_1 - \dots - k_s},$$

$$f^{(r_1+1, 0, \dots, 0)}(a_1+h_1, a_2+h_2, \dots, a_s+h_s) = n^{[r_1+1]} (1-p_1(1-u_1))^{n-r_1-1}$$

$$\begin{aligned}
 & f^{(r_1+1, r_2+1, 0, \dots, 0)}(a_1+h_1, a_2+h_2, a_3+h_3, \dots, a_s+h_s) = n^{[r_1+r_2+2]} \\
 & \quad (1-p_1(1-u_1) - p_2(1-u_2))^{n-r_1-r_2-2}, \\
 & \quad \dots
 \end{aligned}$$

$$f^{(r_1+1, \dots, r_s+1)}(a_1+h_1, \dots, a_s+h_s) = n^{[r_1 + \dots + r_s + s]}$$

$$(1-p_1(1-u_1) - \dots - p_s(1-u_s))^{n-r_1 - \dots - r_s - s}.$$

Rezultă că formula de tip Taylor (3), cu restul (4), se reduce la următoarea :

$$(7) \quad 1 = F_{r_1, \dots, r_s}(n; p_1, \dots, p_s) + R_s,$$

unde

$$(8) \quad R_s = \sum \frac{n^{[r_1+1]} p_1^{r_1+1}}{r_1!} \int_0^1 (1-u_1)^{r_1} (1-p_1(1-u_1))^{n-r_1-1} du_1 - \\ - \sum \frac{n^{[r_1+r_2+2]} p_1^{r_1+1} p_2^{r_2+1}}{r_1! r_2!} \int_0^1 \int_0^1 (1-u_1)^{r_1} (1-u_2)^{r_2} (1-p_1(1-u_1) - \\ - p_2(1-u_2))^{n-r_1-r_2-2} du_1 du_2 + \\ \dots \\ + (-1)^{s-1} \frac{n^{[r_1+\dots+r_s+s]} p_1^{r_1+1} \dots p_s^{r_s+1}}{r_1! \dots r_s!} \int_0^1 \dots \int_0^1 (1-u_1)^{r_1} \dots (1-u_s)^{r_s} \\ (1-p_1)(1-u_1) \dots - p_s(1-u_s))^{n-r_1-\dots-r_s-s} du_1 \dots du_s.$$

Presupunînd că  $p_1 > 0, \dots, p_s > 0$ , dacă facem schimbările de variabile

$$(9) \quad u_1 = 1 - \frac{t_1}{p_1}, \dots, u_s = 1 - \frac{t_s}{p_s},$$

termenul complementar  $R_s$  se va putea reprezenta în felul următor :

$$(10) \quad R_s = \sum \frac{n^{[r_1+1]} p_1^{r_1+1}}{r_1!} \int_0^{p_1} t_1^{r_1} (1-t_1)^{n-r_1-1} dt_1 - \\ - \sum \frac{n^{[r_1+r_2+2]} p_1^{r_1+1} p_2^{r_2+1}}{r_1! r_2!} \int_0^{p_1} \int_0^{p_2} t_1^{r_1} t_2^{r_2} (1-t_1-t_2)^{n-r_1-r_2-2} dt_1 dt_2 + \\ \dots \\ + (-1)^{s-1} \frac{n^{[r_1+\dots+r_s+s]} p_1^{r_1+1} \dots p_s^{r_s+1}}{r_1! \dots r_s!} \int_0^{p_1} \dots \int_0^{p_s} t_1^{r_1} \dots t_s^{r_s} (1-t_1-\dots-t_s)^{n-r_1-\dots-r_s-s} \\ dt_1 \dots dt_s.$$

Se observă că această formulă are loc și în cazul cînd  $p_1, \dots, p_s$  sînt egali cu zero.

Ținînd seama de (7) și (10) putem scrie următoarea expresie pentru funcția de repartiție a distribuției multinomiale :

$$(11) \quad F_{r_1, \dots, r_s}(p_1, \dots, p_s) = 1 - R_s = \\ = 1 - \sum \frac{n^{[r_1+1]} p_1^{r_1+1}}{r_1!} \int_0^{p_1} t_1^{r_1} (1-t_1)^{n-r_1-1} dt_1 +$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum \frac{n^{[r_1+r_2+2]}}{r_1! r_2!} \int_0^{p_1} \int_0^{p_2} t_1^{r_1} t_2^{r_2} (1-t_1-t_2)^{n-r_1-r_2-2} dt_1 dt_2 - \\
 & \dots \dots \dots \\
 & + (-1)^s \frac{n^{[r_1+\dots+r_s+s]}}{r_1! \dots r_s!} \int_0^{p_1} \dots \int_0^{p_s} t_1^{r_1} \dots t_s^{r_s} (1-t_1-\dots-t_s)^{n-r_1-\dots-r_s-s} \\
 & \quad dt_1 \dots dt_s,
 \end{aligned}$$

care reprezintă tocmai formula dată de M. I. Stoka [17], căci

$$\frac{n^{[r_1+\dots+r_j+j]}}{r_1! \dots r_j!} = \frac{n!}{r_1! \dots r_j! (n-r_1-\dots-r_j-j)!} \quad (j = 1, 2, \dots, s).$$

Dacă se presupune că  $p_1, \dots, p_s$  depind de  $n$ , în așa fel încît produsele  $np_1, \dots, np_s$  tind respectiv către constantele pozitive  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ , cînd  $n$  tinde la infinit, atunci formula (7), cu termenul complementar dat sub forma (8), permite să se afle o expresie simplă pentru funcția de repartiție a distribuției lui Poisson multidimensională

$$(12) \quad \Phi_{r_1, \dots, r_s}(\lambda_1, \dots, \lambda_s) = \sum_{k_1=0}^{r_1} \dots \sum_{k_s=0}^{r_s} \frac{\lambda_1^{k_1} \dots \lambda_s^{k_s}}{k_1! \dots k_s!} e^{-(\lambda_1+\dots+\lambda_s)}$$

și anume

$$(13) \quad \Phi_{r_1, \dots, r_s}(\lambda_1, \dots, \lambda_s) = \prod_{i=1}^s [1 - I(r_i, \lambda_i)],$$

unde

$$(14) \quad I(r_i, \lambda_i) = \frac{\Gamma_{\lambda_i}(r_i+1)}{\Gamma(r_i+1)} = \frac{1}{r_i!} \Gamma_{\lambda_i}(r_i+1),$$

iar

$$(15) \quad \Gamma_{\lambda_i}(r_i+1) = \int_0^{\lambda_i} t_i^{r_i} e^{-t_i} dt_i$$

este funcția gamma incompletă.

De remarcat că la acest rezultat nu se poate ajunge prin procedeul de trecere la limită indicat dacă se apelează la formula (11) a lui M.I. Stoka. Dar trebuie subliniat că formula (13) se poate obține imediat și pe o cale directă, observînd că funcția de repartiție (12) se poate scrie astfel

$$\Phi_{r_1, \dots, r_s}(\lambda_1, \dots, \lambda_s) = \prod_{i=1}^s \Phi_{r_i}(\lambda_i),$$

unde

$$\Phi_{r_i}(\lambda_i) = \sum_{k_i=0}^{r_i} \frac{\lambda_i^{k_i}}{k_i!} e^{-\lambda_i},$$

cea ce ne permite să constatăm că variabilele aleatoare care reprezintă componentele vectorului aleator de distribuție Poisson multidimensională sînt independente între ele [5]. În consecință, prin aplicarea formulei lui Taylor de o variabilă, cu restul sub formă integrală, obținem imediat [4]

$$\Phi_{r_i}(\lambda_i) = 1 - \frac{1}{r_i!} \int_0^{\lambda_i} t_i^{r_i} e^{-t_i} dt_i = 1 - I(r_i, \lambda_i),$$

dacă se alege  $f(x_i) = e^{x_i}$ ,  $a_i = -h_i = -\lambda_i$ .

Pentru calculul valorilor funcției de repartiție (12), care intervine într-o serie de aplicații importante (a se vedea, de exemplu, [10]) se pot folosi tabelele numerice întocmite pentru funcția (14). Astfel indicăm tabelele elaborate de V. I. Pagurova [9], de E. C. Molina [6] și de H.L. Harter [11]. Sub direcția lui K. Pearson [11] s-a tabulat funcția

$$I\left(r, \frac{\lambda}{\sqrt{r+1}}\right).$$

Se observă că în cazul distribuției multinomiale intervin funcțiile lui Dirichlet incomplete:

$$(16) \quad B_{p_1, \dots, p_j}(r_1+1, \dots, r_j+1, n-r_1-\dots-r_j-j+1) = \\ = \int_0^{p_1} \dots \int_0^{p_j} t_1^{r_1} \dots t_j^{r_j} (1-t_1-\dots-t_j)^{n-r_1-\dots-r_j-j} dt_1 \dots dt_j,$$

unde  $p_1 \geq 0, \dots, p_j \geq 0, p_1 + \dots + p_j \leq 1, j = 1, 2, \dots, s$ . Acestea generalizează funcția beta incompletă. Sub conducerea lui K. Pearson [12] a fost tabulată funcția

$$(17) \quad I_p(r, s) = \frac{B_p(r, s)}{B(r, s)} = \frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)\Gamma(s)} \int_0^p t^{r-1} (1-t)^{s-1} dt,$$

utilă pentru calculul valorilor funcției de repartiție a legii binomiale, pentru care au fost întocmite tabele extensive în [7], [13] și [2]. Dar pînă în prezent nu au fost tabulate, în cazurile  $2 \leq j \leq s$  ( $s > 1$ ), funcțiile lui Dirichlet incomplete, sau variantele funcției (17):

$$I_{p_1, \dots, p_j}(r_1+1, \dots, r_j+1, n-r_1-\dots-r_j-j+1) = \\ = \frac{B_{p_1, \dots, p_j}(r_1+1, \dots, r_j+1, n-r_1-\dots-r_j-j+1)}{B(r_1+1, \dots, r_j+1, n-r_1-\dots-r_j-j+1)},$$

unde numitorul reprezintă o integrală multiplă de forma (16), dar care este extinsă la simplexul  $\Delta_j: \{t_1, \dots, t_j: t_1 \geq 0, \dots, t_j \geq 0, t_1 + \dots + t_j \leq 1\}$ .

Primită la redacție la 23 februarie 1969

ON DISTRIBUTION FUNCTION FOR MULTIDIMENSIONAL  
BERNOULLI AND POISSON PROBABILISTIC LAWS

## (ABSTRACT)

Using a Taylor formula for several variables, with the remainder having an integral form studied in two previous papers, the author finds in a simple way a representation of the distribution function for the multinomial distribution due to M. I. Stoka, as well as for the multidimensional Poisson distribution.

## BIBLIOGRAFIE

1. HARTER, H. L., *New tables of the incomplete gamma-function and percentage points of the chi-square and beta distributions*, U. S. Government Printing Office, Washington, D. C., 1964.
2. HARVARD UNIVERSITY, *Tables of the cumulative binomial probability distributions* Annals of the Computation Laboratory of Harvard University, XXXV, Cambridge, Massachusetts, 1955.
3. KHAMIS, S. H., *Tables of the Incomplete Gamma Function Ratio*, Justus von Liebig Verlag, Darmstadt, 1965.
4. KENDALL, M. G., STUART, A., *The Advanced Theory of Statistics*. Vol. 1. Distribution Theory (ed. II). Charles Griffin, London, 1962.
5. MIHOȘ, G., FIRESCU, D., *Statistică matematică*. Edit. didactică și pedagogică, București, 1966.
6. MOLINA E. C., *Poisson's exponential binomial limit*. D. Van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1942.
7. National bureau of standards, *Tables of the binomial probability distribution*. Applied Mathematics Series, 6, U. S. Government Printing Office, Washington, D. C., 1950.
8. ONICESCU, O., MIHOȘ, G., *Leții de statistică matematică*. Edit. tehnică, București, 1958.
9. ПАГУРОВА, В. И., *Таблицы неполной гамма-функций*. Изд. Вычислит. центра Акад. наук СССР, Москва, 1963.
10. PARZEN, E., *Modern Probability Theory and its Applications*. John Wiley, New York, 1960.
11. PEARSON, K. (Editor), *Tables of the Incomplete Gamma Function*. Cambridge University Press, 1922 [Reeditată în 1934 de Biometrika Office, University College, London].
12. — *Tables of the Incomplete Beta Function*. Biometrika Office, University College, London, 1934.
13. ROMIG, H. G., *50 — 100 Binomial Tables*, John Wiley, New York, 1953.
14. STANCU D. D., *О некоторых разложениях Тейлора для функций нескольких переменных*. Revue Math. Pures Appl., 4, 249 — 265 (1959).
15. — *Expresia integrală a restului într-o formulă de tip Taylor pentru funcțiile de două variabile*. Acad. R. P. Române, Fil. Cluj, St. cerc. mat. 11, 177—183 (1960).
16. — *The remainder of certain linear approximation formulas in two variables*. J. SIAM Numer. Anal. Ser. B, 1, 137 — 163 (1964).
17. STOKA M. I., *Asupra funcției de repartiție a unei repartiții multinomiale*. St. cerc. mat. 18, 1281 — 1285 (1966).
18. USPENSKY, J. V., *Introduction to Mathematical Probability*. Mc Graw-Hill, New York, 1937.